BIBLIOTECA NAZIONALE VITT. EMANUELE
1+
4 M
39

14-19.Q.15

Q.b
II.
47

Johannis Wallisii, S S. Th. D.

GEOMETRIÆ PROFESSORIS
SAVILIANI in Celeberrimâ
Academia OXONIENSI;

OPERUM MATHEMATICORUM

Pars Prima.

Qua Continentur,

- Oratio Inauguralis.
- Matheſis Univerſalis; ſive, Arithmeticum opus Integrum, tum Numeroſam Arithmeticam tum Specioſam complectens.
- Adverſus Meibomii, de Proportionibus Dialogum, Tractatus Elencticus.

S: d
X

BIBLIOTECA NAZ.
ROMA
VITTORIO EMANUELE

Bibl. S. Pantaleonis Scholar. Piar.

OXONII,
Typis LEON. LICHFIELD Academiæ Typographi,
Impenſis THO. ROBINSON. *Anno* 1657.

Ex lib. Jo: Alph. Borel.

AMPLISSIMÆ
INCLYTISSIMAEQUE,
TUM PIETATE ET VIRTUTIBUS
TUM ERUDITIONE OMNIGENA
CELEBERRIMÆ

MATRI;

ACADEMIÆ

OXONIENSI:

HÆC SUA
OPERA MATHEMATICA
IN OBSEQUII DEBITI TESTIMONIUM

D. D.

JOHANNES WALLIS
GEOMETRIÆ PROFESSOR
SAVILIANUS.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITT. EMANUELE

PARTE PRIMA

CONTINENTVR.

I. Oratio Inauguralis.

II. Matheſis Univerſalis; ſive Arithmeticum Opus integrum, Arithmeticam tum Numeroſam, tum Specioſam; complectens; tum etiam Rationum & Progreſſionum traditionem; Logarithmorum item doctrinam; aliaque quæ Capitum ſyllabus exhibet.

CAP. I *De Matheſi in genere; ejuſque Objecto, & Diſtributione.*

II *De Arithmetica & Geometria ſpeciatim*

III *De Mathematicis Demonſtrationibus*

IV *De Unitatis, Numerique Definitionibus; Principio Numeri &c.*

V *Numerorum Procreatio, & Nomenclatura*

VI *Latina numerorum Nomina, a Græcis derivata*

VII *Numerorum Notatio per Alphabeti literas omnes, Hebrais & Græcis communis*

VIII *Numerorum Notatio per ſelectas aliquot Alphabeti literas, communis Græcis & Latinis*

IX *Numerorum Notatio per Ziphras Saracenicas, ſive Indicas*

X *Figurarum Numeralium valores, tum in ſe, tum pro locorum graduumve ſive aſcendentium ſive deſcendentium ratione*

XI *De Notatione Algebrica & ſpecioſa*

XII *Fractionum ſive Minutiarum Notatio*

XIII *De Additione Numeroſa*

XIV *De Subductione Numeroſa*

XV *De Additione & Subductione Algebrica & Specioſa*

XVI *Additionis & Subductionis Examina*

XVII *Additionis & Subductionis in re Chronologica ſpecimen*

XVIII *De Multiplicatione numeroſa*

XIX *De Diviſione Numeroſa*

XX *De Multiplicatione & Diviſione Algebrica & Specioſa*

XXI *Multiplicationis & Diviſionis examina*

XXII *Multiplicationis & Diviſionis ſpecimen, in Parallelogrammis Rectangulis menſurandis & invicem comparandis*

XXIII *Elementorum Euclidis liber ſecundus Arithmetice traditur & demonſtratur*

XXIV *Totius Planorum Geodæſiæ, traditio*

XXV *Numerorum, aliarumve Quantitatum Homogenearum, Comparatio; tum quoad Differentiam, tum quoad Rationem,*

XXVI *De Progreſſione Arithmetica*

XXVII *Ejuſdem fuſior traditio*
XXVIII *Ejuſdem brevis ſynopſis*
XXIX *Rationum Diſtributio, & Nomina*
XXX *De Rationum Compoſitione*
XXXI *De Progreſſione Geometrica*
XXXII *De Logarithmorum Origine & Uſu*
XXXIII *Progreſſio Geometrica, fuſius traditur*
XXXIV *Ejuſdem brevior Synopſis.*
XXXV *Elementorum Euclidis liber Quintus, Arithmetice traditur & demonſtratur*
XXXVI *Ejuſdem ſynopſis*
XXXVII *De Proportionalium Regula,* Aurea *dicta*
XXXVIII *De Reciproca proportionalium Regula, ſive Aurea Regula inverſa*
XXXIX *De Aurea Regula compoſita*
XL *De Regula Societatis dicta*
XLI *De Fractionibus, ſive minutiis*
XLII *De Fractionum Additione, & Subductione*
XLIII *De Fractionum Multiplicatione & Diviſione*
XLIV *De Fractionum Reductionibus variis*
XLV *De Fractionum Rationumve Rationibus: Totiuſque operis Epilogus)*

III Adverſus *Meibomii* de Proportionibus Dialogum, Tractatus Elencticus.
Cui præfigitur Epiſtola; qua de Paraboloide Cubicali, & Æquationibus Cubicis agitur.

PARTE SECUNDA

CONTINENTUR.

I De Angulo Contactus & Semicirculi, Diſquiſitio Geometrica.
II De Sectionibus Conicis Tractatus, Nova Methodo expoſitis.
III Arithmetica Infinitorum; ſive de Curviliniorum Quadratura, aliiſque difficilioribus matheſeos Problematis, Nova Methodus inquirendi.
IV Eclipſeos Solaris Obſervatio.

Johannis Wallis,

GEOMETRIÆ PROFESSORIS
SAVILIANI,

ORATIO INAUGURALIS:

IN

Auditorio Geometrico, *Oxonii*, habita;
ultimo die Menſis Octobris, Anno
Æræ Chriſtianæ 1649. quum publicam
Geometriæ Profeſſionem auſpicatus eſt.



OXONII,
Typis *Leonardi Lichfield* Academiæ Typographi:
Impenſis *Tho. Robinſon.* 1657.

ORATIO INAUGURALIS,

a *Johanne Wallis*, Geometriæ Profeſſore *Saviliano*, in Auditorio Geometrico, Oxoniæ, habita; ultimo die Menſis *Octobris*, Anno 1649; quum publicam Geometriæ Profeſſionem auſpicatus eſt.

Inſigniſſime Domine, Vice-Cancellarie;

Reliquique Doctores, Profeſſores, Ædiumque Præfecti Venerandi:

Egregii Procuratores; Cæterique, tum Regentes, tum Non-Regentes, Magiſtri:

Undique quotquot adeſtis Viri, Juveneſque Academici.

Quantumvis non ſim ego prorſus neſcius, quanto ſubſidat intervallo Geometra (dicam?) veſter, an hodiernus Orator; tam infra ſublimem tantæ Scientiæ dignitatem, quàm Majeſtatem hujuſce Auditorum Coronæ celeberrimæ: Non tamen eſſe, ſpero, quicquam, cur reformidem penitus, favore ve-

ſtro fretus, & de nobiliſſima Scientia, & coram humaniſſimis Auditoribus, verba facere.

Suſcepti ratio. Audacior fortaſſe res videri poſſit, & modeſta parum, virum vix ſatis notum, vix dum alumnum, in Academia celeberrima ſtatim prodire Profeſſorem; eoſque tanquam de Cathedra compellare, quorum non paucis ſatius eſſet ſe auditorem ſiſtere.

Non deeſt tamen quod hic dicendum occurrat, non tam prætextûs, quam juſtæ defenſionis loco.

Partim enim invitat notiſſima veſtra Clementia, quâ in Advenas, etiam exteros, ſumma ſoletis humanitate propenſi eſſe; præſertim vero in ἀνεψιὰς veſtros, ex conjunctiſſima ſorore *Cantabrigia* nepotes; quos, non tam ut adoptivos, quam germanos filios, in proprio repoſitos ſinu, ſumma ſoletis indulgentia exoſculari.

D.H. Savilii Encomia. Partim etiam animum faciunt ipſa *Statuta* Domini *Henrici* SAVILII, Equitis Honoratiſſimi, candore morum, & multiplici Eruditione inſignis, deq; literis literatiſq; omnibus optime meriti; Quibus ipſe, pro ſumma qua erat munificentiâ, animoq; ad ſtudia, præſertim Mathematica, promovenda propenſiſſimo, duos *Mathematum Profeſſores* ſancivit, alendos curavit, iiſque leges poſuit; quos ῥητῶς de quacunque gente, de quacunque profeſſione, ſtatuit eligendos.

- Invitat igitur Clementia veſtra; Suadent *Statuta Saviliana*; propriuſque animus ad hujusmodi ſtudia per ſe propenſus, eorumque ſive vota, ſive ſuffragia, qui id negotii mihi demandandum curarunt, Jubent, iſtis invitamentis obtemperare.

Cum vero gratiſſimum SAVILII nomen memorare contigerit; prolixa ſatis oratione poſſem in ipſius Encomia, ſi id neceſſe, perorare; ſi nempe, quæ, dum in vivis erat, edidit eruditionis ſpecimina,

quæ-

quæque, mortuo, ſuperſint monumenta, receſenrem ſingula. Norunt hæc *Ætonenſes*, Norunt & *Mertonenſes*, quorum utrorumque Collegiis ſumma cum laude ſimul præfuit; imo *Oxonia* tota, & univerſa quidem Reſpublica literatia, norunt melius, quam ut mihi ſit opus ſigillatim illa repetendo ſingula immorari: eumq; ne poſteri penitus ignorare poſſint, hujuſce ſaltem diei & loci celebritas, & exercitia Mathematica, in omnia (ſpero) ſecula, ipſo jubente, continuanda, prohibebunt.

Taceo igitur, ſummam quam habuit Græcarum literarum peritiam, & cognitionem limatiſſimam; qua in re vix ulli, per univerſum terrarum orbem, ſecundus erat. Unde hic ſolus ſelectus fuit, qui Sereniſſimam Angliæ Reginam ELIZABETHAM in Græcis literis inſtituat; & deinde ab Auguſtiſſimo JACOBO Rege, dum novam Sacri Codicis verſionem Anglicanam parabat, accitus eſt *Savilius*, qui, cum aliis aliquot magni nominis viris, & linguarum peritiſſimis, operam hac in re navaret. Quod & ſumma cum laude præſtitit.

Sed & opera celeberrimi illius Græcorum Theologi, *Iohannis Chryſoſtomi* Antiocheni, ſumma induſtria, incredibili labore, & indefeſſis vigiliis, ex variis collatis exemplaribus Manuſcriptis reſtituta, ſuis tandem ſumptibus immenſis, eleganti charactere, excuſa edidit.

Egregium etiam illud *Bradwardini* opus (qui & ipſe aliquando fuerat Collegii *Mertonenſis* præfectus) quod, *De cauſa Dei*, inſcribitur, adverſus *Pelagium*, SAVILIUS noſter ex Manuſcriptis exemplaribus in publicam lucem protulit, & typis commiſit.

Præter autem illa in Theologia (cui tamen ipſe nomen non ex profeſſo dederat) magni moliminis

opera; ſe etiam aliàs præſtitit eximium virum, Hiſtoricum, Criticum, Philoſophum, Mathematicum. Veteres *Hiſtoriæ Anglicanæ* ſcriptores, ex ſitu & pulvere, quibus erant obſiti, in lucem edidit. *Cornelium Tacitum*, celebrem illum Romanorum Hiſtoricum, ſuis in eum annotationibus illuſtravit. Denique (ut alia prætercam) in re *Mathematica*, non modo Munificentiſſimus erat Patronus, ſed & egregius ipſe Mathematicus. Quod non modo *Prælectiones* ejus in *Euclidem* editæ teſtantur, ſed & varia etiam quæ ſuperſunt ſpecimina ipſius calamo exarata. Varios ſiquidem veteres Authores Græcos, propria ipſius manu tranſcriptos, ex partibus tranſmarinis huc adduxit, & in ſuorum Profeſſorum uſum reliquit. Suaſque ipſius in *Apollonium Pergæum, Eutocium Aſcalonitam, Claudium Ptolemæum*, alioſque ex veteribus, Annotationes habemus; ejuſque in *Ioſephi Scaligeri Cyclometrica* Animadverſiones; aliaque non pauca ſchediaſmata, acutiſſimi ingenii argumenta; quæ qui legerit, non poterit dubitare, illum & virum fuiſſe ſumme induſtrium, & ſummum Virum; atque in penitiora Matheſeos penetralia, & reconditiores receſſus penetraſſe. Adeo ut mihi quidem res omnino miranda videatur & ſtupenda ſumme; virum in omni literaturæ genere exercitatum, adeo tamen in ſingulis eminuiſſe.

Verùm hæc ego omnia neceſſe habeo ut taceam; aliaq; inſuper multa, quæ in ipſius laudes prolixe dici poſſunt: Ne vel gratiſſimam ipſius apud vos memoriam ſuſpicari, vel abuti videar, nimia digreſſione, patientia veſtra; ſi nempe præſentis immemor inſtituti, Virum, utut digniſſimum, potius ἐγκωμιάζειν, quam lectionibus Geometricis præfari vellem.

De

De rebus autem Mathematicis, & nominatim Geometria, cum verba ſim facturus; hæret aliquandiu ſuſpenſus animus, neſcius unde vel exordium ſumam, vel ubi finem ponam. Ampliſſimum ſiquidem campum apertum video; ubi ſpatiari, quantumlibet, licet; totum percurrere non licet. Si enim Matheſeos Originem, varioſque Progreſſus & Incrementa; ſi, quam utilis, dicerem, & neceſſaria; non ſolum ad diſciplinas reliquas commode perquirendas, verùm etiam ad inſignes rerum humanarum uſus innumeros, & propemodum infinitos; ſi, quanta perſpicuitate demonſtrationes inſtituat, quanta ſagacitate veritatem inveſtiget, quanta certitudine inventam probet, & quanta denique voluptate invenientis animum afficiat, vellem delineare: Non oratio unica, ſed multa potius volumina componenda; nec tam eſſet ad Clepſydram perorandum, quam in infinitum. *De Matheſi generatim.*

Originem ipſius ſi repetam; ad ipſa mundi principia neceſſe eſt recurram: neque enim ipſe Mundus, Mathematum uſum, antiquitate multum ſuperat. *Matheſeos origo & progreſſus.*

Author eſt *Joſepus*, jam olim, ante diluvium Mathematicas artes viguiſſe: Duaſq; memorat *Columnas Sethi*, lateritiam alteram, alteram lapideam; quibus utriſque inſcripſerat res Mathematicas jam tum inventas; eo nempe conſilio, ut, ſive igne ſive aquâ mundus periret prius, (Utramque enim perditionem præſenſiſſe dicitur,) earum ſaltem altera ſuperſit. *Ante diluvium.*

Sin illa *Ioſephi* relatio dubiæ cuiquam fidei videatur; non ideo tamen dubium erit, quin, & tunc dierum, Mathematum cognitio non obſcura fuerit. Patet illud vel ex artificioſo Numerorum uſu, & rebus apte computandis jam tum accõmodato. Numeros etiam reperimus, etiam ab ipſis mundi primordiis

 (prout

(prout in ætatum Patriarcharum Catalogo liquet) per Monadas, Decadas, Centuriaſque apte diſpoſitos; gradibus, ſcilicet, proportione decupla continue aſcendentibus; ne, inordinata Numerorum multitudine & ἀταξίᾳ, confuſus laboret calculus, vel quidem nullus omnino ſit. Quod, certe, neque temere, nec inartificioſe factum eſt: ſed, Arithmeticam tum cultam eſſe, ſatis indicat.

Eamque numerorum diſpoſitionem, non ut commodam modo, ſed ut abſolute neceſſariam, per omnia huc uſque ſecula continuatam, etiammum retinemus. Quanquam enim primis Arithmeticis, liberum erat, ſive decuplam, ſive aliam quamlibet proportionem ad placitum elegiſſe, juxta quam numerorum gradus diſpoſitos eſſe vellent: attamen, aliquam ſaltem eligendam eſſe, numeroſque neceſſariò gradatim diſponendos res ipſa clamat; niſi nullos omnino numeros eſſe vellent, vel ſaltem nullum eorum uſum. Si enim res miranda olim habita eſt, Cæſarem, aut quemvis alium, ſingulorum in toto exercitu militum nomina memoriâ retinere, recenſere, & ſua ſingulis applicare poſſe; cum tamen eorum in legiones, turmas, cohortes, & quaterniones diſtributio non parum adjumenti huic negotio contulerit: certe miraculi inſtar eſſet, aut plane impoſſibile, pluſquam decies centies millena millia numerorum nomina, eáque inordinata prorſus & independentia, recordari, intelligere, &, prout oportet, applicare. Hanc enim unam numerorum nomenclaturam callere, plus eſſet negotii, quam omnes omnium linguarum voces ediſcere..

Quiſquis igitur fuerit, ſive Adamus ipſe, ſive quiſpiam alius ætate prima natus, qui primus infinitam numerorum multitudinem in ordinem digeſſit, eóſq; quaſi in tribus & familias ἐντέχνως diſponendo

ἀτα

ἀταξίαν ſuſtulit, certe digniſſimus eſt qui magnus habeatur Arithmeticus, & πρωτομαθηματικός: ſive etiam nondum lapſus Adam, quum ſua ſingulis creaturis impoſuit nomina, ſua etiam numeris impoſuerit, debito interim ordine diſtributis: ſive denique Deus ipſe Optimus Maximus, quum Adamum Grammaticam docuit, docuerit etiam & Arithmeticam; fueritque tam loquendi, quam numerandi habitus, ipſi a Deo immediate infuſi, qui tamen aliis poſt illum hominibus præceptis & crebris actibus ſunt acquirendi: ſaltem, utcunq; numerandi peritiam ætate prima non fuiſſe incognitam, abunde liquet.

Nec minus dubitandum eſt, Arithmeticæ Geometriam adjunctam eſſe. Partim quod menſurarum omne genus neceſſitas videatur id poſtulare; partim etiam quod, numeris ſemel intellectis, non adeo difficile ſit eos menſuris applicare.

Atq; hoc ideo præſertim videtur affirmandum, quod Inſtrumenta etiam Muſica, Metallorum notitia, & fabriles operæ, non ita multo poſt, a *Caini* poſteris ſint inventa; authoribus nempe *Iubale*, & *Tubal-Caino*. Quorum ſi illum *Apollinem*, hunc *Vulcanum*, poſtea dictos eſſe dixerimus, a vero fortaſſe non aberrabimus: Neq; enim eorum vel nomina vel inventa ſunt prorſus abſimilia. Nam *Iubalis* inſtrumenta Muſica, cum *Apollinis* Lyra, ſat apte concordant; & *Tubal-Caini* fabrilia, *Vulcano* Fabro, commode applicantur.

Utriq; vero, Arithmeticæ ſcilicet & Geometriæ, *Aſtronomiam* etiam adjunctam eſſe, ex annorum, tunc temporis Menſiumq; calculo, ſat innoteſcit. Qui Solem enim, & Lunam, reliquaq; Sydera, ad dierum, annorum, menſiumq; diſcrimina, conſtituit Deus, noluit hæc temporum indicia diu ignorari.

Erat igitur univerſa Matheſis, quoad præcipuas ſaltem ipſius partes, etiam tunc exculta; gradatim tamen ſuccedentibus ſeculis perficienda. Adeoque poterit cum diſciplinis reliquis, ſi non omnibus, pleriſque ſaltem, de primatu contendere.

Poſt Diluvium.

Sed neque diluvio extinctus Matheſeos ardor; nec ipſa ſuccedentibus ætatibus deferbuit: ſed, ſive *Noachi* arcâ conſervata, ſive deinceps poſtea exſuſcitata, viguit magis.

Apud Chaldæos.

Apud *Chaldæos* ſiquidem, poſt Diluvium, primo floruiſſe creditur; deinde & apud *Ægyptios*, (unde in *Græciam* tandem, *Italiam*, aliaſque mundi partes eſt allata:) cum hoc tamen diſcrimine, *Chaldæorum* Aſtronomia, *Ægyptiorum* Geometria, præcipue celebrata eſt.

Chaldæos jam olim rebus Aſtronomicis operam dediſſe, teſtantur Obſervationes illæ Cæleſtes, quæ, (Alexandro victore,) a Caliſthene, ad Ariſtotelem, Babilone dicuntur allatæ; annorum ſcilicet mille nongentorum & trium; hoc eſt, ab ipſo circiter Diluvio ad Alexandri tempora continuatæ, ut ex calculo Chronologico ſatis liquet: Nec enim multo plures anni a Diluvio ad Alexandri tempora elapſi fuerant.

Sed &, in ſacris Scriptoribus, Chaldæorum, non modo peritiam Aſtronomicam, ſed & ſuperſtitionem Aſtrologicam, notatam legimus; quo minus dubitare liceat, artes Mathematicas apud illos antiquitus floruiſſe.

Apud Ægyptios.

Nec etiam multò ſeriùs ad Ægyptios delata eſt Mathematum cognitio: ſive enim ab *Abrahamo*, prout nonnullis videtur, ſive a quopiam alio ex Chaldæis Magiſtro, edocti; ſive etiam ipſa rei neceſſitate coacti fuerint: certum eſt Menſurandi peritiam non ſerò ad illos appuliſſe. Averſus enim notiſſimas inundatione

undationes Nili, vix efficacius ullum adhibuere remedium, quam quod Geometriæ beneficio obtinebant: diſpertitis nempe Geometrice terris, quas undarum injuria confuderat, & reſtitutis agrorum emerſorum limitibus, quos ſubmerſio ſuſtulerat, quo melius ſua ſingulis diſtribuantur.

Atque hinc fortaſſe factum eſt, quod tota menſurandi ſcientia *Geometriæ* nomine indigetetur, quoniam Gæodeticis præſertim menſurationibus applicata; nomine nempe totius, συνεκδοχικῶς, ab inſigniori quâdam ipſius parte, mutuato; quæ *Pantometria* non minus recte dici poſſet, vel ſimpliciter Μετρική. Neque enim terræ magis, quam cuiquam alii vel ſpatio, vel corpori, menſurando convenit: agit enim de Magnitudine, ſeu Quantitate continuâ, abſtracte & ἁπλῶς conſideratâ, adeoque cuilibet ſubjecto capaci pariter applicabili. *Geometriæ nomen unde.*

Quæ autem de Ægyptiorum Geometria diximus, non ita dicta velim exiſtimetis, acſi aliarum Matheſeos partium rudes eſſent: ſed quoniam neceſſitate rei coacti, ea præcipue uſi ſunt; quò meliùs Nili injuriis obveniatur: (pari ſcilicet neceſſitate, ac illa quæ Phœnicibus incubuit poſtea, Arithmeticam excolendi; quò felicius nempe ſuccederet mercatura.) Cum enim fuerint Ægyptii Geometriæ periti, Arithmetici calculi ignaros eſſe, ſine quo Geometria practica parùm procederet, nòn eſt exiſtimandum. *Phœnices Arithmeticam excoluerunt.*

Nec etiam Aſtronomiæ rudes cenſendi ſunt: cum enim ὀνειρομάντεις fuiſſe conſtet, adeoque Divinatricis ſive artis ſive impoſturæ ſtudio deditos: non credendi ſunt cœleſtia φαινόμενα, quorum ſive uſus ſive abuſus apud ejuſmodi ſciolos maximus eſſe ſolet, inobſervata præteriiſſe. Quod ideo quidem minus credendum eſt; quia, & regio ipſa, ob perpetuam cœli ſerenitatem, adeo cœleſtibus obſervationibus eſt accommoda,

ut nulla magis: Et Chaldæos, a quibus hujuſmodi artes didiciſſe creditum eſt, Aſtrologiæ fuiſſe peritos, abunde liquet; unde non minus Aſtrorum cognitionem, quàm cognatas artes, hauſiſſe commode potuiſſent: Imo & vicinos Arabes aſtra notaſſe & nominaſſe, ex hiſtoria Jobi liquidò patet; quem Arabiæ vel incolam vel vicinum fuiſſe, & Patriarcharum temporibus Ægypto commorantium vixiſſe, vix dubitandum eſt. Nec interim tota hæc Ægyptiorum doctrina vel futilis erat, vel ſuperſtitioſa; cum Moſen ipſum illorum diſciplina imbutum legimus, nec tamen ideo culpæ inſimulatum.

Verum jamdiu apud Chaldæos & Ægyptios morati ſumus, (diutius fortaſſe quam opus erat,) ut Matheſeos originem, & antiquiores progreſſus inveſtigemus. Fatendum autem eſt, in toto illo temporis decurſu, quo apud illos Matheſis morata fuerit, vix inſignem aliquem perfectionis gradum adeptam eſſe: ſaltem, niſi forte, vel invidioſa illorum reticentia, quâ inter arcana Sacerdotum myſteria etiam res Mathematicas occuluerunt; vel injuria temporis, etiam aliis diſciplinis inimica, eorum inventa oblivioni dederit, quò minus ipſorum peritia poſteris innoteſcat.

Apud Græcos. Ad Græcos tandem Matheſis tranſmigravit: quo etiam feſtinat Oratio noſtra. Eam nempe Thales Mileſius in Græciam primus adduxiſſe creditur; quam Pythagoræ ſubinde Schola, Platonis Academia, Ariſtotelis Lycæum, multique his edocti magiſtris, foverunt, excoluerunt, auxerunt indies. Quod eo quidem ſucceſſu factum eſt, ut paucis annorum centuriis ſub illorum auſpiciis plus floruerit Matheſis & ampliores progreſſus fecerit, quam per omnia ſecula ſuperiora; ne dicam etiam & ſubſequentia, ſi ſaltem ducentos jam proxime elapſos annos eximamus. Teſtatur illud numeroſa Græcorum Mathematicorum cohors:

inter

inter quos, præter ſuperius nominatos, etiam Hippocrates Chius, Archytas Terentinus, Leo, Theudius, Eudoxus, Euclides, Eratoſthenes, Archimedes, Hipparchus, Apollonius Pergæus, Cteſibius, Hero, Geminus, Soſigenes, Ptolemæus, Pappus, Diophantus, Serenus, Proclus, Theon, aliique multi quorum ne quidē nomina recenſere licet. Quorum alii Theoremata & Problemata ingenioſe excogitarunt; alii methodice diſpoſuerunt, ἀποδείξεις addiderunt, quibus illuſtrarunt & confirmarunt; alii Mechanicis uſibus applicarunt; alii denique cælis, alii terris, alii aliis magis exercitati: vix enim ullo uſpiam ſolo, quam apud Græcos, Mathemata felicius floruerunt.

Neque ſtudia iſthæc Mathematica coluerunt tantum Græciæ Philoſophi plerique omnes; ſed inter prima eruditionum rudimenta poſuerunt; unde κατ' ἐξοχὴν Μαθήματα nominarunt. Grammatices enim ſtudio vix opus erat; cum linguâ vernacula peragebantur omnia: Rhetorices floſculos, antiquiores Græci minus curabant; ut qui res magis quam verba ſectabantur: Logicam etiam, quâ uſi erant, ipſo potius uſu, quam præceptis, addiſcebant: adeoque prima ſtudiorum principia in ipſis Mathematis ponebant; quique horum rudes eſſent, ut omnino ἀμαθητοὶ, ἀπαίδευτοι, & indocti prorſus habebantur.

Matheſis apud Græcos ante alias diſciplinas docebatur. Μάθησις unde dicta.

Hinc orta eſt illa Pythagoræ φυσιογνωμόνησις, quâ, inſpecto vultu, judicium primo fecit, an Mathematum capaces eſſent, qui ipſius ſcholam adire vellent; nequis ἀμαθητὶς, ἀπαίδευτὶς intraret, ſtudiumque male collocaret. Haud ſecùs & Plato affixo programmate prohibebat μήτις ἀγεωμετρητὶς εἰσίτω: Xenocrates poſtea quendam repulit, Mathematum ignarum, ne ſui auditor eſſet, ut qui Anſas Philoſophiæ non habuerit: τὰς λαβὰς inquit, φιλοσοφίας οὐκ ἔχεις. Nec multo ſecius Ariſtoteles feciſſe creditur; qui & Mathematica mul-

 ta

ta ſcriptis aliis immiſcuit, & libros etiam Mathematicos conſcripſit; licèt eorum non pauci injuria temporis perierunt.

Matheſeos neglectus.

At heu! quam noſtræ Athenis illis longe diſpares! Ubi, ſi Pythagoræ φυσιογνωμόνησις, Platonis Programma, aut cenſura Xenocratis obtineret, ut ἀγεωμέτρητοι omnes exſularent, certe exiguus ſupereſſet Philoſophorum numerus. Studia nempe Mathematica, quæ primas olim obtinebant, vix nunc dierum (neſcio quo malo fato) apparent uſpiam: acſi hodierni Philoſophi Cynicis mallent & Epicuræis accenſeri, quibus fere ſolis erat Matheſis neglectui; quam Pythagoricis, Platonicis, aut Ariſtotelicis, quibus & curæ fuit & delectationi. Imo vero res Mathematicas ad Philoſophiam non pertinere, arbitrantur hodierni quales quales Peripatetici, cum tamen erat ipſe Σταγειρίτης egregie Mathematicus: quod ipſi ſive negent, ſive neſciant, ſaltem diſſimulant.

Verum fatendum ingenue quod res eſt. Ex quo Athenis migrarunt ſeveriores Muſæ, vix uſpiam firmas poſuere ſedes, ſed vel errare coactę vel deliteſcere.

Matheſis Romæ neglecta.

Romani nempe, quanquam Grecorum literaturę hæredes habiti, pro florido quo erant ingenio, potius quàm ſolido; dicendi potius copiâ & verborum ornatu, quàm rerum pondere & argumentorum acumine delectati; Rhetoricâ magis quam Logicâ inſtructi; orationis potius quam rationis Magiſtri; leviores Muſas amplexi, ſeveriores omnino inſalutatos pręteribant. Grammaticam ſcilicet, Rhetoricam & Poeticam ornare ſatagunt: Philoſophiam interim, Medicinam, & rerum pręſertim Mathematicarum ſtudia miſſa faciunt; Condendis carminibus, componendis orationibus, rebus forenſibus agendis apti, ut & Hiſtoriis conſcribendis; Verum ſi apud illos Philoſophiam aut Matheſin quęſitemus, omnino fruſtra ſumus;

Exceptis

Exceptis enim, quę apud Ciceronem & Senecam occurrunt pauca, Philoſophię quidem parum, Matheſeos vix quicquam occurrit uſpiam: Niſi forte quòd Architectonicâ uſi fuerint.

Verum quidem eſt, Julium Cæſarem annum reformaſſe, *Julianum* deinceps dictum, & Calendarium Romanum inſtruxiſſe: At illud Græci Soſigenis ope factum eſt, aliunde advocati; nec enim Romanorum quempiam huic negotio parem legimus.

In Arabiam tranſiit.

Romæ vero nimium neglecta Matheſis, ut & Philoſophia reliqua, in Arabiam deflexa eſt; hoſpitium nempe apud Arabes nacta, ſi non quo floreat, ſaltem quo deliteſcat. Græcorum enim depoſita conſervârunt potius, & tandem reddiderunt, quam auxerunt. Quamquam & eorum ſtudia, minime contemnenda, non ingrati agnoſcimus: quorum non obſcura veſtigia in multis rerum Mathematicarum nominibus etiamnum retinemus. Hinc puncta *Zenith* & *Nadir* nominata; circuli item *Almicantri* & *Azimathani* dicti; & ipſa Sinum appellatio, ut taceam *Algebræ* & *Algorithmi* nomina, & ipſum *Almanach*, & ſiqua ſunt ſimilia, quæ Arabiſmum ſonant. Qui autem Arabum hiſtorias paulo accuratius inſpexerit, varioſque inter illos tum Matheſeos tum aliarum diſciplinarum egregie doctos notaverit, rem illam extra omnem dubitationis aleam poni haud dubitabit.

In Europam rediit: incrementa multa nacta eſt.

Poſtremis autem hiſce ſeculis jam tandem redux, Matheſis gratiori hoſpitio in variis Europæ partibus excepta eſt; fautores egregios nacta. Quorum indefeſſis vigiliis, & ſumptibus haud exiguis, progreſſus & magnos quidem, & non ſperatos, fecit. Exſurgit ſiquidem, quaſi ex alto ſopore exſuſcitata; ſeu potius, ut pridem quaſi ſemimortua, jam reviviſcit: nec reviviſcit tantum, ſed quaſi vegetum vigorem recens

 adepta,

adepta, in ſingulis quidem ipſius partibus & aucta multum & ornata incedit.

Arithmeticam ſi ſpectemus; fractionum ad partes decimales reductio, laborioſo calculo ſenagenario multo facilior eſt & expeditior: Et mirandum illud Logarithmorum inventum, egregium attulit calculo ſublevamen; ut alia minora taceam.

Geometriam quod attinet: Doctrina Sinuum, Tangentium & Secantiũ, fere tota nova eſt; quâ Trigonomtriæ calculus maxime ſublevatur. Et præter varia Theoremata de novo inventa, ipſa inveniendi methodus multum facilitatur. Algebræ nempe, ſive Analitices uſus, ultra quam qui veteribus innotuit, jam innoteſcit.

Aſtronomia, eximiis inventis inſtauratur; non tantum novis ſyſtematis, ſed & novis φαινομένοις repertis. Quis enim veterum vel circum-Joviales planetas? vel Solis maculas? ejuſve motum circa proprium axem? vel cometas etiam, ſive novas in fixaru regione ſtellas, obſervavit? Quis item Veneris aut Mercurii cornua? Saturni anſulas, & figuram ovalem? aut Jovis faciem undulatam? ipſoſque Lunæ montes, & valles, inæqualiter aſperam ſuperficiem notavit unquam? Et (ut alia levioris momenti tranſeam) Ars ipſa nautica, Aſtronomicis ut plurimum principiis fulta, præter ſtupendum magneticæ pyxidis uſum, variis tum inventis tum inſtrumentis locupletatur.

Non ideo tamen mirum videri debet, aut Græcorum induſtriâ quicquam derogatum iri, ſi multa veteribus incognita noſtræ ætatis Mathematici inveſtigârint. Multo enim facilius nobis eſt ipſorum inventis addere, quam ipſis primitus invenire. Præſertim cum ſtudia nunc liceat, Typographiæ beneficio, per totam Europam communicare, quæ tunc dierum quaſi unis erant Athenis concluſa.

Verum omnino excitandi eſtis, Academici, & hortandi ſerio, ut hiſce rebus animum applicetis ſedulo; nec patiamini, ut veternum rebus mathematicis aut denuo obrepat, aut diutius incumbat.

Παρόρμησις ad Matheſeos ſtudium.

Si, quorſum hæc? quæratis; aut cui bono? Quanquam ea vox Academicis omnino eſt indigna; mihi tamen erat in animo pluribus ei, quam nunc licebit, obviam ire. Sed anguſtia temporis illud prohibet; Ne nimio vobis tædio ſim moleſtus.

Quin Mechanicos conſulite, ſi neſciant Academici, alioſque ex vulgo ſive operarios ſive negotiatores, Numquis rerum Mathematicarum uſus? Conſulite Mercatores, numquis plane ἀναρίθμητος eorum ratiocinia curare poſſit? Interrogate nautas, numquis Geometriæ, Aſtronomiæ, Geographiæ plane rudis, navigia poſſit de portu in portum ducere? A Latomis item & Architectis ſciſcitemini, numquis ἀγεωμέτρητος ſuperbas ædificiorum moles, turrita palatia, & arcuata laquearia, Geometrice (ut loquuntur) ad ſtuporem vulgi ſuſpenſa, ædificare? Dicant vel fabri, numquis normæ, libellæ, aut circini uſus? Sed & milites percontari liceat, numquis Matheſcos uſus ad arces & oppida munienda, caſtra ponenda, tormenta bellica commode regenda, aliaque multa militaria peragenda? Reſpondeant ipſi Siracuſani ut cætera taceam, num non Archimedis rerum Mathematicarum peritia uſui fuerit, Siracuſis ipſis propugnandis?

Ipſius utilitas & neceſſitas.

At, Quorſum hæc omnia? dicitis Academici. Tractent fabrilia fabri: Quid ad nos iſtæc, qui mechanici neque nunc ſumus, nec aliquando futuri? Qui nec inſtrumenta bellica facturi unquam, nec ædificia? Itane, vero Academici? Adeone veſtrâ nihil intereſt ea ſcire, quæ non aliquando facturi eſtis? Ideone Deus *Os homini ſublime dedit, cœlumque videre, Juſſit,* --- ut ea tantum contempletur quæ poſſet ipſe condere?

Academicorum intereſt Mathemata callere.

Num

Nam libri de Cœlo, de Mundo, de Animalibus, aliis rebus naturalibus, omnino indigni ſunt quos legat Philoſophus, niſi hæc omnia poſſit efficere? Apage vox illa! Philoſopho indigna! cujus illud eſt, ea ſcire quæ Deus ipſe condidit, quæque vel Ars vel Natura poſſit efficere. Quem melius deceat Chremetis illud Terentiani, quam Chremetem ipſum, *Homo ſum, nihil humanum a me alienum puto.*

Sed ut ſerio agamus, Auditores; unde eſt quod hæc efficiat Mechanicus operator? Nonne quia Philoſopho Mathematico edoctus? Ea nempe quæ Mechanicus efficit, non niſi Philoſopho dictante facit. Altioris ſiquidem ſcientiæ munus eſt, ea docere & intelligere, quæ ipſi operantur: Prout minoris artis eſt, admoto pollice barbita pulſare, quàm concentum muſicum ἁρμονικῶς depingere. Horologium puta ſciotericum depingit forte ſive Pictor ſive Cæmentarius; ſed præſcribente Mathematico: Haud ſecus ac medicamina componit Pharmacopœus, ſed dictante Medico. Nec minus intereſt Philoſophi, μαθηματικῶς & intelligere & demonſtrare; quam Mechanici χειρουργικῶς operari. Adeoque indignum eſſet Academicis, ſi in opificum potius Mechanicorum officinis, quam Philoſophorum ſcholis, Matheſeos cognitio quærenda foret.

An vero tantę laudis eſt, dicetis forſan, ea ſcire quæ nec mechanicis ſunt aliena? Demus, ſi placet, non eſſe; (nec concedamus tamen:) At multa ſunt, quæ ſcire, non eſt magnæ laudis, cum ea tamen neſcire, non parvi ſit dedecoris. Non magnæ laudis eſt, virum Academicum Latine poſſe & intelligere & loqui, at magni eſt dedecoris, non poſſe.

Matheſin ignorare non leve dedecus.

Exemplo ſit illud Julii Scaligeri; (ut de Joſephi Cyclometricis nihil dicam;) qui non modo ſibi, ſed & aliis non paucis, videtur magnus. Cùm Cardanus arguerat

Julius Scaliger Matheſeos ignarus

arguerat ſive Cometas, ſive Novas Stellas, Luna ſuperiores apparuiſſe, quod minorem habuerint Parallaxin; Ipſe, aſſumptione conceſſa, ſequelam negat; Cometæ Parallaxin ratus, non ex locali ipſius poſitione, ſed ex ſuperioris cujuſdam ſive planetæ ſive ſtellæ motu pendere poſſe. Quæ perinde abſurde ſonant Mathematicis auribus, & inconcinne dicta ſunt, ac ſi Diem tunc eſſe neget quum Sol meridianâ luce fulgeat: Adeoque, turpiter titubando, inſignem prodidit Matheſeos imperitiam; ut qui dignior eſſet a præceptore diſcere, Quid ſit parallaxis; quam de rebus cœleſtibus diſputare: eoque nomine apud viros doctos, nec ſemel quidem, nec immerito vapulat. Julius ſiquidem Scaliger, pro more ſuo, ſatis pro imperio Cardanum tractans, Cardano negare quidlibet ſibi licere ratus eſt; adeoque ſat amplam ſibi negandi anſam videtur nactus, ſi Cardanus affirmaverit. Atque hoc quidem in rebus mere Phyſicis, magis impune feciſſe poſſet; ubi in utramque ut plurimum partem probabili ſaltem argumento, diſputare licet. Non ita tamen in Mathematicis; ubi veritas ſemel cognita extra dubium protinus collocatur; errores interim tam manifeſto deteguntur, ut nulla quidem ſuperſit vel pretextus larva.

Nec leve illud Ovidii σφάλμα: dum, diurnum Solis motum, Phaetonte duce, deſcripturus, per ſingula Zodiaci ſigna tranſire fingit: motum nempe Solis Diurnum & Annuum temere confundens. Quod indicio eſt, ipſum ſuos ipſius Faſtorum libros vix ſatis intellexiſſe: & Romanorum potius Calendarium, quam cognitos Syderum ortus & occaſus, ſuis carminibus deſcripſiſſe. *Ovidii σφάλμα.*

Verum feſtinandum eſſe video: metuo enim ne jamjam fuerim in patientiam veſtram injurius nimis. Ideoque quæ dicenda ſuperſunt multa, quibus Ma-

theſeos ſtudia ſuadere poſſem, intacta prorſus præterire neceſſe habeo.

Matheſeos utilitas ad alia perdiſcenda.

Hoc ſaltem addam: Mathematum ſtudia non modo pro ea quam in ſe habent veritate colenda eſſe, (quæ tamen ipſa, per ſe conſpicua, & ultra Scepticorum litigia poſita, animum reficiet valde & oblectabit;) ſed & quod rerum aliarum cognitioni, nec id uno quidem nomine, conducant multum. Præterquam enim quod in aliis diſciplinis paſſim occurrant multa, quæ citra Matheſeos opem nullatenus intelligenda ſunt: variaque quotidie, ex Matheſεως cultura, Philoſophiæ Naturali accedant incrementa: Illud interim non eſt exiguum; Matheſεως ſtudio paratum animum, aliarum diſciplinarum capaciorem reddi, rebuſque aliis tum apprehendendis tum judicandis longe paratiorem. Haud ſecus ac veſicas nonnunquam, animalium corporibus exemptas, flatu diſtendimus & exſiccamus, quo fiant rebus aliis commode continendis aptiores. Sive liceat potius cum Verulamio comparationem inſtituere; qui ſcientias Mathematicas cum luſu pilæ in ſphæriſterio confert. Ubi præter ipſum exercitationis bonum, quod per ſe intenditur, etiam εὐκίνητον σῶμα, (ut cum Hippocrate loquor,) membrorum nempe agilitas, oculorum attenta προσοχὴ, totiuſque corporis geſtus decorus, aliaque ſubinde commoda, ex accidenti conciliantur. Pariter & Matheſis, præter ipſam Mathematicæ veritatis cognitionem, habet & alia commoda, eaque non exigua, [quaſi adnaſcentia.] Nec enim aptius occurrit remedium, quo phantaſia mobilis attentior fiat, quo ingenium volatile reddatur fixum (ut Chymicorum verbis utar,) quam ſi Mathematicarum demonſtrationum compedibus coerceatur. Vix item maturo magis judicio quiſpiam, quam qui rebus hiſce exercitati, vel ſophiſmatum fallacias

Matheſis ingenium acuit.

felicius deteget, vel ſyllogiſmorum vires juſtamque ſequelam aſſequetur.

Verùm ego non parum metuo, ne ſuada noſtra ad perſuadendum vix ſatis valeat: adeoque Mathematum ſtudia, quæ digna quidem ſunt (Academici) quæ amplectamini, etiamnum nimis neglectui ſint futura.

Sin minus valuerit Oratio noſtra, (quæ fortaſſe non adeo eleganter vel artificioſe eſt elaborata, ut multum valere poſſit:) utinam ſaltem periculum facere dignaremini, ipſaque Mathemata cominus tractare: ut vel voſmet ipſi, experimento tandem edocti, judicium hac de re poſſitis experti ferre. Neque enim vos ipſos aliquando iniquos me habiturum judices, abunde confido.

Quod ego interim non pro forma tantum, Rhetoricantium more; ſed ſerio quidem & animitus opto: ut quod ſiquando feceritis; nec laboris impenſi, nec temporis, ſpero, quaſi malo collocati, pigebit unquam. Ea nempe res Mathematicæ dulcedine & ſuavitate delectant ambientis animum, quam ſiquis Rhetorico ornatu deſcribere fatagat, quaſi ad vivum ſe poſſe delineare ratus, omnino fruſtra eſt. Haud ſecus enim hac in re contingit, ac ſiquis de Mellis dulcedine judicium laturus eſſet: quæ quanta ſit, vel uno guſtu melius perdiſcet quis, quam Rhetoris, utut facundiſſimi, deſcriptione. Et Mathemata pariter, ipſo quidem quaſi contactu potius, quam indicatu, docent, quam ſint delectabilia. Nativa nempe ſua ipſorum pulchritudine, quam penecillo licet peritiſſimo depicta, videntur venuſtiora.

Siquis autem difficultatis incuſet, & perobſcura queratur ſtudia Mathematica: Quanquam illud quidem non prorſus inficias eam; Tamen --- *eſt infamia vero Major* --- Præter enim ipſum aſpectum primum, & frontem quaſi ſubtetricam, cætera quæ ſuperſunt

Matheſeos obſcuritas non tanta quanta vulgo creditur.

ſuperſunt non tam terrere comperta ſunt, quam oblectare? Quodque ipſum, aggreſſuris, videtur prima fronte formidabile, illud, aggreſſis, & dulce ſatis compertum eſt & volupe; Ipſiq; qui ſubſequuntur labores ſuaviſſimis adeo delectamentis condiuntur, ut neſciam an Labores illi, an Voluptates, haberi mereantur. Sunt enim & luſus ipſi nonnunquam ſatis laborioſi, quæ tamen oblectamenta potius quam gravamina exiſtimantur. Adeoq; qui ad Matheſin requiritur ſive mentis labor, ſive attentus animus, non niſi, ut condimentorum acrimonia, appetitum potius excitat, quam palatum offendit.

Quicquid autem illud ſit difficultatis quæ Matheſin comitetur, quodque aſperum occurrit, conabor ego ſecuturis (Deo volente) prælectionibus, quanta quidem poſſum facilitate alleviare. Interim, ne ἀεὶ μετρικῆς ἀμέτρως dicam, orata prius læſæ patientiæ veſtræ venia, conticebo.

DIXI.

Johannis VValliſii, S S. Th. D.
GEOMETRIÆ PROFESSORIS
SAVILIANI in Celeberrimâ
Academia OXONIENSI;

MATHESIS UNIVERSALIS:

SIVE,

ARITHMETICUM OPUS INTEGRUM,

Tum Philologice, tum Mathematice traditum;
Arithmeticam tum *Numeroſam*, tum *Specioſam*
ſive *Symbolicam* complectens, ſive *Calculum*
Geometricum; tum etiam *Rationum* Proportionumve traditionem; *Logarithmorum* item Doctrinam; aliaque quæ
Capitum Syllabus indicabit.

OXONII,
Typis LEON. LICHFIELD Academiæ Typographi,
Impenſis THO. ROBINSON. *Anno* 1657.

Inſigniſſimis Doctiſſimiſque Viris,

D. GERARDO LANGBAIN, *S. T. D.*
Collegii Reginenſis, Oxoniæ, Præpoſito.

D. HENRICO WILKINSON, *S. T. D.*
Præbendario Ædis Chriſti.

D. JOHANNI WILKINS, *S. T. D.*
Collegii Wadhamenſis Cuſtodi.

D. JONATHANI GODDARD, *M. D.*
Cuſtodi Collegii Mertonenſis.

JOHANNES WALLIS, Geometriæ
Profeſſor Savilianus,
S.

CUM quæ in publicum prodeunt, pro more ſcilicet (eoque ſatis inveterato) nonnullis inſcripta ſoleant prodire; neq; mihi quidem a recepto illo more jam recedendum plane videatur; Ex reliquis, quos & amo & veneror Collegiorum Præfectis, aliiſque apud nos ſummis in omni eruditionis genere viris, veſtra libuit, Viri Inſigniſſimi, nomina ſeligere, quibus qui ſequitur tractatum duxerim inſcribendum. Quod quidem eo conſilio factum eſt, ut, cum

pro

præ ipſorum reliquis (plerîſque ſaltem) Vos maxime ſtudiis hiſce Mathematicis indulgeatis, ſive etiam incumbatis: eadem opera tum meos in vos affectus & obſervantiam teſtari poſſim, tum ſequentis etiam operis rationes breviter aperire.

Hoc autem quicquid eſt negotii eo potiſſimum fine ſuſceptum eſt, ut huic quam ſuſtinere datum eſt provinciam, non modo non deeſſe penitus videar, ſed & eam ornare potius, pro viribus noſtris, & quo defungor munus adimplere. Quippe, cum hoc ſibi animo fuiſſe propoſitum, Eques Honoratiſſimus, idemque munificentiſſimus Patronus, D. HENRICUS SAVILIUS, *eximius ſui temporis Mathematicus, ſtatutis ſuis ſatis teſtatur; ne mera nomina ſint Profeſſoris ſui, ſed qui ſtudia Mathematica ſedulo promoveant: Id mihi maxime viſum eſt incumbere, ut juſtiſſimis votis ſuis quantum in me eſt ſatisfaciam, nec nudo contentus titulo, Matheſeos ſtudia vel promovere ſatagam, vel adjuvare.*

Atque in hunc finem, præter aſſiduas prælectiones publicas, & privatas eorum qui hoc deſiderant inſtitutiones, omnino expedire videbatur, ut univerſalem hujuſmodi Calculi traditionem publici juris facerem, qui non tam ſpeciatim Arithmeticam, quanquam & hanc etiam, quam totam Matheſin ſpectet. Ex quo enim in Matheſin introducta eſt, quæ dicitur, Arithmetica Specioſa, *ſive* Symbolica, *vel (quod aliis etiam audit)* Calculus Geometricus, *aut etiam (forte omnium optime)* Matheſeos Univerſalis principia, *(quippe ut tota Rationum traditio, ita & hujuſce Calculi exercitium, indifferenter omnes Matheſeos partes reſpicit;) ex quo, inquam, hæc introducta eſt;* Vietæi, Oughtredi, Harrioti, Carteſii, *aliorumq; magni nominis virorum, ope; quam ingentes fecerit profectus Matheſis univerſa, nemo hiſce rebus vel leviter*

exercitatus

exercitatus ignorare poſſit. Quod autem ego, poſt tot eximios qui in hoc negotio præceſſere viros, rem hanc aggrediar; non eo factum eſt animo, ut eorum laboribus quicquam ego derogatum velim; ſed quod non ita rem hactenus abſolutam putaverim quin & mihi pariter, quod poſt illorum meſſem colligam, etiamnium ſupereſſe putem ſpicilegium.

Et quanquam eorum pars magna, quæ nunc proferimus, Auditoribus noſtris jam publicis fuerint prælectionibus expoſita. Attamen, cum nec eoſdem plane auditores continuis ſemper prælectionibus adeſſe, res ipſa clamet; & quidem, ſi adeſſent, non eâ tamen valeant memoria, ut non ſæpe ad ea quæ præceſſerunt reſpicere ſubinde opus habeant; quid, quod & hujuſmodi ſtudia non ea ſint quæ auditione prima ſatis imbibantur, ſed attentam inſuper mentem poſtulent, & contemplationem, qua penſitemus ſerio, & dictis immoremur: Haud importunum fore autumo vel ipſis qui hæc audiverint, nedum aliis, ut & oculis eadem ſubjecta habeant, quo & ea perſentiſcant altius, & ſeriis, hiſce, cogitationibus aſſueſcant.

Rem ipſam quod atinet; non eſt ut nova hic expectetis omnia; ſed neque nulla tamen. Numerorum natura, ſaltem quoad integros jam olim erat veteribus probe nota. At calculus eorum perplexus admodum & intricatus, labore plane improbo abſolvendus: Et ſiquando ad integrorum particulas deſcendendum erat, ad ſcrupulos ſexageſimales confugiebant (qui integrorum inſtar habebantur) aut etiam ad Rationum doctrinam figuris lineiſve explicandam. Atq; hinc factum autumo, quod Rationum Doctrinam, quæ mihi quidem Arithmeticæ potius conſiderationis videatur (atque ad omnes plane Matheſeos partes perinde ſpectet,) ad Geometriam plane religarint; partem ſcilicet quod lineis facilius quam laborioſo illorum calculo res exigatur

igatur, partim etiam quod Arithmetices pomœria tam ſtricta fecerint, ut veris numeris (rationalibus ſcilicet, & quidem integris,) coerceantur, quibus tamen immenſos Rationum campos haud coerceri poſſe certum erat.

Poſtquam autem in Arithmeticam introductus eſt Notarum numeralium uſus, quæ Saracenicæ, ſeu rectius Indicæ, vulgo audiunt (ab Indis quippe in Arabiam, atque ad nos inde, delatæ;) tum incredibili ſtatim levamine facilior evaſit moleſti labor calculi, tum etiam Arithmetices pomœria inſigniter ampliata. Et quidem ex eo tempore, præter faciliorem integrorum calculum, acceſſit etiam ad Arithmeticam, Fractorum ſpeculatio, ſed & Surdorum deinceps numerorum.

Atque hactenus ubi perventum erat, revixit denuo, & quaſi ex poſtliminio revocata eſt, Veterum Algebra (nomen jam Arabicum ſortita) quæ (præter ea quæ apud Diophantum exſtant) jam altum obdormiverat. Quam hæc interea temporis ſortem apud Arabes nacta fuerat (qui tum Matheſin, tum alias item eruditionis partes alioqui perituras feliciter conſervarunt, & tandem reddiderunt) haud in promptu eſt ut dicam; ſub Cardani ſaltem, Tartalgæ, & Clavii temporibus redux facta, eorum ſcilicet aliorumq; jam proxime elapſi ſeculi laboribus ornata, apud Europæos ſedem fixit.

Ubi autem hæc redux veterum Algebra jam denuo excoli cœpta fuerat, atque ob jam receptas notas numerales expeditior facta; neque nunc Radicem primam *(quam vocant ſolummodo, ejuſque poteſtates,* Characteribus Coſſicis *inſignire ſolenne fuerat, ſed &* Radices ſecundas *literis Alphabeticis: hinc credo anſam arripuit primus acutiſſimi & ſagacis admodum ingenii Vir* Franciſcus Vieta, *non ignotas tantum quantitates, ſed & cognitas etiam, literis Alphabeticis inſigniendi, eamque*

que quam Speciosam *vocamus Arithmeticam, & Novam Algebram introduxit: quam deinceps* Oughtredus, Harriotus, Carteſius, Schotenius, *&c. auxerunt indies, & plenius excoluerunt.*

Sed & interea temporis, in Arithmeticam numeroſam partium Decimalium uſus (quæ ſexageſimalium ſcrupulorum vices inſigni præſtant compendio,) ſive a Regiomentano *ſive ab alio quopiam, ita ſenſim invectus eſt, ut quis ipſius fuerit primus Author vix (credo) ſatis conſtet. Atque inſuper* Logarithmorum *doctrina ab Honoratiſſimo* Johanne Neppero *(Merchiſtoniæ apud Scotos Barone) primitus excogitata, atque ab ipſo junctim cum* Henrico Briggio *(Geometriæ primum Profeſſore* Greſhamenſi *Londini, deinde* Saviliano *Oxoniæ,) recognita & penitus abſoluta, Multiplicandi, Dividendi, & Radices educendi laborem, incredibili plane compendio ſublevavit.*

Cum autem hoc adepta ſit faſtigium Arithmetica, variorum in ſuo cujuſque genere virorum eximiorum ope fulta; quod illi ſigillatim præſtiterunt, id mihi jam in unicum ſyſtema redigendi incumbit onus. Adeoque Arithmeticam (niſi Matheſin *potius* Univerſalem *malitis appellare) non tantum in* Numeris *ſpeciatim, ſive Integris ſive etiam Fractis; aut partibus tandem vel Decimalibus vel Sexageſimalibus abſolvendam: ſed univerſaliter in* Speciebus *etiam (uti dici ſolent) vel ſymbolis exercendam: hoc eſt, non Numeroſam tantum, ſed & Coſſicam & Specioſam Arithmeticam, ſum traditurus. Sed & Demonſtative omnia (quod tamen negligere ſolent Arithmetici plerique omnes,) ut & Arithmeticæ ſpeculativæ doctrinam, & praxeos item regulas tradam ex ipſis deductas principiis, continuis inde demonſtrationibus (utut breviter, perſpicue tamen,) ſtabilitas.*

Verum & Rationum item & Proportionum doctrinam, ad Arithmetica principia revocatam, jam ſua tandem ſede collocavi. Cum enim cousq; ſe dilatarunt Arithmetices pomœria, ut non contenta ſolis numeris, univerſum illud qua longe lateq; patet matheſeos ſubjectum, ſpecierum ope, ſuo jam comprehendat ambitu; & quantitates invicem tum Rationales dictas, tum Irrationales perinde reſpiceat: non eſt cur Rationum ſive proportionum doctrina univerſa, iiſdem ſe concludi cancellis patiatur; quæ quidem vix alio nomine, relictis Arithmeticis, in Geometricos olim fines recipi poſtulavit, quam quod Arithmetica dum veris numeris ſe concludi paſſa eſt, non agnoverit Rationes ullas quam quæ veris explicari numeris potuerunt.

Quod vero longiuſculis nonnunquam digreſſionibus expatiari videar, (nec tamen extra iſtius quod ſuſceperum negotii limites,) id data opera factum eſt, nec quidem uno nomine. Partim enim illud in lectorum gratiam faciendum videbatur, quo rerum varietate nonnunquam oblectari poſſint, & traditorum utilitatem vel ipſo uſu ediſcant: partim etiam (quod in toto hoc negotio mihi fuiſſe propoſitum non diffiteor) ut reapſe oſtendam etiam Geometrica Problemata (quatenus ſaltem a poſitione ſive locali ſitu abſtabunt) a principiis Arithmeticis vel maxime dependere; & quidem eouſque abeſſe ut ad Problemata ſive Theoremata pure Arithmetica ſtatuminanda (quod tamen non raro factum video) Geometricæ plane demonſtrationes ſint huc forinſecus advocandæ, ut contra quæ Geometrica habebantur, ſimplicius quidem & univerſalius ex pure Arithmeticis adeoque univerſalibus demonſtranda videantur.

Quod autem vel Philologica, vel etiam alia Philoſophica Mathematicis immiſcuerim; partem illud ad ſubjecti explicationem commodum videbatur, partim etiam ut

condimenti

condimenti loco, quò quæ, tyronibus præſertim, ſatis arida videantur facilius deglutiantur, a quippe qui Mathematicis forſan parum ante hac exercitati, diverticuli nonnunquam opus habeant ne continua mentis intentione nimiū defatigentur. In quorum item gratiam, fui ex conſulto in primoribus, prolixior & fuſior explicandis, quam in ſuccedentibus; quippe quod quibus primum aggreſſuris neceſſaria viſa eſt prolixitas, iiſdem ipſis quadantenus exercitatis non minus grata ſit futura brevitas.

Quod denique tardius aliquando prodeat tractatus ille quam ſperaveram (quippe jam ſecundus annus agitur ex quo prelo ſubjectus fuerit,) ne miremini, hoc faciet maxime, ſi ſaltem quibuſcum & quam perpetuis preli difficultatibus luctandum erat, ſatis intelligatis; præſertim tum apud Typographos hujuſmodi ſcriptis edendis parū aſſuetos, tum etiam non admodum inſtructo typographeo. Quippe hinc non raro factum eſt, ut nunc ob ſchematum, nunc characterum inuſitatorum, nunc etiam literarum inopiam, (quæ omnia non niſi Londino quoties res exigebat cum non exigua temporis jactura ſupplenda erant,) hærendum tum aliquandiu tum aliquoties fuerit. Et quidem eouſque, ut poſtquam hanc Partem Primam aliquatenus inchoaueram ſeponenda tamen ea plane fuerit, dum Pars ſecunda ſerius incepta (quæ jam ante annum prodiit) abſoluta fuerit. Sed & etiam interea temporis (præter opuſcula quædam Theologica emiſſa) bis occurrebat caſtigandus Hobbius Latine primum, Elencho meo in ipſum edito, quo ipſius in libro De Corpore ἀγεωμετρησία caſtigatur, & faſtus reprimitur; deinde & Anglice, obſcriptum ipſius Anglicanum conviitiis fartum, quo ſcurram agit, & omne genus λοιδορημάτων tum in me, tum in Collegam meum Virum Clariſſimum, ſpurciſſimo effundit ore; quod nempe ipſius arrogantiæ, inſcitiæ conjunctæ, uterque auſi ſumus contraire, nec eum

paſſi

paſſi ſumus tum Scholas tum Academias qua Veterum qua Recentiorum omnino omnes impune laceſſere, aut ſe vanum efferre, ſuamque ignorantiam cum profeſſô illorum omnium contemptu venditare : (& quidem tertio, ni fallor, caſtigandus adhuc, quippe quem audio iterum vel ſcripturientem vel ſcribillantem.) Nonnihil etiam attulit moræ, quod Marci Meibomii, de Proportionibus Dialogus, *ad examen etiam videbatur revocandus; quod in ſubjuncto huic Tractatu factum eſt. Quæ omnia, tum preli difficultates, tum tot interim aliorum librorum editio, ne & alia memorem negotia quibus multoties fuerim avocatus, non mirum eſt ſi nonnihil edendo huic tractatui injecerint moræ.*

Valete denique, Viri inſigniſſimi; & pergite, quod facitis, tum Academiam hanc celeberrimam, tum Rempublicam univerſam literariam, ſtudiis ornare veſtris & decorare.

Oxonii Dec. 20.
1656.

E R R A T A.

ORat. p.7. l.7. *fuerint:* p. 8, l.8. *ſive.* l.ult. *Adverſus.* p.13.l. 20. *ſinuum.* p.14.l.22. *valles,&.* p.16.l.2. *aliiſque.*

Arithm. p. 3.l. 15. *graduum.* l.ult.marg. *Aſtronomiæ.* p.6.l.32. *lineam.* p 16 l 34 *alia,* p 23 l. 15 'Εννεγώνια, p 27 l 2 *numerorum,* l 30 *immiſcentur.* p. 30. l. 11. *ſ & v.* l. 12 dele *ſine,* p 31 l 36 ἀπερδῶν, p 36 l 3 *neſcis,* p 50 l.13, 6000 100c. p 53 l ult. *adjungatur,* p 58 l 22 *ſiglas,* p 63 l 36 *ſcribantur,* p 65 l 36 *computando,* p 66 l 28 *eadem,* p 68 l. ult: *confugerint,* p 66 l pen: *magnitudinem quadrati,* p 73 l 30 *Geometria,* p 74 l 11 *qui,* l 33 *linea,* l 35 *millia,* p 76 l 32 + 3 *a,* p 77 l 37 *conceſſurus,* p 78 l 28 *ſignalo,* l.ult *manebunt,* p 85 l 3 *latius,* l 10 marg. *notiones,* p 94 l ult. *illum,* p 98 l 5 *collocate Tibi:*) l 14, 15 (*ſive a ſiniſtra ſive a dextra ordiamur*) *dependet ex noto:* l 21 *gradui,* p 103 l 27 *ſunt* — 1. p 105 l 1 *percipientur,* l 10 *deerant,* p 110 l 35 *reſtent,* p 113 l 5 *reliquus,* p 114 l 3 *ponendæ,* p 116 l 3. 73981. p 117 l 5 *completos,* p 125 l pen. *dicere,* p 131 l 17 πολλαπλάσιον, p 133 l 14 *exhibere dicendus eſt, hoc eſt.* l 27 *nempe quadratum,* l 34 *multiplicatione, laxiore,* p 134 l 19 *augeri,* p 140 l 28. 4722, l 36 *ſuas pedes,* p 144 l 6. 3 ∗ 3. ibid. — 1 + 1. l 15, 5 × 3, p 153 l 16 *poſſent,* p 154 l 22. 9×2, p 156 l 22 *diviſori* 32 *ſubſcribo,* p 162 l 12 *aliquando,* p 168 l 15. XIX. p 169 l 9. BA — BE = BX. p 170 l 10. 4BAq, l 13. 4B, p 171 l 9 a fine, *e,* p 173 l antepen: + *ae*², p 181 l 12 CD, p 191 l ult: *tum,* p 194 l 20 *rectam,* p 198 l 36 4+9+4+9, p 207 l 4 *Aq,* p 210 l 23 GH = CF, l 25 HD = FB) p 211 l 30 *Cap: XXII.*) p 213 l 36 *angulum rectum,* p 214 l 6,7 *obtuſangulum,* l 9 *quorum,* p 229 l 24 *ſuperat,* p 234 l 1 *tradidero,* p 238 l 26 *quod,* p 248 l 9 *Cap.* 33, p 249 col 1 l 12 *T per* 11, l 26 *T per* 4,11, col 2 l 3 *T per* 11, l 36 *X per* 9, p 252. *Latini,* p 254 l 34 *& ipſius,* p 259 l 15 *minimi,* l ult *ſint,* p 263 l 29 *huc;* p 264 l 28, $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{16}{81}$, l ult τετραπλασίονα λόγον ἔχειν, p 265 l 13 D = 8A p 266 l 4.5 √², l 28 *Proclo,* l 29 *Theoni Smyrnæo,* p 278 l 27 *valdeque,* l 33, *libuerit,* p 280 l 15 *nomine,* p 291 l 30 Rd = *R*²; *&,* p 279 l 14 *ut eſt.* l 24 :: BR)V, p 298 l 11 *n*) *N*, p 302 l 25 *demonſtrationem,* p 303 l 25 = V + p 307 l 18 *per pr.* 16 $\frac{V}{A}$, p 308 l 6,7 pro V)VA, lege $\frac{V}{A}$)V, p 309 l 10 *prop.* 56, p 311 l 4 *hic,* p 315 l 6 *T per* 11, p 317 l 21,22 *prop:30.Cap:33,* p 318 l 16 *Hoc,* l ult *Si enim A . α ::* p 319 l antepen *α & γ,* l ult *eiſdem,* ibid *μ* = 1, p 323 l 11 *prop* 17, p 324 l 15 *Primam,* l 28 B.B+*β*, p 335 l pen B+*α*, p 342 l 17 *ad eandem denominationem, quam proce*— p 346 l 2 *multiplicatorem,* p 350 l 24 *ductum,* l 26 *abſurdi*) *quod,* p 356 l 14 *in 12 menſibus,* l 18 Q = 120, p 359 l 5, 180 = *α*, p 370 l 30, 5 — 3, p 373 l 11, $\frac{2}{12}$, p 374 l 28 BE, p 375 l 2 *habentur,* p 380 l pen: *fractionibus,* p 381 l 22 *ille dividit per* 2, p 382 l 12 *multiplicantis,* p 384 l 9 *contineantur,* p 386 l pen. $\frac{1}{2}$. $\frac{2}{3}$, l ult $\frac{8}{30}$. p 387 l 1 :: 20 . 8, p 393 l 15, 360.

Meibom.

Meibom, Dedic. p. 1 l. 2 *Aurato*, p 2 l 1 *doctrina*, l 8 *meas*, p 5 l 20 dele *vel*, p 6 l 3 d^2g, p 11 l ult 1] $- \frac{1}{2} \times 2 . \frac{1}{2} \times 2$ p 13 l 20 $\frac{1}{2} \sqrt{3} - 6$, p 14 l antep: *aliud*, p 16 l 13 DP+Pp) :: p 18 l 2 *vat*, p 20 l 1 Ec. l ult: Æc : $- \frac{1}{2}$ X, p 21 l 13, $-$ Ec $=$ Ac $-$ Ec, l 15 Ac, p 23 l pen: $\frac{1}{2} \sqrt{13}$, p 27 l 10, $\frac{aa}{9}$ $=$ C, 17, 3 $=$ *R*, p 29 l 24 *γέωργῳ*, p 33 l 28 *Quoad*, l 31 *r* $\mp$, p 37 l 33 *Paraoloide*, p 41 l 32 *erant*, p 48 l 17 *concavam.*

Refut: p 1 l 23 *Moriæ*, p 2 l pen: *ſortiatur*, p 7 l 10 *indefinite Relatio*, l ult: *Quantitatis qualitatem*, p 21 l 13 *Quid*, p 36 l 1 *ſtabiliat*, p 37 l 32 *quidni*, p 40 l ult: *At*, p 46 l 10 *tur* $\frac{4}{5}$, p 50 l 10 *abſurde*, p 51 l 35 *eſt*, p 52 l 24 *At vero*, p 58 l 7 *duæ ſimple*, p 63 l 4 *paginæ*.

Matheſis Univerſalis.

SIVE,

Arithmeticum opus integrum; tam Philologicè quam Mathematicè traditum.

CAP. I.

De Matheſi in genere; ejus Objecto & Diſtributione.

PRiuſquam Arithmeticam, quam deinceps ſum traditurus, ſpeciatim aggrediar: non omnino abs re fore judico, generalia quædam quaſi προλεγόμενα præmittere, de ipſa Matheſi in genere (cujus Arithmetica pars eſt ſatis inſignis,) ut, Quid ipſa ſint Mathemata, paucis enarrem; cur ita dicta; & Quibus in rebus verſentur: & Matheſeos deinde diſtributionem ſubtexam.

Matheſis quid?

Si, *Quid ſint ipſa Mathemata,* quæratur; aut, quas diſciplinas illo nomine indigitemus: Reſpondeo, Mathemata dici, ſeu diſciplinas Mathematicas, omnes illas ſive Artes ſive Scientias, quæ circa *Quantitatem* peculiari modo verſantur; ſive continuam quidem, ſive Diſcretam.

Matheſeos objectum, Quantitas propriè dicta.

Quantitatem verò cum dico, non eam laxiori quodam ſenſu intellectam vellem; prout eam Ariſtoteles nonnunquam, ſive poſt illum alii, laxiùs loquendo, deſcribunt; quando Tempus, Locum, Orationem, aliquando etiam Motum & Pondus, & ſiqua ſunt ſimilia, ipſius ſpeciebus annumerant: Sed ſtrictiori ſenſu, prout ad Numerum & Magnitudinem reſtringi ſolet; quæ vel ſolæ ſunt, vel ſaltem præcipuæ Quantitatis propriè dictæ ſpecies. Reliqua verò non niſi Reductivè ad Quantitatem propriè dictam pertinere reputantur, quatenus nempe vel Menſuræ vel Numeri ſunt capacia; adeóq; vix ullam ſubeunt Mathematicam ſpeculationem, niſi quatenus ad modum vel *Magni* vel *Multi* conſiderantur; præſertim ſi tota Rationum vel

Proportionum doctrina vel Arithmeticæ vel ſaltem Geometricæ conſiderationis habeatur.

Verum quidem eſt, ea omnia in diſciplinis Mathematicis tractari, iis præſertim quæ Mixtæ dicuntur: quá forſan ſolâ ratione, inter Quantitatis ſpecies fuerunt annumerata. *Tempus* enim tractat Aſtronomia, (ut & *Motus* cœleſtes quibus menſuratur;) item Chronologia; atq; etiam Gnomonice, Aſtronomiæ principiis ut plurimùm nixa. *Locus* autem in Stereometriâ, quantum ad ejus capacitatem; in Geographiâ verò, quoad ejus ſitum & poſituram, ſpeciali modo conſideratur. *Orationem* tractat Muſica, tam quoad Temporum (ut loquuntur) menſuram; quàm quoad Tonorum elationem, ſuppreſſionem, vel etiam circumflexionem; unde non modo Rhetorum & Poetarum, ſed & Muſicorum, oritur & menſura & modulatio. *Motus* autem & *Pondus* in Mechanicis præſertim conſiderantur.

Quanquam autem hæc omnia in diſciplinis Mathematicis tractentur; non tamen per ſe, & primariò; ſed quatenus vel menſurantur vel numerantur.

Dico igitur Matheſeos Objectum eſſe Quantitatem propriè dictam; Magnitudinem ſcilicet & Multitudinem. Reliqua verò eatenus ad Mathemata pertinent, quatenus (reductivè) ſunt vel Numeri vel Menſuræ capacia: nempe quatenus de illis interrogari poterit, vel *Quot* ſint, vel *Quanta* ſint. Adeóq; ſatis apparet, *Quibus in rebus verſatur Matheſis*; nempe in Quantitate, per ſe; in aliis autem rebus omnibus, quatenus vel quantitatis capaces ſunt, vel ad eam reductivè referantur.

Matheſis, unde dicta. Si de *Mathematum*, ſive *Matheſeos*, nomine quæratur, *Cur hac appellatione inſigniantur* illæ diſciplinæ: Ideo fortaſſe fuit, quoniam Mathemata apud multos quidem ſola, apud alios Antiquorum primo ante alias Diſciplinas loco, ediſcebantur: adeóq, κατ' ἐξοχὴν Μαθήματα dicta, quia προμαθήματα.

Atq; hæc de Matheſeos in genere tam Objecto, quàm Appellatione dicta ſunto. Sequitur ut ipſius ſive Species, ſive Partes, ſeorſim conſiderentur.

Matheſeos diſtributio, in Puram & Mixtam. Sunt autem diſciplinæ Mathematicæ aliæ *Puræ*, aliæ *Mixtæ*. Puras dicimus illas, quæ quantitatẽ abſolute conſideratã tractant, prout a Materiâ abſtrahitur. Mixtas autem illas appellamus, in quibus, præter conſiderationem quantitatis, (ſive Multitudo illa fuerit

ſuerit, ſive Magnitudo,) etiam ſubjectum, cui ineſt, connotatur.

Verbi gratiâ, Ubi in Arithmeticâ traditur, *Bis duo quatuor efficere*; Numeri hic ſeorſim conſiderantur, & abſtractim ab omni materiá ſubjectâ. Pariter enim verum eſt, ſive de Hominibus, ſive de Angelis, ſive de aliis quibuſcunq; rebus agatur. Item, ubi in Geometria traditur, *Circuli peripheriam ubiq; a ſuo centro æqualiter diſtare*: hic, præter ipſius circuli conſiderationem, ſubjecti nulla ratio habetur; ſive in cœlis ſit ille circulus, ſive in terris, ſive ubivis aliàs. Adeoq; diſciplinas has, Mathematicas *Puras* dicimus; quia purè de ipſis Quantitatibus agunt, non immiſtâ ſubjecti conſideratione.

In aliis ſecus eſt. Verbi gratia: Cùm docet Aſtronomia, *Æquatorem & Zodiacum ſe mutuo in binis punctis ſecare*; & quidem hunc ad illum oblique Inclinari, angulumq; gradûm viginti trium cum ſemiſſe (circitèr) conſtituere: videmus hic, præter inſtituta pure Mathematica, multa etiam mere Phyſica immiſceri. Quid ſit *circulus*, & *circulorum interſectio*; quid *obliqua inclinatio*, & *inclinationis angulus*, Mathematica mere ſunt, atq; inde petenda; At, ſolem (Terrâmve) hujuſmodi obliquum curſum peragere, eúmq; annuo ſpatio abſolvere, Phyſica ſunt, ex Hiſtoria nempe naturali obſervanda; adhibitis interim Mathematicis tam Principiis quam Inſtrumentis, quò meliùs hujuſmodi obſervatio inſtituatur.

Mathematicas igitur diſciplinas *Puras* dicimus, duas tantùm: nempe *Arithmeticam* & *Geometriam*; Quarum illa agit de Quantitate Diſcreta, ſive Numero; Hæc autem de Continua, ſive Magnitudine. Sed & ex his, eſt quidem altera magis altera minùs pura; eſt enim Arithmetices ſubjectum purius quiddam & magis abſtractum, quàm ſubjectum Geometriæ; ideóq; ſpeculationes habet magis univerſales, quæ rei Geometricæ pariter ac aliis æquè ſunt applicabiles. Puræ: *Arithmetica*, & *Geometria*.

Reliquas autem omnes *Mixtas* eſſe dicimus; Quæ eatenus quidem ſunt Mathematicæ, quatenus in illis occurrit quidpiam vel Arithmeticum, vel Geometricum; quicquid autem inſuper eſt, pro Mathematico non habendum eſt, ſed pro mixtura aliunde allata. Atq; ex his quidem aliæ minùs, aliæ magis Mixtæ ſunt; prout ad Mathematicas puras magis minúſve accedant. Mixtæ.

Inter Mixtas, celeberrima quidem eſt *Aſtronomia*: Quæ menſuram

ſuram quidem & calculum adhibet, ſed ad Cœleſtia tantùm *φαινόμενα* ſpeculanda. Corporum nempe cœleſtium magnitudines, diſtantias, motus, variáſq; eorum & quoad nos, & inter ſe, poſituras contemplatur.

Cometographia Dum autem Phænomena Cœleſtia nomino; ne ipſos quidem *Cometas* eximo; qui in ſublimi conſpiciuntur, & obſervandi rationem, aſtrorum obſervationibus non prorſus abſimilem, videntur poſtulare; quanquam eorum fortaſſe nonnulli ſint ſublunares: *Nonnulli*, inquam; Omnes enim ſublunares eſſe, (prout cenſebant veteres,) neutiquam eſt concedendum; cum id præſentis præteritiq; ſeculi obſervationes manifeſto reclament.

Geographia. Aſtronomiæ ſubjungo *Geographiam*; utpote Aſtronomicis principiis ut plurimum fultam: quæ, præterquam quod ab Aſtronomia mutuatur, non multum habet Mathematicum.

Gnomonice. Utriq; verò (Aſtronomiæ & Geographiæ) *Gnomonicen* ſubjungo, (unde varia Horologia Scioterica, aliáq; inventa conſimilia dependent;) & Artem etiam *Nauticam*: quarum utraq; tam Aſtronomiæ, quam Geographiæ, peritiam poſtulant. *Ars Nautica.*

Chronologia. Sed nec *Chronologiam* penitus omittam; quæ Temporis calculum rerum geſtarum hiſtoriis accommodat: quod quò meliùs fiat, τῶν φαινομένων cœleſtium etiam rationem cumprimis habet, & Eclipſeon præcipuè.

Aſtrologia judiciaria. Futiles autem *Genethliacorum* vanitates, aliáſq; ineptias *Aſtrologiæ Judiciariæ*, prætereundas duco: ut quæ pro frivolis potiùs aut ſuperſtitioſis impoſturis habendæ ſunt, quàm Mathematicis diſciplinis: Ideóq; illarum profeſſionem prudentiſſimus atque Honoratiſſimus Eques Dominus *Henricus Savilius* Profeſſoribus ſuis Mathematicis merito interdicendam curavit.

Geodæſia. Poſt Aſtronomiam autem, eiq; affines diſciplinas, annumeranda eſt *Geodæſia*; cui & totam quidem *Longimetriam*, *Planimetriam*, & *Stereometriam* adjungo: Unde propoſitæ diſtantiæ, anguli, ſuperficies, & corpora ſolida, ſeu (quod perinde eſt) ſpacia ſolidorum capacia, menſurantur: quæ omnia Geometricis principiis peraguntur, particulari ſubjecto applicatis.

Perſpectiva. Sed & *Perſpectiva* tota; tam quæ ſimplicior eſt, lineáſq; ab objectis in directum exeuntes perpendit, ipſiſq; peritioribus Pictoribus uſui eſt: quàm quæ in *Dioptricis* & *Catoptricis*, de lineis refractis & reflexis, traditur; Geometrica ferè tota eſt: quanquam

n etiam ipſius in Aſtronomia uſus ſit haud exiguus.

Neq; interim *Mechanices* & *Architectonices* obliviſcendum eſt: *Mechanice.* *Architectonice.*
rum utraq; (præſertim Mechanica) Geometricas menſu-
ica ad molem corpoream applicat, ut & interim Ponderum,
iúmq; motricium, rationem habeat: Unde utilia multa, &
dem admiranda, perficiuntur.

Tandem etiam & *Muſicam* Mathematicis diſciplinis accenſere *Muſica.*
nt; quæ Arithmeticam quandam in Sonis exercet; & pro-
tione quadam peculiari Harmonicos conſentus effingit.

Atq; hactenus Diſciplinas Mathematicas, tam Puras quàm
xtas, breviter quidem, ſed quantum præſentis inſtituti ratio
ulat, enumeravimus. Siquæ ſupereſſe videantur aliæ, poſ-
t quidem illæ ad recenſitarum aliquas commodè referri.

CAP. II.

Geometriâ, & Arithmeticâ ſpeciatim. Earum Definitiones, Objecta, Principia, & Affectiones; Eáſq; verè ſcientias eſſe.

POſt brevem Matheſeos Synopſin, in priori capite exhibi-
tam; reſtat ut eas ſpeciatim ſeligam diſciplinas, quæ mune-
noſtri conditio, ipſaq; *Statuta Saviliana*, Profeſſori ſuo Geo-
trico peculiariter deſtinarunt. Adeoq;, mixtis pleriſq; ſe-
ſitis, de Mathematicis Puris, Arithmetica nempe & Geome-
a, quædam dicenda reſtant: quarũ utraq; quanquam ſub *Geo-
trici Profeſſoris* nomine, (cum mixtis aliquot cognatis,) mihi
nandatur: Aſtronomia interim, aliiſq; quæ ipſi affines ſunt,
ofeſſorum alteri, *Aſtronomico* dicto, (Collegæ meo meritiſſi-
,) reſervatis.

Geometriam autem & *Arithmeticam* ſi definire velimus; poteſt *Geometriæ & Arithmeticæ Definitiones.*
idem illud fieri vel per Objecta, ut in aliis Scientiis Speculati-
; vel per Finem, ut in Artibus & Scientiis Practicis non rarò
Illud quidem prout contemplationes pure ſpeculativas con-
ent; Hoc autem, prout ad praxin ordinantur. Arithmeti-
n enim & Geometriam *Practicam* agnoſcimus, non minùs
m Speculativam; (quamvis hæc quidem dignitate multùm
cedat,) Ut enim datur Geometria Speculativa, eiq; ſubor-
ata Practica; ſic etiam Arithmetica Speculativa & Practica.

Priori modo definitur *Geometria*, *Scientia Magnitudinis, quate-*

ere,res ipſa clamat: Numeri vero principium duceremus, lla rerum modificatione,qua quid Unum eſſe aut multa, vel m qua quid Idem eſſe aut diverſum dicitur; prout enim ab ntitate (ſi ita loqui liceat) oritur unitas, ita & a rerum Di- itate, Numerum oriri, ſeu pluralitatem, ſatis patet.

Sed & ipſa Unitas, non incommode, Numerorum catalogo enſeri poſſit; quamvis vulgo haud ita reputetur. eoq; ut Quantitas continua,ſeu magnitudo,totum illud con- t quo affirmative reſpondetur quæſtioni *Quantum* quid ſit, *quā Magnum*: ita numerus de illo omni dicatur,quo quæſtioni *ot ſunt*, affirmative reſpondetur. Certum eſt, Arithmeticam lem prorſus modo & unitatem & cæteros numeros tractare: quidem apud Grammaticos, *numerus ſingularis* ſine ſolœciſmo citur. Sed hac de re deinceps plura dicenda erunt.

Siquis autem hæc,quæ dixi, magnitudinis & numeri Princi- ,non tam in Matheſi, quam in Metaphyſica,tractari ſuggerat: utiquam ego inficias eo. Neq; enim illud omnino Scientiis olitum eſt, aut eſſe debet, ut principia habeant aliunde præ- onſtrata, vel etiam ipſum ſubjecti definitionem; modò ipſæ ſubjectis affectiones demonſtrent.

Affectiones autem varias,tum in Geometria tum in Arithme- a,de magnitudinibus & numeris demonſtrari,adeò notum eſt dictu non ſit opus: idq; demonſtrandi methodo tam certa idem & evidenti; ut vix alia opus ſit Logica, quam con- ata & naturaliter inſitâ, qua ſequelæ neceſſitas intelliga- r. *Affectiones.*

Non tamen interim ignarus ſum, a Logicis nonnullis (qui men, an Matheſin ſatis intellexerint, neſcio,) defectus quoſ- am etiam Mathematicis Demonſtrationibus obtendi, quo mi- us ad Ariſtotelicæ demonſtrationis, quam *Potiſſimam* dicunt, ignitatem accedant. Operæ pretium igitur exiſtimo de Ma- ematicis Demonſtrationibus nonnulla ſubjungere, ut ea- em opera diſciplinas illas,Arithmeticam putà & Geometriam, cientias eſſe probem, & ἀποδείξεων naturam ſimul explicem

CAP.

CAP. III.

De Demonſtrationibus Mathematicis. Unde Mathematicas vere ſcientias eſſe confirmatur.

Demonſtratio quid.

DEmonſtratio, ſive *συλλογισμὸς ἐπιστημονικὸς*, ille reputatur *Syllogiſmus, qui affectiones proprias de ſubjecto per proprias cauſas demonſtrat.* vel, ut fuſius apud Ariſtotolē traditur, *l. 1. poſt. An. c. 2.* Ἀπόδειξίς ἐστι συλλογισμὸς ἐπιστημονικὸς, ἐξ ἀληθῶν, καὶ πρώτων καὶ ἀμέσων, καὶ γνωριμωτέρων, καὶ προτέρων, καὶ αἰτίων τοῦ συμπεράσματος. Quæ tamen definitio non omni demonſtrationi convenire putanda eſt; ſed illi quæ eſt τοῦ διότι, quæ etiam *κυρίως* Demonſtratio dicitur. Ad Demonſtrationem enim τοῦ ὅτι, ſufficit argumentum ab effectis ductum. Quod & ſatis innuit Ariſtoteles, cum alium *ſciendi* modum indigitat, de quo ſe poſtea dicturum promittit.

Demonſtrationes mathematicæ.

Demonſtrationes autem Mathematicas quod attinet; nemo eſt quem ſcio, qui de earum vel certitudine vel evidentia, modo recte inſtituantur, dubitavit; nec qui ullas omnino alias vel certiores vel magis manifeſtas eſſe contendit.

An Potiſſimæ.

Quæritur tamen a nonnullis, An ad illius, quā *Potiſſimā* dicunt, & ab Ariſtotele definitā contendunt, Demonſtrationis dignitatē aſſurgant. Et duo potiſſimū objiciunt, quò minùs id concedatur. Ut videre eſt apud Smiglecium in Logica ſua *Diſ.* 14, *Q.* 14.

An entia mathematica ſint tantùm Imaginaria.

Primum eſt, quòd entia Mathematica, quatenus a Mathematicis conſiderantur, non omnino exiſtant in rerum natura. Non enim uſpiam, inquiunt, reperiuntur Lineæ vel ſuperficies a corporibus abſtractæ; nec quidem corpora ſphærica, cubica, aliáve regularia; aut trigona, tetragona, circuli, aliæve figuræ planæ, ad amuſſim Mathematicam exacta: adeoq; vel omnino non eſſe, vel eſſe tantum imaginaria, contendunt; ideoq; de illis ſcientiam eſſe non poſſe, cum ſubjectis tantum imaginariis non poſſint reales affectiones ineſſe, nedum de illis demonſtrari.

Sed leve omnino hoc eſt, & facile diſſipatur. Quod enim de actuali exiſtentia dicitur, omnino πάρεργον eſt: cum exiſtentia ſit tantū ſingulariū, ſcientia verò univerſaliū; & ad hæc, ut aliquid ſit objectum ſcientiæ, ſive exiſtat ſive non exiſtat perinde eſt, modò ejuſmodi ſit, ut (in individuo) exiſtere poſſit: ut de Roſâ in hyeme dici ſolet. Quod enim hujuſmodi eſt, potius ens in potentia dicendū eſt, quam vel non ens, vel ens imaginariū, ſive ens rationis.

Lineas

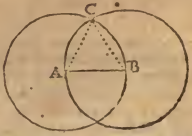
Lineas autem & ſuperficies a corporibus ſeparatas, aut ipſa quidem Mathematica corpora citra materiam Phyſicam, non exſiſtere, (adeo etiam nec exſiſtere poſſe,) omnino verum eſt. Cùm autem Matheſeos objectum ideo imaginarium tantùm eſſe contendunt: Non levis eſt hic error. Mathematici namq; lineam vel ſuperficiem vel corpus Mathematicum citra corpus Phyſicum exſiſtere, non magis vel ſupponunt vel affirmant quam ſupponit Phyſicus vel Animal exſiſtere quod nec homo ſit nec brutum, vel etiam Hominem in genere uſpiam reperiri quĩ non ſit vel Plato vel Socrates vel alius aliquis ſingularis. Non enim negat Mathematicus ſuas lineas, ſuperficies, & figuras, corpori Phyſico ineſſe; ſed has tantum perpendit & contemplatur, corpore interim Phyſico non conſiderato. Aliud enim eſt abſtrahere, aliud negare: Mathematicus ſuas quidem magnitudines abſtrahit a corpore Phyſico, non tamen de illo negat: Nec magis aſſerit Mathematicus quantitatem exſiſtere ſine corpore Phyſico; quã Phyſicus, ſubſtantiã corpoream exſiſtere ſine quantitate: uterq; tamen alteram ab altera abſtractam contemplatur. Exſiſtunt igitur, ſaltem exſiſtere poſſunt, non tantum imaginarie ſed realiter, entia Mathematica; non quidem per ſe, ſed in corpore Phyſico; licèt abſtractè conſiderentur. Atq; hæc ſufficiant ad illud quod primum objicitur diluendum.

Secundum illud quod oggerunt, majoris quidem momenti eſt ad rem præſentem, modò verum eſſet: Nempe quod demonſtrationes Mathematicæ non contineant in ſe veras cauſas eſſendi, & conſequenter, neq; illam præcipuam neceſſitatem quæ ex vera & propria cauſa deſumitur.

Inſtat Smiglecius, (in diſputatione citata) inter alia, in prima demonſtratione Euclidis; ubi, inquit, *demonſtratur triangulum eſſe æquilaterum, ex eo quod ſit conſtructum inter duos circulos, habeatq; omnia ſua latera a centro ad circumferentiam.*

Ut autem melius intelligatur argumentum, Euclidis demonſtrationem aliquanto fuſius explicabimus. Propoſuerat ille hoc problema ſolvendum, *ſuper datam rectam finitam* (puta A B,) *triangulum æquilaterũ conſtituere.* Quod ut fiat jubet ut *centro* A, *intervallo* A B, *deſcribatur circulus* BC; *item centro* B, *intervallo* BA, *deſcribatur circulus* AC; *& a puncto* C, *in quo circuli ſe mutuo ſecant, ducantur ad puncta* A B, *rectæ* CA, CB. His peractis, demonſtrat Euclides *conſtructum triangulum* ABC *eſſe æquilaterum*; quia nempe *tres rectæ* CA, AB, BC, *ſunt inter ſe æquales*, (Quæ certè eſt de-

demonſtratio a vera & proxima cauſa: Nam niſi æqualitas laterum ſit vera immediata cauſa cur figura conſtructa eſt æquilatera, quænam ea vera cauſa ſit non poſſum ego vel conjectu-



ra aſſequi.) Æqualitas autem laterum CA, AB, BC, demonſtratur, eo quod CA, AB, *ſunt radii circuli* B C, *ideoq; æquales*; *item* BA, BC, *radii circuli* AC *ideoq; æquales*: *cum igitur tam* CA *quam* CB *æquatur rectæ* A B, *ſunt tres rectæ* C A, AB, BC, *inter ſe æquales*. Eſtq; hæc demonſtratio Euclidea.

Verum in hac demonſtratione, inquit Smiglecius, "Nemo "non videt, non aſſignari veram cauſam eſſendi; non enim "triangulum idcirco eſt æquilaterum quia eſt inter duos circu-"los conſtructum; nam etiamſi non eſſet inter duos circulos "conſtructum adhuc eſſet æquilaterum: Unde talis cauſa eſt accidentalis tali proprietati.

Cui ego multa regero.

1° Dico, quod, utut illud verum eſſet quod affirmatur, nempe demonſtrationes Mathematicas non per veram & proximā cauſam procedere; ſunt tamen ſatis ſcientificæ, ſi vel per cauſā remotiorem vel per effectū, vel per aliud aliquod medium ab alio argumentandi loco deductum procedant, modò certò concludant rem ita eſſe prout affirmatur, atq; aliter eſſe non poſſe. Sufficit enim ad hoc, ut demonſtratio ſit ſcientifica, *ſi procedat per medium neceſſarium ex natura rei*: ut & ipſi quidem, qui hòc objiciunt, non negant, & *Smiglecius* etiam directè affirmat, *Diſp.* 15. *qu.* 1. *& alibi.* Quare nec ipſe, nec, quos ſcio, alii, negabunt, Diſciplinas purè Mathematicas ſcientias eſſe, utut perfectiſſimum illis demonſtrandi modum non concedant.

2° Notandum eſt, quod ipſi, qui negant has demonſtrationes perfectas eſſe, in ratione demonſtrationis (ut loquuntur) *Potiſſimæ*; dubitant, an uſpiam aliàs occurrat in aliis ſcientiis

ejuſmodi

ſmodi Potiſſima demonſtratio: ut apud *Smiglecium* videre quæſtione priùs citatâ.

3° Euclidis demonſtratio, non igitur concludit Triangulum ABC æquilaterum eſſe, eo quod *inter duos circulos conſtructium* (ut *Smiglecio* videtur;) ſed quod *latera* CA, AB, BC, *ſint inter æqualia* ut ex progreſſu demonſtrationis patet. Illud autem, duobus circulis in conſtructione adhibitis, ſubſervit tantum ualitati laterum demonſtrandæ.

4° Notandum eſt Euclidem loco citato, non tam veritatem heorematis, quam conſtructionem problematis, demonſtrare. on enim ſimpliciter Probaturus erat, *Triangulum* ABC *eſſe æquiterum*; ſed *Triangulum, eo, quo imperatum erat, modo conſtructum, æquilaterum*; ſeu Hypotheticam hanc propoſitionem, *ſi Trigulum ſic conſtruatur, erit æquilaterum*, veram eſſe. Jam vero, quaniam aliunde fortaſſe conſtare poſſit veritas conſequentis, mpe *Triangulum* ABC *eſſe æquilaterum*; veritas tamen conſeuentiæ (*nempe illud ex conſtructione ſequi;*) non aliunde probatur, q; ex alia cauſa magis immediata dependit, quam ex ipſa nſtructione: nempe quia cōſtructor ſic procedendo acceperat quales circulorum radios. Ex vera igitur propria & immediatâ uſâ demonſtravit Euclides *conſtructionem problematis* Quamvis itur, *Triangulum illud æquilaterum eſſe*, demonſtrare videtur per uſam vel remotā vel accidentalem: At certe *conſtructionem illam oblemati ſatisfacere*, (quod erat Euclidi demonſtrandum) per vem, proximam, & immediatam cauſam demonſtratur.

5° Etiam addendum eſt, in nulla quidem ſcientia expectanm eſſe, ut omnes ibidem demonſtrationes æquali perfectios gradu procedant. Abundè ſufficit, ſi demonſtrationes aliaæ ſint per veras & proximas cauſas, ideoq; τοῦ διότι quanquā emonſtrationibus illis τοῦ διότι, paſſim immiſceantur aliæ τοῦ ὅτι. t in ſcientiis omnibus abundè liquet.

6° Igitur concedo, ſi non demonſtrationem propoſitam, ſaltem alias non paucas, in matheſi paſſim occurrentes, prodere, non tam a cauſis proximis & immediatis, quam ab lis locis Topicis; adeoq; demonſtrationes eſſe τοῦ ὅτι, non διότι.

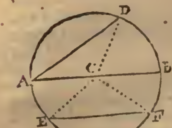
7° Nego tamen, in omnibus demonſtrationibus Mathemacis illud obtinere. Multas enim a veris & proximis cauſis rocedere, adeoq; demonſtrationes eſſe τοῦ διότι, contendo. deoq; *Smiglecii* enumeratio demonſtrationum, quas eſſe τοῦ

 ὅτι

ὅτι contendit, utut vera eſſet, non tamen eſt ſufficiens enumeratio, cum occurrant aliæ non paucæ, quas eſſe τῦ διότι liquet.

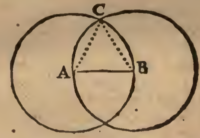
8° Igitur ut rem totam dilucidius expediam, tres præſertim demonſtrationum Mathematicarum ſive modos, ſive gradus, ſive ſpecies ſtatuo.

Prima quidem eſt illa demonſtratio, quæ per *deductionem ad abſurdum*, ſeu impoſſibile, procedit; ἀπαγωγὴ dicta: quæ, rem ita eſſe, demonſtrat, eo quod ſit impoſſibile, ut ſecus ſit. Ut ſiquis demonſtraturus, *Rectarum circulo inſcriptarum, longiſſimam illam eſſe quæ per centrum tranſit*; illud ita eſſe aſſerat, quoniam impoſſibile eſt aliam quamvis, per centrum non tranſeuntem; vel longiorem eſſe, vel quidem æqualem. Supponatur enim, ſi fieri poſſit, recta A D ἀδιάμετρος, per centrum non tranſiens, diametro A B, per centrum C tranſeunti, æqualis, vel etiam ipſa longior: & ducatur, a centro C, recta C D. Dico rectam C D æqualem eſſe rectæ C B, quoniam utraq; eſt recta a centro ad circumferentiam ejuſdem circuli; ideóq; A C D, (ex duabus rectis A C, C D compoſita,) erit æqualis diametro A C B, (quoniam ſi æqualibus æqualia addantur, tota erunt æqualia;) ſi igitur A D ſit æqualis ipſi A B, erit etiam æqualis ipſis A C, C D, ſimul ſumptis, (nam quæ eidem vel æqualibus æquantur, etiam inter ſe æquantur;) ſi A D longior ſit ipſa A B, erit & longior, quam A C, C D, ſimul ſumptis, (quibus ipſa A B æqualis eſt,) At horum utrumq; abſurdum eſt & impoſſibile. Cum enim A D ſit recta, quæ inter data puncta breviſſima eſt, & quidem unica; impoſſibile eſt ut vel longior ſit, vel etiam æqualis, ipſis A C, C D, ſimul ſumptis, quæ non niſi per circuitum quendam a puncto A ad punctum D procedunt. Non eſt igitur recta A D, vel æqualis vel major quam eſt A B. Sed & eadem omnino demonſtratio procederet, ſi ubivis aliàs recta non per centrum ducta inſcribatur, puta E F: ſi enim E F ſit major vel æqualis ipſi A B, erit proinde major vel æqualis E C, C F, ſimul ſumptis; quoniam E C radius



dius æquatur radio A C, & C F radius æquatur radio C B; ergo tota A C, C B, (hoc eſt, A B,) æquatur toti E C, C F: At impoſſibile eſt ut recta EF vel æquet vel ſuperet rectas E C, C F ſimul ſumptas, (cum recta ſit breviſſima inter data puncta,) ergo etiam impoſſibile eſt ut vel æquet vel ſuperet rectam A B (ipſis E C, C F, ſimul ſumptis æqualem.) Cum igitur impoſſibile ſit ut A D, vel E F, vel alia quævis recta non per centrum, æquet aut ſuperet rectam A B (vel aliam quamlibet per centrum ductam:) ſequitur, Rectarum circulo inſcriptarum, quæ per centrum tranſit eſſe longiſſimam. Quod erat demonſtrandum. Demonſtratur autem, ut patet, deductione ad impoſſibile.

Secunda demonſtrandi ratio, eſt, *Oſtenſiva τοῦ ὅτι*. Ut, ſi *recta*



A C demonſtretur *æqualis eſſe recta* B C; quoniam utraq; demonſtrata fuerat æqualis ipſi A B: quæ autem eidem ſunt æqualia, ſunt & æqualia inter ſe. Eſtq; hæc demonſtratio quidem oſtenſiva, ſed tantum τοῦ ὅτι, non autem τοῦ διότι. Communis enim utriuſq; æquatio eidem tertiæ, indicat quidem earum æqualitatem inter ſe, non autem illius cauſa eſt. Eſſent enim ipſæ AC, BC, ſibi invicem æquales, etiamſi ipſa AB non fuiſſet ducta.

Tertia vero demonſtrandi ratio, quæ & omnium perfectiſſima, eſt *Oſtenſiva τοῦ διότι*. Quæ demonſtrat & *quod* ſit, & *quare* ſit. Ejuſmodi eſt demonſtratio, ſiquis *Radios omnes ejuſdem circuli æquales eſſe* inde demonſtret, quod definiatur circulus (ſaltem definiri poſſit) *Figura plana, unicâ lineâ curvâ contenta, quæ a medio comprehenſi ſpatii æqualiter ubiq; diſtat.* Si enim circuli eſſentia poſtulet, ut ipſius peripheria æqualiter a centro diſtet; immediate ſequitur, tanquam a cauſa vera & proxima, radios omnes, quibus illa diſtantia menſuratur, etiam equales eſſe.

eſſe. Eſtq; demonſtratio hæc Oſtenſiva τοῦ διότι, a cauſa proxima & immediata deſumpta

Si vero objiciat Smiglecius, cauſam hanc non veram & proximam eſſendi cauſam eſſe, ſed accidentalem tantum, quia radii illi, puta, CA, CB,CD, CE, CF, &c. eſſent lineæ æquales, etiamſi circulus ille neutiquam duceretur. Reſpondeo; Verum eſſe, quod eſſent quidem Rectæ æquales, etiamſi nulla figura fuiſſet ducta;non tamen eſſent æquales Radii:ut enim radii ſint, neceſſe eſt ut ab alicuius figuræ centro ad perimetrũ ducantur: Ut autē radii illi,& omnes ejuſdem figuræ alii invicem æquales ſint,requiritur ut perimeter iſtius figuræ æqualiter a centro diſtet. Eſtq; hæc,æqualis undiquaq; diſtantia circũferentiæ à centro, vera quidē, neceſſaria, proxima,& immediata cauſa hujus affectionis, nempe, ipſius radios omnes æquales eſſe. Sunt igitur demonſtrationes Mathematicæ, quanquam non omnes, aliquæ ſaltem, non modò ſcientificæ, ſed & τοῦ διότι.

Siquis deniq; objiciat, me tres demonſtrationis ſpecies feciſſe, cùm vulgò duæ tantũ ſtatuantur; nempe τοῦ ὅτι & τοῦ διότι. Poterit ille ſi placet, duarũ priorũ utramq; demonſtrationem τοῦ ὅτι, dicere; illam quidem per deductionm ad impoſſibile, hanc vero oſtenſivam; tertiam deniq; demonſtrationem τοῦ διότι. Non enim libet de verbis contendere, modò de rebus conſtet.

Atq; hæc ſufficiat de Demonſtrationibus Mathematicis dixiſſe; ut & propoſitæ definitiones vindicentur, & ipſa demonſtrandi methodus indigitetur. Reſtat deinceps ut ipſam Arithmeticam aggrediar.

CAP. IV.

Unitatis & Numeri definitiones Quo ſenſu Unum negatur eſſe numerus. Tam Unum quam Nullum, vario ſenſu, Principium Numeri. Unum eſt Numerus minimus. Nullum non eſt numerus. Numeri fracti, non ſunt veri numeri.

Arithmetica derivatio & Definitio.

ARithmetica, ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ dicta, ab ipſo objecto nomen ſortita eſt. Eſt enim, *Scientia numeri, quatenus eſt numerabilis*, vel *ſcientia bene numerandi*, ut ſupra declaratum eſt.

Numeri vero principium *unitas* dicitur.

Unitas autem eſt, *ſecundum quam unumquodq; Unum dicitur: Numerus*

autem

autem ex unitatibus compoſita multitudo. Sic enim Euclides, *lib.7. de.* 1, 2. Μονάς ἐστι, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται. Ἀριθμὸς δὲ, τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος. *Unitatis & Numeri definitiones.*

Ex his autem Unitatis & Numeri definitionibus, pleriq; arbitrantur unitatem numerorū catalogo non accenſendā, adeoq; numerum minimum Binarium eſſe; quanquam illud quidem Euclidem uſpiam dixiſſe non memini. *An Unitas ſit Numerus.*

Miror tamen eouſq; hanc ſententiam invaluiſſe, cum non minus Unitas, quam Binarius numerus, aut quivis alius, reſpondeat quæſtioni *Quot ſunt.*

Hac autem de re, erat mihi quidem in animo, litem neutiquam movere; cum illa controverſia Logica potius ſeu Metaphyſica, quam Mathematica, videri poſſit; ſaltem obiter monuiſſe, non modo *Unum* ſed & *Nullum*, apud Arithmeticos eodem omnino modo ac reliquos numeros tractari, adeoq; apud illos (quicquid de Metaphyſicis dicendum ſit) vel pro Numeris, vel quaſi numeris reputari. Operæ tamen pretium fortaſſis erit paucis oſtendere, cur unitatem putem vere numerum eſſe, aliiſq; numeris annumerandam.

Nec huic forſan adverſabitur Euclidis aliorumq; ſententia probe intellecta. Cum enim nonnulli Unitatem, propriè loquendo, non modò Numerum eſſe negent, ſed & numeri partē; adeoq; *numeri principium impars* eſſe dicant, ut eſt Magnitudinis *Punctum*, & Temporis *Momentum*: Intelligendi fortaſſe ſunt de Monade ſeu unitate, non ut numerum ſingularem deſignat, ſed ut eſt communis quaſi numerorum omnium Denominatio, ſive denominator. Sic enim numerus Quaternarius eſt, qui quatuor unitates numerat, Ternarius qui tres, Binarius qui duas & Singularis pariter qui unam quidem Unitatem deſignat. Secus enim non video quo modo vere dici poſſet, unitatem non eſſe numeri alicujus partem: cum certum ſit, *Unum* non minus eſſe *Duorum* dimidium, quam *Duo* medietatem eſſe τῶν *Quatuor.* Dum igitur *Quatuor* dico tantundem valere ac *quatuor unitates*; vox illa *unitates* nec numerus eſt, nec pars numeri, ſed vel numeri denominatio ſeu denominator, vel ipſum numeratum. Vox autem *Quatuor* eſt earum unitatum numerus. Ita cum *Unum* tantundem valere dico ac *Unam unitatem* μίαν μονάδα. Vox illa *Unitas* eſt numeri denominatio, ſeu numerator; vox autem *Una* numerus eſt, ſeu unitatum multitudo *Quo ſenſu unitas negatur eſſe numerus.*

ducere, res ipſa clamat: Numeri vero principium duceremus, ab illa rerum modificatione, qua quid Unum eſſe aut multa, vel etiam qua quid Idem eſſe aut diverſum dicitur; prout enim ab Identitate (ſi ita loqui liceat) oritur unitas, ita & a rerum Diverſitate, Numerum oriri, ſeu pluralitatem, ſatis patet.

Sed & ipſa Unitas, non incommode, Numerorum catalogo accenſeri poſſit; quamvis vulgo haud ita reputetur. Adeoq; ut Quantitas continua, ſeu magnitudo, totum illud continet quo affirmative reſpondetur quæſtioni *Quantum* quid ſit, ſeu *quā Magnum*: ita numerus de illo omni dicatur, quo quæſtioni *Quot ſunt*, affirmative reſpondetur. Certum eſt, Arithmeticam eodem prorſus modo & unitatem & cæteros numeros tractare: & quidem apud Grammaticos, *numerus ſingularis* ſine ſolœciſmo dicitur. Sed hac de re deinceps plura dicenda erunt.

Siquis autem hæc, quæ dixi, magnitudinis & numeri Principia, non tam in Matheſi, quam in Metaphyſica, tractari ſuggerat: Neutiquam ego inficias eo. Neq; enim illud omnino Scientiis inſolitum eſt, aut eſſe debet, ut principia habeant aliunde præmonſtrata, vel etiam ipſum ſubjecti definitionem; modò ipſæ de ſubjectis affectiones demonſtrent.

Affectiones autem varias, tum in Geometria tum in Arithmetica, de magnitudinibus & numeris demonſtrari, adeò notum eſt ut dictu non ſit opus: idq; demonſtrandi methodo tam certa quidem & evidenti; ut vix alia opus ſit Logica, quam connata & naturaliter inſitá, qua ſequelæ neceſſitas intelligatur. *Affectiones.*

Non tamen interim ignarus ſum, a Logicis nonnullis (qui tamen, an Matheſin ſatis intellexerint, neſcio,) defectus quoſdam etiam Mathematicis Demonſtrationibus obtendi, quo minus ad Ariſtotelicæ demonſtrationis, quam *Potiſſimam* dicunt, dignitatem accedant. Operæ pretium igitur exiſtimo de Mathematicis Demonſtrationibus nonnulla ſubjungere, ut eadem opera diſciplinas illas, Arithmeticam putà & Geometriam, ſcientias eſſe probem, & ἀποδείξεων naturam ſimul explicem

CAP.

CAP. III.

DeDemonſtrationibus Mathematicis. Unde Mathematicas vere ſcientias eſſe confirmatur.

Demonſtratio quid.

DEmonſtratio, ſive συλλογισμὸς ἐπιστημονικὸς, ille reputatur *Syllogiſmus, qui affectiones proprias de ſubjecto per proprias cauſas demonſtrat.* vel, ut fuſius apud Ariſtotolē traditur, *l. 1. poſt. An. c. 2.* Ἀπόδειξις ἐστὶ συλλογισμὸς ἐπιστημονικὸς, ἐξ ἀληθῶν, καὶ πρώτων καὶ ἀμέσων, καὶ γνωριμωτέρων, καὶ προτέρων, καὶ αἰτίων τοῦ συμπεράσματος. Quæ tamen definitio non omni demonſtrationi convenire putanda eſt; ſed illi quæ eſt τοῦ διότι, quæ etiam κυρίως Demonſtratio dicitur. Ad Demonſtrationem enim τοῦ ὅτι, ſufficit argumentum ab effectis ductum. Quod & ſatis innuit Ariſtoteles, cum alium *ſciendi* modum indigitat, de quo ſe poſtea dicturum promittit.

Demonſtrationes mathematicæ.

Demonſtrationes autem Mathematicas quod attinet; nemo eſt quem ſcio, qui de earum vel certitudine vel evidentia, modo recte inſtituantur, dubitavit; nec qui ullas omnino alias vel certiores vel magis manifeſtas eſſe contendit.

in Potiſſimæ.

Quæritur tamen a nonnullis, An ad illius, quā *Potiſſimā* dicunt, & ab Ariſtotele definitā contendunt, Demonſtrationis dignitatē aſſurgant. Et duo potiſſimū objiciunt, quò minùs id concedatur. Ut videre eſt apud Smiglecium in Logica ſua *Diſ.* 14. *Q.* 14.

An entia mathematica ſint tantùm Imaginaria.

Primum eſt, quòd entia Mathematica, quatenus a Mathematicis conſiderantur, non omnino exiſtant in rerum natura. Non enim uſpiam, inquiunt, reperiuntur Lineæ vel ſuperficies a corporibus abſtractæ; nec quidem corpora ſphærica, cubica, aliáve regularia; aut trigona, tetragona, circuli, aliæve figuræ planæ, ad amuſſim Mathematicam exacta: adeoq; vel omnino non eſſe, vel eſſe tantum imaginaria, contendunt; ideoq; de illis ſcientiam eſſe non poſſe, cum ſubjectis tantum imaginariis non poſſint reales affectiones ineſſe, nedum de illis demonſtrari.

Sed leve omninohoc eſt, & facile diſſipatur. Quod enimde actuali exiſtentia dicitur, omnino πάρεργον eſt: cum exiſtentia ſit tantū ſingulariū, ſcientia verò univerſaliū; & ad hæc, ut aliquid ſit objectum ſcientiæ, ſive exiſtat ſive non exiſtat perinde eſt, modò ejuſmodi ſit, ut (in individuo) exiſtere poſſit: ut de Roſa in hyeme dici ſolet. Quod enim hujuſmodi eſt, potius ens in potentia dicendū eſt, quam vel non ens, vel ens imaginariū, ſive ens rationis.

Lineas

Lineas autem & ſuperficies a corporibus ſeparatas, aut ipſa quidem Mathematica corpora citra materiam Phyſicam, non exſiſtere, (adeo etiam nec exſiſtere poſſe,) omnino verum eſt. Cùm autem Matheſeos objectum ideo imaginarium tantùm eſſe contendunt: Non levis eſt hic error. Mathematici namq; lineam vel ſuperficiem vel corpus Mathematicum citra corpus Phyſicum exſiſtere, non magis vel ſupponunt vel aſſirmant quam ſupponit Phyſicus vel Animal exſiſtere quod nec homo ſit nec brutum, vel etiam Hominem in genere uſpiam reperiri qui non ſit vel Plato vel Socrates vel alius aliquis ſingularis. Non enim negat Mathematicus ſuas lineas, ſuperficies, & figuras, corpori Phyſico ineſſe; ſed has tantum perpendit & contemplatur, corpore interim Phyſico non conſiderato. Aliud enim eſt abſtrahere, aliud negare: Mathematicus ſuas quidem magnitudines abſtrahit a corpore Phyſico, non tamen de illo negat: Nec magis aſſerit Mathematicus quantitatem exſiſtere ſine corpore Phyſico; quã Phyſicus, ſubſtantiã corpoream exſiſtere ſine quantitate: uterq; tamen alteram ab altera abſtractam contemplatur. Exſiſtunt igitur, ſaltem exſiſtere poſſunt, non tantum imaginarie ſed realiter, entia Mathematica; non quidem per ſe, ſed in corpore Phyſico; licèt abſtracte conſiderentur. Atq; hæc ſufficiant ad illud quod primum objicitur diluendum.

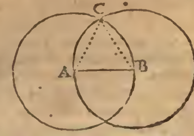
Secundum illud quod oggerunt, majoris quidem momenti eſt ad rem præſentem, modò verum eſſet: Nempe quod demonſtrationes Mathematicæ non contineant in ſe veras cauſas eſſendi, & conſequenter, neq; illam præcipuam neceſſitatem quæ ex vera & propria cauſa deſumitur.

Inſtat Smiglecius, (in diſputatione citata) inter alia, in prima demonſtratione Euclidis; ubi, inquit, *demonſtratur triangulum eſſe æquilaterum, ex eo quod ſit conſtructum inter duos circulos, habeatq; omnia ſua latera a centro ab circumferentiam.*

Ut autem melius intelligatur argumentum, Euclidis demonſtrationem aliquanto fuſius explicabimus. Propoſuerat ille hoc problema ſolvendum, *ſuper datam rectam finitam* (*puta* A B,) *triangulum æquilaterũ conſtituere.* Quod ut fiat jubet ut *centro* A, *intervallo* A B, *deſcribatur circulus* B C; *item centro* B, *intervallo* BA, *deſcribatur circulus* AC; *&* *a puncto* C, *in quo circuli ſe mutuo ſecant, ducantur ad puncta* A B, *rectæ* CA, CB. His peractis, demonſtrat Euclides *conſtructum triangulum* ABC *eſſe æquilaterum*; quia nempe *tres rectæ* CA, AB, BC, *ſunt inter ſe æquales*, (Quæ certe eſt

B de-

demonſtratio a vera & proxima cauſa: Nam niſi æqualitas laterum ſit vera immediata cauſa cur figura conſtructa eſt æquilatera, quænam ea vera cauſa ſit non poſſum ego vel conjectu-



ra aſſequi.) Æqualitas autem laterum CA, AB, BC, demonſtratur, eo quod CA, AB, *ſunt radii circuli* B C, *ideoq; æquales; item* BA, BC, *radii circuli* AC *ideoq; æquales: cum igitur tam* CA *quam* CB *æquatur rectæ* A B, *ſunt tres rectæ* C A, AB, BC, *inter ſe æquales.* Eſtq; hæc demonſtratio Euclidea.

Verum in hac demonſtratione, inquit Smiglecius, "Nemo "non videt, non aſſignari veram cauſam eſſendi; non enim "triangulum idcirco eſt æquilaterum quia eſt inter duos circu-"los conſtructum; nam etiamſi non eſſet inter duos circulos "conſtructum adhuc eſſet æquilaterum: Unde talis cauſa eſt accidentalis tali proprietati.

Cui ego multa regero.

1° Dico, quod, utut illud verum eſſet quod affirmatur, nempe demonſtrationes Mathematicas non per veram & proximã cauſam procedere; ſunt tamen ſatis ſcientificæ, ſi vel per cauſá remotiorem vel per effectũ, vel per aliud aliquod medium ab alio argumentandi loco deductum procedant, modò certò concludant rem ita eſſe prout affirmatur, atq; aliter eſſe non poſſe. Sufficit enim ad hoc, ut demonſtratio ſit ſcientifica, *ſi procedat per medium neceſſarium ex natura rei*: ut & ipſi quidem, qui hoc objiciunt, non negant, & *Smiglecius* etiam directè affirmat, *Diſp.* 15. *qu.* 1. *& alibi.* Quare nec ipſe, nec quos ſcio, alii, negabunt, Diſciplinas purè Mathematicas ſcientias eſſe, utut perfectiſſimum illis demonſtrandi modum non concedant.

2° Notandum eſt, quod ipſi, qui negant has demonſtrationes perfectas eſſe, in ratione demonſtrationis (ut loquuntur) *Potiſſimæ*; dubitant, an uſpiam aliàs occurrat in aliis ſcientiis ejuſmodi

ejuſmodi Potiſſima demonſtratio: ut apud *Smiglecium* videre eſt, quæſtione priùs citatâ.

3° Euclidis demonſtratio, non igitur concludit Triangulum ABC æquilaterum eſſe, eo quod *inter duos circulos conſtitutum ſit*, (ut *Smiglecio* videtur;) ſed quod *latera* CA, AB, BC, *ſint inter ſe æqualia* ut ex progreſſu demonſtrationis patet. Illud autem, de duobus circulis in conſtructione adhibitis, ſubſervit tantum æqualitati laterum demonſtrandæ.

4° Notandum eſt Euclidem loco citato, non tam veritatem Theorematis, quam conſtructionem problematis, demonſtrare. Non enim ſimpliciter Probaturus erat, *Triangulum* ABC *eſſe æquilaterum*; ſed *Triangulum, eo, quo imperatum erat, modo conſtructum, eſſe æquilaterum*; ſeu Hypotheticam hanc propoſitionem, *ſi Triangulum ſic conſtruatur, erit æquilaterum*, veram eſſe. Jam vero, quanquam aliunde fortaiſſe conſtare poſſit veritas conſequentis, nempe *Triangulum* ABC *eſſe æquilaterum*; veritas tamen conſequentiæ (*nempe illud ex conſtructione ſequi*;) non aliunde probatur, neq; ex alia cauſa magis immediata dependit, quam ex ipſa conſtructione: nempe quia cõſtructor ſic procedendo acceperat æquales circulorum radios. Ex vera igitur propria & immediatâ causâ demonſtravit Euclides *conſtructionem problematis* quamvis igitur, *Triangulum illud æquilaterum eſſe*, demonſtrare videtur per cauſam vel remotã vel accidentalem: At certe *conſtructionem illam problemati ſatisfacere*, (quod erat Euclidi demonſtrandum) per veram, proximam, & immediatam cauſam demonſtratur.

5° Etiam addendum eſt, in nulla quidem ſcientia expectandum eſſe, ut omnes ibidem demonſtrationes æquali perfectionis gradu procedant. Abundè ſufficit, ſi demonſtrationes aliquæ ſint per veras & proximas cauſas, ideoq; τῦ διότι quanquã demonſtrationibus illis τῦ διότι, paſſim immiſceantur aliæ τῦ ὅτι. Ut in ſcientiis omnibus abundè liquet.

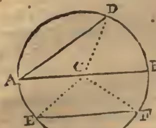
6° Igitur concedo, ſi non demonſtrationem propoſitam, at ſaltem alias non paucas, in matheſi paſſim occurrentes, procedere, non tam a cauſis proximis & immediatis, quam ab aliis locis Topicis; adeoq; demonſtrationes eſſe τῦ ὅτι, non διότι.

7° Nego tamen, in omnibus demonſtrationibus Mathematicis illud obtinere. Multas enim a veris & proximis cauſis procedere, adeoq; demonſtrationes eſſe τῦ διότι, contendo. Ideoq; *Smiglecii* enumeratio demonſtrationum, quas eſſe τῦ

ὅτι contendit, utut vera eſſet, non tamen eſt ſufficiens enumeratio, cum occurrant aliæ non paucæ, quas eſſe τῶ διότι liquet.

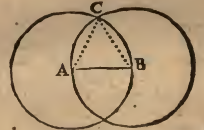
80 Igitur ut rem totam dilucidius expediam, tres præſertim demonſtrationum Mathematicarum ſive modos, ſive gradus, ſive ſpecies ſtatuo.

Prima quidem eſt illa demonſtratio, quæ per *deductionem ad abſurdum*, ſeu impoſſibile, procedit; ἀπαγωγὴ dicta: quæ, rem ita eſſe, demonſtrat, eo quod ſit impoſſibile, ut ſecus ſit. Ut ſiquis demonſtraturus, *Rectarum circulo inſcriptarum, longiſſimam illam eſſe quæ per centrum tranſit*; illud ita eſſe aſſerat, quoniam impoſſibile eſt aliam quamvis, per centrum non tranſeuntem, vel longiorem eſſe, vel quidem æqualem. Supponatur enim, ſi fieri poſſit, recta A D ἀδιάμετρος, per centrum non tranſiens, diametro A B, per centrum C tranſeunti, æqualis, vel etiam ipſa longior: & ducatur, a centro C, recta C D. Dico rectam C D æqualem eſſe rectæ C B, quoniam utraq; eſt recta a centro ad circumferentiam ejuſdem circuli; ideóq; A C D, (ex duabus rectis A C, C D compoſita,) erit æqualis diametro A C B, (quoniam ſi æqualibus æqualia addantur, tota erunt æqualia;) ſi igitur A D ſit æqualis ipſi A B, erit etiam æqualis ipſis A C, C D, ſimul ſumptis, (nam quæ eidem vel æqualibus æquantur, etiam inter ſe æquantur;) ſi A D longior ſit ipſa A B, erit & longior, quam A C, C D, ſimul ſumptis, (quibus ipſa A B æqualis eſt,) At horum utrumq; abſurdum eſt & impoſſibile. Cum enim A D ſit recta, quæ inter data puncta breviſſima eſt, & quidem unica; impoſſibile eſt ut vel longior ſit, vel etiam æqualis, ipſis A C, C D, ſimul ſumptis, quæ non niſi per circuitum quendam a puncto A ad punctum D procedunt. Non eſt igitur recta A D, vel æqualis vel major quam eſt A B. Sed & eadem omnino demonſtratio procederet, ſi ubivis aliàs recta non per centrum ducta inſcribatur, puta E F: ſi enim E F ſit major vel æqualis ipſi A B, erit proinde major vel æqualis E C, C F, ſimul ſumptis; quoniam E C radius



dius æquatur radio A C, & C F radius æquatur radio C B; ergo tota A C, C B, (hoc eſt, A B,) æquatur toti E C, C F: At impoſſibile eſt ut recta EF vel æquet vel ſuperet rectas E C, C F ſimul ſumptas, (cum recta ſit breviſſima inter data puncta,) ergo etiam impoſſibile eſt ut vel æquet vel ſuperet rectam A B (ipſis E C, C F, ſimul ſumptis æqualem.) Cum igitur impoſſibile ſit ut A D, vel E F, vel alia quævis recta non per centrum, æquet aut ſuperet rectam A B (vel aliam quamlibet per centrum ductam:) ſequitur, Rectarum circulo inſcriptarum, quæ per centrum tranſit eſſe longiſſimam. Quod erat demonſtrandum. Demonſtratur autem, ut patet, deductione ad impoſſibile.

Secunda demonſtrandi ratio, eſt, *Oſtenſiva τȣ̃ ὅτι*. Ut, ſi *recta*



A C demonſtretur *æqualis eſſe recta* B C; quoniam utraq; demonſtrata fuerat æqualis ipſi A B: quæ autem eidem ſunt æqualia, ſunt & æqualia inter ſe. Eſtq; hæc demonſtratio quidem oſtenſiva, ſed tantum τȣ̃ ὅτι, non autem τȣ̃ διότι. Communis enim utriuſq; æquatio eidem tertiæ, indicat quidem earum æqualitatem inter ſe, non autem illius cauſa eſt. Eſſent enim ipſæ AC, BC, ſibi invicem æquales, etiamſi ipſa AB non fuiſſet ducta.

Tertia vero demonſtrandi ratio, quæ & omnium perfectiſſima, eſt *Oſtenſiva τȣ̃ διότι*. Quæ demonſtrat & *quod* ſit, & *quare* ſit. Ejuſmodi eſt demonſtratio, ſiquis *Radios omnes ejuſdem circuli æquales eſſe* inde demonſtret, quod definiatur circulus (ſaltem definiri poſſit) *Figura plana, unicâ lineâ curvâ contenta, quæ a medio comprehenſi ſpatii æqualiter ubiq; diſtat.* Si enim circuli eſſentia poſtulet, ut ipſius peripheria æqualiter a centro diſtet; immediate ſequitur, tanquam a cauſa vera & proxima, radios omnes, quibus illa diſtantia menſuratur, etiam equales eſſe.

autem ex unitatibus compoſita multitudo. Sic enim Euclides, *lib.* 7. *de.* 1, 2. Μονάς ἐστι, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται. Ἀριθμὸς δὲ, τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος. *Unitatis & Numeri definitiones.*

Ex his autem Unitatis & Numeri definitionibus, pleriq; arbitrantur unitatem numerorũ catalogo non accenſendã, adeoq; numerum minimum Binarium eſſe; quanquam illud quidem Euclidem uſpiam dixiſſe non memini. *An Unitas ſit Numerus.*

Miror tamen eouſq; hanc ſententiam invaluiſſe, cum non minus Unitas, quam Binarius numerus, aut quivis alius, reſpondeat quæſtioni *Quot ſunt.*

Hac autem de re, erat mihi quidem in animo, litem neutiquam movere; cum illa controverſia Logica potius ſeu Metaphyſica, quam Mathematica, videri poſſit; ſaltem obiter monuiſſe, non modo *Unum* ſed & *Nullum*, apud Arithmeticos eodem omnino modo ac reliquos numeros tractari, adeoq; apud illos (quicquid de Metaphyſicis dicendum ſit) vel pro Numeris, vel quaſi numeris reputari. Operæ tamen pretium fortaſſis erit paucis oſtendere, cur unitatem putem vere numerum eſſe, aliiſq; numeris annumerandam.

Nec huic forſan advertabitur Euclidis aliorumq; ſententia probe intellecta. Cum enim nonnulli Unitatem, propriè loquendo, non modò Numerum eſſe negent, ſed & numeri partẽ; adeoq; *numeri principium impars* eſſe dicant, ut eſt Magnitudinis *Punctum*, & Temporis *Momentum*: Intelligendi fortaſſe ſunt de Monade ſeu unitate, non ut numerum ſingularem deſignat, ſed ut eſt communis quaſi numerorum omnium Denominatio, ſive denominator. Sic enim numerus Quaternarius eſt, qui quatuor unitates numerat, Ternarius qui tres, Binarius qui duas & Singularis pariter qui unam quidem Unitatem deſignat. Secus enim non video quo modo vere dici poſſet, unitatem non eſſe numeri alicujus partem: cum certum ſit, *Unum* non minus eſſe *Duorum* dimidium, quam *Duo* medietatem eſſe τῶν *Quatuor*. Dum igitur *Quatuor* dico tantundem valere ac *quatuor unitates*; vox illa *unitates* nec numerus eſt, nec pars numeri, ſed vel numeri denominatio ſeu denominator, vel ipſum numeratum. Vox autem *Quatuor* eſt earum unitatum numerus. Ita cum *Unum* tantundem valere dico ac *Unam unitatem* μίαν μονάδα. Vox illa *Unitas* eſt numeri denominatio, ſeu numerator; vox autem *Una* numerus eſt, ſeu unitatum multitudo *Quo ſenſu unitas negatur eſſe numerus.*

titudo, (*multitudinis* nomine laxius accepto, ut poſt dicetur,) dicit enim *Quot* vel *quam multæ* unitates adeſſe dicuntur, nimirum unicam.

Aliud autem eſt negare *Unitatem*, τὴν μονάδα, aliud vero negare τὸ ἕν *Unum*, numerum eſſe: Eodem enim ſenſu & ἡ δεκὰς numerus eſſe negari poſſit, quamvis δεκὰ numerus eſſe non negetur: Siquis enim *duas decadas* numeret, erit *Decas* numeri denominatio, *Duo* vero decadum numerus.

Nullitas, principium numeri; eo ſenſu quo punctum, magnitudinis. Sed revera, ſi accurate loqui velimus, non tam unitas quam *Nullitas* (ſi ita loqui liceat) ſeu *Nullum*, (non tam μονὰς ſeu ἑνότης quam οὐδενότης, οὐδένεια, ſeu τὸ μηδέν,) idem reſpectu numerorum obtinet, quod Punctum reſpectu magnitudinis, & Momentum reſpectu temporis. Ut ex operationibus Arithmeticis cum conſtructione Geometrica comparatis liquido conſtare poſſit penitius intuenti. Unitas vero inſtar certæ cujuſdam lineæ, ſeu alius magnitudinis, ad arbitrium poſitæ, ad quam aliarum homogenearum fit comparatio.

Mihi ſaltem hoc videtur dicendum. Magnitudo reſpondet quæſtioni Πόσον ἐστι. Numerus vero, quæſtioni Πόσα ἐστι. Unde tam Numerus quam magnitudo Ποσότης non incommode dici poteſt. Latina vero *Quantitatis* appellatio non tam cōmode videtur (quoad nominis notationem) utriq; applicabilis, cum ſola continua Quantitas dicit *Quantum* quid ſit; Diſcreta vero, non *Quantum* quid, ſed *Quot* ſunt; ac ſi *Quotitas* potius dicenda eſt quam quantitas: (ſed de nomine non eſt ut litigemus, dummodo de re conſtet. Ut autem magnitudo, puta Linea, inchoatur a puncto, quod omnino magnitudinis expers eſt, & quidem (poſitive) nihil eſt, ſive nullius magnitudinis: ipſa vero Linea tanta eſt quanto eſt ipſo ſive Puncto ſive nihilo major: Ita & Numerus, non ab unitate, ſed revera, a nullitate, inchoatus, tantus eſt, quanto eſt ipſo Nullo major. Et ut *Punctum* puncto additum, ſive ſemel ſive centies id fiat, non efficit quantū; nec etiā Linea, vel quævis alio magnitudo, adjectione Puncti, etiā centies repetita, omnino major fit, aut, ejus ablatione, minor: ita & *Nullum*, ſive τὸ μηδέν, μηδενὶ additum non faciet ἕν, nec numerus adjectione τοῦ μηδενὸς augetur quidquam, aut ipſius ablatione, minuitur.

At interrogabitur forſan, Num velim ego a Veterum pariter

&

& Recenſiorum omnium ſententiâ diſcedere, qui uno ut dicta em vocant Principium Numeri?

Reſpondeo, 1° Nihil abſurdi eſſe ma[illegible] ſe e; præſertim in Mathematicis. Nec hoc illorum laudi [illegible] quicquam detrahit, nam & illi prioribus addiderunt.

2° Non mihi tamen volupe eſt ab aliis diſcedere, niſi ubi rei neceſſitas & manifeſta ratio ſuadent. Nec enim placet eorum temeraria audacia, qui cum ſe vel tantillum ſcire ſentiunt, aliorum omnium peritiam vel flocci faciunt, vel ſupercilioſe contemnunt: atq; illud potius ſatagunt, ut aliorum, ſive veris ſive fictis, σφάλματα inſultent, quam ut eorum vel ſenſa ſatis intelligant, vel probe compertis aſſentiantur. Eſt enim illud vel juvenilis nonnunquam levitatis, cum cognitione plerumq; non niſi mediocri conjunctæ, vel ſupercilii aliquando faſtus indicium; potius quam ſubacti & maturi ingenii argumentum. Nec raro a rebus perperam intellectis, potius quam a veris illorum quos culpant erroribus, hujuſmodi inſultus ortum ducunt: & ea ipſa quæ culpant, ſi intelligerent, non culparent. Et quidem eorum pars longe major qui veterum ſenſa rejiciunt & flocci faciunt, ipſorum loco vel eadem ipſa quæ culpant, mutata tantum phraſiologia, ſubſtituunt, vel ſaltem non meliora; & in eos non raro errores neſcii incidunt, eoſq; pro novis inventis reputant, quos veteres, ſcientes, declinarunt.

3° Quod ad rem præſentem attinet, aſſero, & veterum ſententiam probe intellectam, & quæ nos aſſerimus, ſatis conſtare poſſe. Ipſa enim *Principii* vox duplici ſaltem acceptatione occurrit: prout nempe ſignificat *Primum quod ſit*, vel *Ultimum quod non*. Ut ſiquis *Motum* ordiri dixerit vel ab *ultimo momento quietis*, vel a *primo momento motus*. Sic ſi hæredis jus in rem hæreditariam *ab ipſo patris interitu*, vel a ſupremo paternæ vitæ momento, dicatur; eſt hoc, principium *Ultimum quod non*: ſupremum enim vitæ paternæ momentum ultimum eſt eorum quibus hæres ſuccedaneus jus non habuit. Si vero dicamus, Hæredis jus inchoari a *primo momento ſucceſſionis*; etiam ita vere dicitur; ſed eſt hoc principium *Primum quod ſit* (Atq; huc facit diſceptatio illa de termino vitæ ac mortis apud Gellium *l.* 6. *c.* 13. & apud Auguſt. *de civit. Dei. l.* 13. *c.* 9, 10, 11.) Pariter de principio

Hujus ſententia, cum ſententiis veterum conciliatio.

 numeri

numeri dicendum eſt. ſi *Primum quod ſit* quæratur; *Unitas* aſſignanda eſt, ut quæ eſt numerus omnino primus & minimus: Si vero *ultimum quod non*; aſſignandum eſt τὸ *μηδὲν*, ſive *Nullum*, ut quæ eſt numerorum omnium negatio. At de Quantitate continua, ſeu Magnitudine, ſi quæratur *Ultimum quod non*, *Punctum* aſſignamus, quod omnis quidem magnitudinis expers eſt, cui tamen ſi vel tantillum accedat, emergit quantum: ſin quæratur *Primum quod ſit*; illud omnino non eſt aſſignabile; non datur enim minimũ quantum, cum omne quantum, qua quantum, ſit in infinitum diviſibile. Atq; hinc ortum eſt quod Veteres, principium Numeri deſignaturi, *Unitatem* poſuerint, nempe *Primum quod ſit*: Magnitudinis verò principium, *Punctum* dixerint, nempe *ultimum quod non*; quoniam in magnitudine, *Primum quod ſit* non eſt aſſignabile. Non autem eodem ſenſu dicitur Unitas pricipium Numeri, quo Punctum principium Magnitudinis; hoc enim ſenſu, non τὸ *Unum*, ſed τὸ *Nullum*, erit numeri principium, nempe *Ultimum quod non*.

Nollem autem ut quiſquam me de lanâ caprinâ contendere exiſtimet, dum numeri Principium curioſius inquiro: Inſignis enim eſt hujuſce rei utilitas, præſertim in Analytices ſive Algebræ ſpeculationibus; quo melius operationis Arithmeticæ cum Geometricis conſtructionibus congruentia percipiatur. Atq; hinc obſcuritas non parva eſt exorta, quod vera numerorum & magnitudinum comparatio vel non ſatis fuerit a multis intellecta, vel minus ſaltem diligenter conſiderata. Atq; hoc animadverterunt, credo, Dominus Des Cartes, ejuſq; ingenioſiſſimus interpres Dominus a Schoten; illi enim, dum effectiones Geometricas Arithmeticis operationibus adaptant, unitatem non inſtar Puncti habent, ſed ut lineam quandam ad placitum aſſumptam, reliquoſq; deinceps numeros aliis deſignant lineis, quæ ad lineam aſſumptam eandem habeant rationem quam expoſiti numeri ad unitatem. Eſt autem omnino impoſſibile, ſi Unitas inſtar Puncti habeatur, ut ea quæ par eſt congruentia inter Arithmeticas & Geometricas operationes conſervetur.

Quod unitas ſit Numerus.

Ego igitur affirmare non dubito, Principium numeri (eo nempe ſenſu quo Punctum dicitur Principium Magnitudinis) eſſe τὸ *μηδὲν*, ſive *Nullum*; *Unitatem* vero ſeu potius *Unum* non tam eſſe principium numeri (ſenſu quo dictum eſt) quam primum numerum; eſt enim vere numerus.

Neq.

Neq; me omnino movet, quod Euclides *Numerum* definiverit τὸ ἐκ μονάδων πλῆθος, *multitudinem unitatum*? Nam τὸ πλῆθος ibidem non ſtricte ſumendum eſt, prout *Multum* opponitur τῷ *Pauco*, vel τῷ *uni*; ſed ut deſignationem τῷ *Quot ſunt* indigitat. Si enim quæratur, *Quantum eſt*? reſpondendum erit de magnitudine: ſi verò, *Quot ſunt*? reſpondendum erit de multitudine: fieri tamen omnino poteſt, ut *Unum* reſpondeatur, quando de multitudine quæritur: *v. g.* ſi de unici filii parente, quæratur *Quot* filios (ſeu *quam multos*) habeat? reſpondendum eſt *unicum*. Quo ſenſu verò τὸ *unum* reſpondet quæſtioni *quam multa*: eodem & *unitas multitudo* dici poterit. Si quis vero *multitudinem*, vel τὸ πλῆθος ἀκύρως de unitate dici contendat: Concedo quidem, ſed & ἀκύρως de *duobus* dicitur, quæ non multa quidem, ſed *Pauca* ſunt. Erat autem hæc ἀκυρολογία hîc loci neceſſaria, quoniam vox κυριωτέρα nec apud Græcos (quantum ſcio) nec apud Latinos occurrat ulla. Atq; hanc τοῦ πλήθους ſignificationem ideo potius amplectendam exiſtimo, quod Euclides nuſquam (quod ſciam) unitatem numerum eſſe neget; ſed contrarium potius videatur ſentire, dum ipſam unitatem eodem plane modo quo reliquos tractat numeros.

Unum igitur numerum eſſe affirmo: Eſt autem numerus omnium *minimus* (& hoc quidem ſenſu, numeri principium recte dicitur, quia *primum quod ſic*, ſeu numerus primus:) minimum enim eſt quod affirmative reſpondet quæſtioni *quam multa*; ideoq; minima multitudo. Unum *eſt Numerus minimus.*

Verum quidem eſt quòd & *Nullum* reſpondeat aliquando quæſtioni *Quot* ſunt; Ut ſi quæratur, *Quot* ſint Cælorum ſolidi Orbes? reſpondebitur non inepte *Nullus*. At non propterea quod τὸ *Nullum* reſpondeat quæſtioni *Quam multa*, ideo & *multitudo* erit; quoniam reſpondet Negativè. Idem enim eſt *Nullus* ac *ne ullus*; ſicut *Nemo* idem ac *ne homo*. Eſt autem *Ullus* vox diminitiva a voce *Unus*: Ut enim dicitur *Puer*, *puerulus*, & (contracte) *puellus*, (extrito enim per Syncopen *U*, fit *puer'us* & ob Euphoniam, *puellus*;) & *Pulcher*, *Pulcherulus*, *Pulchellus* (pro *pulcher'lus*) *Tener*, *Tenerulus*, *Tenellus*: ſic *Bonus*, *bonulus bellus*: *Unus*, *unulus*, *ullus*: ſic *Vinum*, *Villum*, apud Terrent. *Adel.* Idem igitur eſt Latinorum *Nullum*, (hoc eſt, *ne unum*, vel *ne ullum*;) ac Græcorum Οὐδὲν & Μηδὲν, hoc eſt, οὐδὲ ἓν, μηδὲ ἓν, & Anglorum *None*, hoc eſt *not one*, vel *no one*. Non igitur *Nullum*, Nullum *non eſt numerus.*

 ſed

ſed *Unum* eſt numerus primus cum *Nullum* reſpondeat Negativæ: tollit enim ſubjectum prædicationis; nec tam oſtendit, quot ſint *unitates*, quam nullam eſſe: ut, qui dicit, *Nullos* eſſe orbes, negat orbes eſſe; orbis cum ſingulis ſit, [illegible].

Numeri fracti, non ſunt Numeri proprie dicti.

Siquis autem objiciat, interim dari multa inter Unum & Nullum; puta Dodrantem, Semiunciam, Quadrantem, Trientem, Semiſſem; item Beſſem, Dodrantem, & quincuncem Septuncem, Decuncem, Undecunciam, (aliaſq; ejuſmodi partes integri. Ut, ſi quæratur (inſtante hora nona) quot horæ poſt octavam tranſierint; reſpondebitur forte, nec unam, nec nullam, ſed ſemihoram præteriiſſe. Concedo quidem ſic reſpondeſderi poſſe: Concedo etiam numeros quos *Fractos* vocant, ſive *Fractiones*, eſſe quidem *Uni* & *Nulli* quaſi intermedios. Sed addo, quod jam tranſitur εἰς ἄλλο γένος. reſpondetur enim non de *Quot*, ſed de *Quanto*: Non enim dicitur, *Quot horæ* præterierint; ſed, *Quantum horæ*, ſeu quanta pars horæ; non πόσαι ὧραι, ſed πόσον τῆς ὥρας, ſeu πηλίκον. Pertinet igitur hæc reſponſio, proprie loquendo, non tam ad quantitatem Diſcretam, ſeu numerum, quam ad Continuam; prout hora ſupponitur eſſe quid continuum in partes diviſibile; quamvis quidem harum partium ad totum ratio numeris exprimatur. Quanquam enim non recte dicatur μηδὲν τῆς ὥρας, *nihil horæ*, recte tamen dicitur μηδεμίαν ὥραν, *nullam horam* tranſiiſſe, ne unam quidem. Idem dicendum eſt de Fractionibus omnibus; verbi gratia, ſi ($\frac{3}{4}$) tres horæ quadrantes præteriiſſe, dicatur; intelligitur, tantum horæ præteriiſſe quantum eſt numerus Ternarius (fractionis numerator) ad (ejuſdem Denominatorem) quaternarium, ſeu (quod idem eſt) ſupponitur hora (ut quid continuum) in quatuor partes Geometrice ſectæ, harum vero tres tantum aſſumtas eſſe, quæ quidem Arithmetice numerantur. Indicat igitur Fractionis *Denominator* Geometricam integri in membra partitionem, *Numerator* vero talium membrorum indicatorum numerum ſeu multitudinem Arithmeticam: adeoq; numerus *Fractionum* non tam Numerus eſt, quam numerorum ad invicem *Ratio*. Eſt igitur *Unum* Numerus minimus, non autem vel Nullum, vel Numeri Fracti.

CAP.

CAP. [illegible]

[illegible]

CUm Numerorum natura hæc [illegible], ut [illegible] multitudinem deſignet, ſeu [illegible] eſt, [illegible] apponatur [illegible], ſeu [illegible] Unitates [illegible] Unitatum multitudine [illegible] numerorum ſpeciem [illegible] eſt. Quælibet enim Unitatis [illegible] numerorum ſpeciem variat.

Si igitur, ubi prius Nulla erat, [illegible] Unitas, [illegible] numerus *ſingularis*. [illegible] adhuc a[illegible] Unitas alia, emergit numerus *Binarius*. accedat alia, [illegible] exſurgit *Ternarius*. [illegible] tem Unitate auctus fit *Quaternarius*: quem etiam *Quinarius* unitate ſuperat: & hunc *Senarius*: atq; ita deinceps de *Septenario*, *Octonario*, *Novenario*, *Denario*, *Undenario*, *Duodenario*, aliisq; ſequentibus dicendum eſt. [illegible] hæc vera numerorum Originatio, ſeu Procreatio. *Numerorum Procreatio.*

1 .
2 . .
3 . . .
4 . . . .
5 . . . . .
6 . . . . . .
7 . . . .
8 . . . .
9 . . . .
10 . . . .
11 . . . .
12 . . . .
&c.

Quoniam vero Unitatum acceſſio in infinitum extendi poteſt (nec enim numerus [illegible] adeo magnus eſt, quin illi poſſit Unitas, vel una vel plures, [illegible] eſt igitur impoſſibile, ut *numerus Maximus* [illegible] numeri ſpecies. Ideoq; quamvis numeros da[illegible], [illegible] *numerum*, (hoc eſt, qui terminum non habeat, ſed omnes ſuperet limites,) ſit impoſſibile: ſunt tamen numeri poſſibiles Infiniti; hoc eſt, nullus eſt omnino terminus numeris aſsignabilis, quo cum accedit numerus, ulterius augeri non poſsit. Quamvis [illegible] numerus *Minimus* aſsignetur Unitas, non tamen eſt aſsignabilis *Maximus numerus non eſt aſsignabilis.*

 numerus

[illegible library stamp]

numerus *Maximus*, ut nec Magnitudo vel Maxima, vel quidem Minima.

Cùm tot verò fuerint Numeri ſpecies: infiniti planè laboris videri poſſit, illarum ſingulis diſtincta nomina vel invenire, vel ediſcere, vel memoriâ retinere, & in uſum depromere. Quis enim mortalium tot excogitare valeat vocabula, quod ſingulis arenulis (nequid altius dicam) nomina ſuppeditarent? Quod ſiquis tamen fecerit; etiamnum centies millies labor idem iterandus erit, nec dum quot opus eſt aſſequetur.

Numerorum ordinata diſpoſitio & nomenclatura. Ne igitur infinitus evadat labor, pro qualibet Unitatis acceſſione nova vocabula cudendi, quibus emergentes numeri appellentur: Excogitavit prudens Antiquorum ſagacitas, vel Divina potiùs monſtravit indulgentia, Methodum (nunquam mirandam ſatis) qua infinitam hanc numerorum varietatem finitis vocabulis, & quidem paucis, deſignare poſſint: numeros ſcilicet, methodicæ diſpoſitionis ope, per Gradus & Periodos diſtribuendo: adeo ut paucis omnino Vocabulis totam numerorum molem, etiam multa millia excedentem, ſatis diſtinguere valeamus.

Apud Latinos Decem prioribus minimiſq; ſuum cuiq; nomen indiderunt, adeóq; *Unum, Duo, Tria, Quatuor, Quinq;, Sex, Septem, Octo, Novem, Decem*, numerabant.

Deinceps verò non tam Unitates numerabant quam Decadas; viz. *Decadem Unam, Decades Duas, Tres, Quatuor, Quinq;, Sex, Septem, Octo, Novem, Decem*; vel (ut contractius loquuntur) *Decem, Viginti, Triginta, Quadraginta, Quinquaginta, Sexaginta, Septuaginta, Octoginta, Nonaginta, Centum*: Idem enim valent *Viginti* ac *Decades Duæ*, *Triginta* idem ac *Decades Tres*, & ſic deinceps. *Centum* verò idem valet ac *Decades Decem*, ſive *Una Centuria*. De horum autem Vocabulorum ratione pòſt dicetur.

Poſtquam autem ad *Centum* perventum eſt, non tam Unitates, aut etiam Decades, quam *Centurias* numerabant, viz. *Centuriam Unam, Centurias Duas, Tres, Quatuor, Quinque, Sex, Septem, Octo, Novem, Decem*; vel, contractè, *Centum, Ducenta, Trecenta, Quadringenta, Quingenta, Sexcenta, Septingenta, Octingenta, Nongenta, Mille*. Idem eſt enim *Ducenta* dicere, ac *Duas Centurias*; *Trecenta* idem ac *Tres Centurias*; idem verò *Mille* ac *Decem Centurias*.

Quum verò ad *Mille* deventum eſt, ipſa *Millia* numerabantur; nempe *Mille, Bis Mille, Ter Mille*, &c. vel *Mille, Duo Millia, Tria Millia*

Millia, & ſic deinceps ad *Decem Millia, Centum Millia, Millies mil-lia, Decies millenamillia, Centies millena millia, Millies millena mil-lia, Decies millies millena millia*, & ſic deinceps in infinitum.

Si verò inter majores numeros, præter Juſta Millia, ſuperſint Centuriæ, aut, præter Centurias, etiam aliquot Decades, aut tandem, præter Decades, Unitates aliquot; illæ etiam ſunt ap-ponendæ. Ubi proponatur numerus (2345) *Bis mille trecenta quadraginta quinque*; eſt numerus ille duobus millibus major, tribus verò millibus minor: ideoq; exceſſus ſupra *Duo Millia*, adjungendus eſt, nempe *Trecenta*; nec ita tantùm, ſed & *quadra-ginta*; & deniq; *Quinque*.

Sic apud Græcos; poſt numeratos decem priores numeros, Ἓν, Δύο, Τρία, Τέσσαρα, Πέντε, Ἓξ, Ἑπτὰ, Ὀκτὼ, Ἐννέα, Δέκα; numerantur deinde Decades, Εἴκοσι, Τριάκοντα, Τεσσαράκοντα, Πεντήκοντα, Ἑξήκοντα, Ἑβδομήκοντα, Ὀγδοήκοντα, Ἐννενήκοντα, Ἑκατὸν, ubi diverſi Monadum numeri, terminationibus tantùm variati, tot Decades ſignificant: prout apud Latinos *Triginta, quadraginta*, &c. in quibus terminatio *ginta* idem valet quod Græcorum κοντα, mutato nempe κ in g (literam ejuſdem or-gani) quod tamen redit nonnunquam in derivatis, nam pro-miſcue dicimus *Vigeſimus* & *Viceſimus*, item *Trigeſimus* & *Triceſi-mus*. Deinde Διακόσια, Τριακόσια, Τετρακόσια, Πεντακόσια, Ἑξα-κόσια, Ἑπτακόσια, Ὀκτακόσια, Ἐννακόσια, *ducenta, trecenta, qua-dringenta, quingenta, ſexcenta, ſeptingenta, octingenta, nongenta*. Ubi Græca vocabula Διακόσια, Τριακόσια, &c. a Monadum nu-meris, Δύο, τρία, &c. ſeu δὶς, τρὶς, &c. cum voce Ἑκατὸν compo-ſitis derivantur: ut Latinorum *Ducenta, Trecenta*, &c. a vocibus *duo, tria*, &c. cum voce *Centum* compoſitis. Quæ ſequuntur verò Chiliadum nomina Χίλια, Δισχίλια, Τρισχίλια, &c. reſpondent Latinorum numeris *Mille, Bis Mille, Ter Mille, &c.* donec deven-tum eſt ad Μύρια, Δισμύρια, &c. *Decem Millia, Viginti Millia*, & ſic deinceps.

Apud Hebræos ratio non diſpar ratio eſt. Nam poſt Mona-dum numeros אחד שנים שלש ארבע חמש שש שבע שמנה תשע עשר *Unum, duo, tria, quatuor, quinque, ſex, ſeptem, octo, novem, de-cem*; ſequuntur, עשרים שלשים ארבעים חמשים ששים שבעים שמנים תשעים מאה *Viginti, triginta, quadraginta, quinquaginta, ſexaginta, ſeptuaginta, octoginta, nonaginta, Centum*: deinde מאתים *ducenta*, שלשה מאות *trecenta*, ארבעה מאות *quadringinta, &c.* uſq;

Apud Græcos.

Apud Hebræos

uſq; ad אלף *mille*, אלפים *bis mille* שלשה אלפים *ter mille*, & ſic deinceps ad רבבה *decem millia*, & quæ ſequuntur.

Numeri autem intermedii, tam apud Græcos & Hebræos, quam Latinos, ex aliorum compoſitione nomina mutuantur, ut אחד עשרה שנים עשרה שלשה עשרה ἕνδεκα, δώδεκα, τρισκαίδεκα, &c. *Undecim, duodecim, tredecim, quatuordecim, &c.* ſic εἴκοσι ἕν, εἴκοσι δύο, εἴκοσι τρία &c. *Viginti unum, viginti duo, viginti tria*, &c. ſic διακόσια τριάκοντα τέσσαρες, *ducenta triginta quatuor*; δισχίλια τριακόσια τεσσαράκοντα πέντε, *bis mille trecenta quadraginta quinque*; aliaq; numerorum nomina compoſita. Atq; eodem omnino modo etiam in aliis linguis uſu eſt.

Sufficiunt igitur pauciſſima vocabula exprimendis Numeris quaſi infinitis. Hæ enim duodecim voces, *Unum, duo, tria, quatuor, quinque, ſex, ſeptem, octo, novem, decem, centum, mille*, cum earum conjugatis, ſufficiunt numeris omnibus exprimendis.

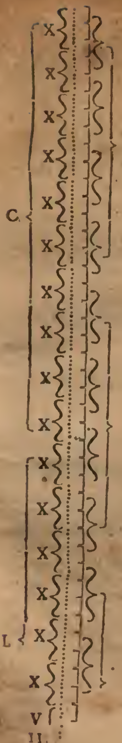
Ut autem hæc numerorum ordinatio facilius percipiatur; ponatur ſeries Punctorum quantumlibet longa; ſingulæ verò punctorum decades ſeorſim notentur, totidem uncinis diſtinctæ, quarum quælibet X notetur. Decem vero hujuſmodi decades conjunctæ conſtituunt Centuriam quam indicat litera C; & (ſi eouſq; extenderetur ſeries) decem centuriæ colligatæ conſtituerent Mille. Multo autem facilius eſſet ſingula Millia, vel etiam ſingulas centurias, aut Decades numerare, quam ſingulas unitates: faciliuſq; multo mente concipitur ejuſmodi multitudo, ita in Decades et Centurias diſtributa, quam dum totidem puncta indiſcriminatim & confuſe apponuntur. Nec multo ſecus ſe res habet in Tacticis, ubi militum ordinata diſtributio conſideratur. Nam diſtributis militibus in varias Legiones, Cohortes, Quaterniones, aliaſq; ejuſmodi partes, partiumq; particulas & membra; facile eſt iis omnibus ab Imperatore mandata tradi: ſin promiſcua turba ſeu multitudine ἀτάκτως confundantur, impoſſibile eſt ut omnes imperia vel perſentiſcant vel exequantur. Atq; hæc nunc de numerorum conſtitutione & Ordinatione, prout vulgo apud omnes uſurpantur.

Duo autem hic in genere monenda exiſtimo; & duo itidem inde obſervanda.

Quamvis alia quævis proportio adhiberi poſſet.

Monitorum primum hoc eſt; Quod quamvis (ut patet) Numeri vulgo proportione decupla diſtribuantur, ita nempe ut decem Unitates in una Decade colligantur, itemq; decem Deca-

des



des in una centuria, ut & centuriæ decem in una Chiliade, & ſic deinceps; Potuiſſet tamen alia quævis proportio adhiberi; puta quadrupla, quintupla, ſextupla, aut quævis alia. Ita ſeries punctorum modo propoſita, quæ ex uno latere diſtribuitur juxta proportionem decuplam, in decades, & centurias, ſeu decadum decades; adeoq; continet unam centuriam, & ſex inſuper Decades, ſeptemq; Unitates: eadem ex alio latere proportione quadrupla diſtribuitur, in Quaterniones, eorumq; quadrupla, & ipſa itidem quadruplata; adeoq; continet duos Quaterniones quaternionũ quadruplicatorũ, & inſuper duos Quaterniones quadruplicatos, cum uno etiam Quaternione ſimplici, tribuſq; unitatibus.

Et revera, alia nonnunquam proportio aliquibus in rebus uſurpatur. Sic enim in fractionibus (ut vocantur) Aſtronomicis, ſive Sexagenariis; 60 minuta quarta conſtituunt unũ minutum tertiũ; 60 minuta tertia unũ ſecundũ; 60 ſecunda unũ minutũ primũ; & totidẽ minuta prima, unũ gradũ, proportione continua ſexagecupla. Sic, apud Hebræos: annus quiſq; ſeptimus erat Sabbaticus; Sabbaticorũ vero quiſq; ſeptimus erat Jubilæus: adeoq; anni ſeptẽ conſtituunt unã annorum Hebdomadem, & ſeptem hebdomades unam periodum Jubilaicam, ſunt enim ſepties ſeptem (ſeu ſeptem hebdomades) quadraginta novem. Dicetur forſan, quod Jubilæus, non quadrageſimus nonus, ſed quinquageſimus annus erat. Fateor quidem annum quingeſimum Jubilæo deſtinatum, ſed incluſive, Jubilæo

nempe utrinq; poſito in computum admiſſo ; eo ſcilicet modo, quo ludi Olympici quolibet anno quinto dicuntur celebrari (nempe incluſive) cum tamen Olympias ſit revera ſpatium quatuor annorum, ut notum eſt.

Hoc autem maxime perſpicuum eſt in operationibus Algebraicis ; ubi Unitas, Radix, Quadratum, Cubus, aliæq; (ut loquuntur) deinceps poteſtates, juxta quamlibet proportionē proponuntur. Eſt autem ille progreſſus poteſtatum non niſi graduum in certa ratione progreſſus. Ut in ratione decupla, erit Decas, *Radix* ; centuria, *Quadratum* ; Mille, *Cubus*; Decies mille *Quadrati-quadratum*, & ſic deinceps. In ſexagecupla proportione, ſi minutum Quartum ut *Unitas* ponatur, erit minutum tertium *Radix*, minutum ſecundum *Quadratum*, minutum primum *Cubus*, Gradus vero *Quadrati-quadratum* ; & ſic deinceps. In proportione ſeptupla ſi Unitas Annum deſignet, erit *Septennium* (ſeu annorum Hebdomas) *Radix*, Periodus Jubilaica *Quadratum*, &c. Atq; idem accidit in qualibet proportione aſſumpta. Qua de re plura poſt dicenda erunt.

Decupla tamen omnes utſi ſunt

Alterum eorum quæ monenda duxi, hoc eſt ; Quod quamvis Numeros licuerit qualibet proportione diſpoſuiſſe ; tamen, quod mirum dictu eſt, in eadem proportione Decupla omnes ubiq; terrarum gentes mire conſpirant. Neſcio enim an ulla unquam natio reperta fuerit, quæ numeros proportione Decupla non diſpoſuit. Sic enim Hebræi, Græci, Latini, hodierni Indi, Barbari omnes, etiam ipſi Americani. Licet enim aliis aliquando proportionibus, aliquibus in rebus uſi fuerint, (prout in ponderum Scrupulis, Granis, Unciis, Libris ; item in nummorum Denariis, Solidis, Libris, &c.) Numerorum tamen univerſalis diſpoſitio proportione decupla ſemper, quod ſciam, & ubiq; obtinuit.

Hac Numerorum diſpoſitio, ipſarum Gentium diſtributione antiquior.

Hinc duo mihi videntur ſerio obſervanda, ut quæ manifeſto inde conſequuntur ; quæ nemo, credo, qui rem paulo intimius penſitaverit, omnino dubitare poterit. 1° Gentes omnes ab eadē origine ortas eſſe, & quaſi ex eodem trunco in varios ramos diviſas. 2° Hanc numerorum peritiam & diſpoſitionem illâ Gentiū diſtributione antiquiorem eſſe. Impoſſibile enim omnino videtur, & plane incredibile, ut omnes omnino ubiq ; terrarum Gentes vel fortuito quidem, vel etiā ex pacto, in eandē proportionem incidiſſent, niſi ab eodem fonte communi quadam tra-

ditione

ditione derivaſſent. Secus enim cur eandem potius numerorum diſpoſitionem, quam eandem numerorum, ponderum, aut menſurarum, rationem obtinerent; nemo facile dixerit: in his autem quam inſignis ubiq; & fere infinita ſit varietas nemo neſcit.

Qua vero de cauſa proportionem Decuplam in diſponendis numeris elegerint veteres (primi nempe numerorum diſpoſitores,) potius quam aliam quamvis, cum potuiſſent ad libitum quamlibet aliam adhibuiſſe; non niſi conjecturâ valemus aſſequi, tanquam in re omni memoria antiquiori. Si autem conjecturæ locus ſit, nulla mihi potior occurrit ratio, quam quod propter Digitorum numerum illud fecerint. Sicut enim Menſurandi rationem ab ipſo corpore humano deſumptam eſſe conſtet (inde nempe deſumptæ ſunt menſuræ plurimæ, ut Digitus, Pollex, Palmus, Spithama, Pes, Cubitus, Ulna, Paſſus, Orgyia, &c.) inde & Numerandi pariter rationem deſumptam eſſe, pluſquam eſt probabile. Ideoq; cum ſingulis digitis totidem Unitates numeraſſent, neceſſe eſt, ut, poſt integram decadem, denuo ab Unitate incipiant, progrediendo ad ſecundæ decadis terminum; & ſic deinceps; poſt quamlibet finitam decadem, denuo ad unitatem redeundo. *Unde deſumpta.*

Atq; hactenus Numerorum Conſtitutionem, ex Unitatibus; & eorum in proportione decupla Diſpoſitionem, per Decadas, Centurias, & Millia, tradidimus. Sequitur ut eorundem Nominum, ſaltem apud Latinos, Etymologiam, & eorum Notationem ſive Scriptionem explicemus, adeóq; tam Appellandi quam Deſcribendi rationem.

CAP. VI.

Latina Numerorum Nomina à Græcis derivantur. Aliæ quam plurimæ Etymologiæ paſſim immiſceatur.

NUmerorum Nomina quod attinet, eorúmq; Etymologiam; non eſt ut in omnibus linguis illud proſequar. *Numerorum Nomina.*

Nomina numerorum apud Hebræos, ſunt, ni fallor, (vel omnia, vel pleraq; ſaltem,) purè Primitiva, & ad placitum *Hebræa.*

impoſita; adeo ut in illorum originem inquirere ſupervacaneum ſit.

Græc. Atq; idem ferè de Græcis dicendum eſt: vel enim ea lingua purè Primitiva eſt, nec aliunde derivata, (præter vocabula nonnulla ab Hebræis & Arabibus mutuata,) vel ſaltem, ſi fuerint olim linguæ unde deſcenderat, illæ nunc penitus ignorantur; adeo ut ubi ad Græcam originem deventum ſit, non licebit ulterius progredi. Affirmat quidem *Plato* in *Cratilo* Græcos a Barbaris vocabula multa accepiſſe: at quænam illa fuerint, ut & a quibus mutuata, non nobis erit adeo facile inveſtigatu.

Latina. Latina verò numerorum Nomina omnia, a Græcis fuiſſe deſumpta, ego omnino exiſtimo; quanquam eorum aliquot ab eorum origine adeo videantur remota, ut ægrius agnoſcantur. Nos a facilioribus exorſi reliqua ſuo ordine attingemus.

Octo. *Octo* dicitur a Græcorum ὀκτώ. Hinc vero *octavus* (ὄγδοος) *octies*, *octonus*, *octonarius*, &c.

Duo. *Duo* a Græcorum δύο dicitur; ſicut & *Ambo*, ab ἄμφω dicitur.
Ambo. (Inde vero noſtrum *two*, ſicut a *Tribus*, *ſex*, *ſeptem*, *octo*, noſtra *Three*, *ſix*, *ſeven*, *eight*; & a *Noveni*, *Deni*, noſtra *nine*, *ten*; Niſi potiùs antiquos Teutones, unde nos illa accepimus, hæc omnia immediate a Græcis, dicamus accepiſſe: at *Four* & *Five*, tam a Græcis quàm Latinis remotiùs abſunt.)

Bis. Latinum *Bis* a Græcorum Δὶς derivatur, converſo δ in *B*; ſicut *Bellum*, *Bellatores* dicimus, quod olim *Duellum*, *duellatores* ſcribebant: (forte tamen a Græco Πόλεμος dictum eſt *bellum*.) ſic *Duonus*, *duellus* dicebant priſci, pro quibus nos *Bonus*, *bellus*: ſic *Bes*, *beſſis*, olim *Des*, *deſſis*. videndi Varro & Scaliger ad Varr: & Feſt. atq; Merul. ad Ennium.

Bini, binarius, biſarius. A *Bis* vero *Bini* dicitur, & *Binarius*, & *Biſarius*, quaſi *Bi-varius*: vel forſan *Biſarius*, *Triſarius*, &c. quaſi διφάσιος, τριφάσιος: mutato σ in r, ut in χθὲς, χθεσὶ, *heri*; χυμὸς *humor*, πράσον *porrum*.

Viginti. Sed & *Viginti* (quaſi *Biginti*, vel *Biiginti*) terminatione a Græcorum κοντα deſumptâ. Quæ enim Latini *Triginta*, *Quadraginta*, &c dicunt, Græci τριάκοντα, τεσσαράκοντα, &c. efferunt.

Sed & ipſum εἴκοσι Græcè, quaſi δίκοσι dictum puto; ipſamq; terminationem κοσι (in εἴκοσι) tantundem valere ac κοντα in ſequentibus. Nam quòd terminatio ſit iſtic ι, hic α, non major eſt diſcrepantia, quàm cùm Latine dicamus *Viginti*, at *Triginta*. Quod illic autem reperiatur σ, hic τ, omnino hoc exiguum eſt,

cum

cum hæ literæ ſint facillimè commutabiles, (ut ab ἀνύτω, fit Futurum, ἀνύσω, item ὀρύττω & ὀρύσσω promiſcuè dicuntur, aliáq; ejuſmodi infinita; & quidem εἴκοσι Doricè εἴκατι dicitur; ſic *Aquam* Germani *Waſſer* dicunt, Angli & Belgæ *Water*, aliáq; ſunt innumera.) *N* verò, in terminatione κοντα, non Radicale eſt, ſed Epentheticum, ideóq; in Derivatis excidit; eodem enim prorſus modo ab εἴκοσι formatur εἰκοστὸς, ac a τεσσάκοντα τεσσακοστός. Sic a Latinorum *Triginta* formatur *Trigeſimus*; amiſſo *n*, & *t* in *s* converſo, ut ῥητίνη *reſina*, πτύω, Æol. σπύω *ſpuo*, σπετρίζω *ſperno*, & Angl· *ſpurn.* μετὰ *meſſis*. Ut igitur pro *nt* in *Triginta*, ſubſtituitur ſola litera *s* in *Trigeſimus*; ſic pro ντ in terminatione κοντα, ſubſtituitur ſimplex σ in terminatione κοσι. Sic a λέοντι, τιθέντι,&c. formantur λέουσι, τιθεῖσι,&c. Sic pro εἰσὶ, τύπτουσι,&c. dicunt Dores ἐντὶ, τύπτοντι,&c.

Leviculum autem eſt illud, quod Latinorum terminatio *ginta* per *g* ſcribitur, Græcorum verò κοντα per κ, earum enim literarum facillima eſt commutatio, cùm ſint ejuſdem organi; Imo ab iiſdem vocibus *Viginti*, *Triginta*, promiſcue dicimus *Vigeſimus*, *Trigeſimus*, & *Viceſimus*, *Triceſimus*, (ut ſupra dictum eſt.) item *Viceni*, *Triceni*. Sic Græcè Γάϊος dicitur qui Latine *Caius*; & contra, a Græcis κυβερνάω, κύκνος, fiunt Latina *guberno*, *cygnus*, aliáq; ejuſmodi non pauca paſſim occurrunt. Neq; omnino mirum eſt literas *C* & *G* promiſcuè uſurpari; quod quidem facile fieri poteſt, cùm literarum *C* & *G*, rectè pronunciatarum, (nempe ut Græcorum κ & γ) ſonus admodum affinis eſt. Quamvis enim literæ iſtæ *C* & *G* alios habent nunc dierum ſonos ante vocales E & *I*, quàm ante *A*, *O*, *V*; illud tamen antiquitùs obtinuiſſe neutiquam eſt credibile. Nulla enim ratio videtur cur *Accipio*, *Acceſſus*, &c. pro *Adcipio*, *Adceſſus*, &c. ſcriberentur; niſi ut ſonus literæ D tranſeat in ſonum ſequentis conſonæ, (ut cùm *corripio*, *collimo*, *commuto*, *arripio*, *aſſumo*, *allicio*, *appono*, *attendo*, *affundo*, &c. efferuntur pro *conripio*, *conlimo*, &c.) ideóq; ſi *C* ut *S* ſonaretur, potius *Aſcipio*, *Aſceſſus*, &c. ſcribendum eſſet, ut in *Aſſciſco*, *Aſſcendo*, &c. Atq; idem dicendum de litera *G*, propter voces *Agger*, *Aggeſtum*, *Suggero*, *Suggeſtum*, &c. nam certe *Adger*, *Adgeſtum*, &c. mollius ſonarent ſi, *G* debeat eo ſono proferri, quo nos nunc dierum efferimus literā *G* ante E & *I*, vel *Azger*, *Azgeſtum*, &c. ſi Gallorum more efferenda ſit. Nam mollior (qui dicitur) ſonus literæ *G*, magnā habet apud nos affinitatē cū

ſono literæ *D*, & literæ Z apud Gallos, imo ſonũ hunc in ſe continet. Nam verbi gratiâ, vox *Jupiter*, quam Germani ſonant *Tupiter*, Angli *Dyupiter*, Galli *Zyupiter* pronunciant.

Ut autem a *Bis* fiat *Viginti* (mutatâ literâ *B* in *V*,) non mirum eſt, cum *V* conſona, prout nunc dierum efferri ſolet, non aliter a *B* differat, quam *F* vel *Ph* a *P*, ſeu φ a π, hoc eſt, ut litera aſpirata a ſuâ tenui. Nam ſi literas P, B, pronunciaturis ſpiritus interceptus permittatur erumpere, formabitur illic F, hic V; *(prout nempe F & V nunc efferimus.) Imo eadem litera Græca βῆτα, ab aliis *Beta*, ab aliis (ſatis quidem barbare) *Vita* dicitur; hinc ſ & *v* in MSS. Græcis ſæpiſſime ſine confunduntur: & Hiſpani fere promiſcue, tam ſcribunt quam efferunt *b* & *v*: earumq; literarum affinitas maxima nemini non innoteſcit. Hinc a Græcorum βέλομαι fit Latinum *volo*; ab Hebræorum דוד fit Græcum Δαβὶδ, unde iterum Latinorum *David* & *Davides*, Anglorum *David*, Cambrorum *Dafid* & *Dewy*: A Latinorum *liber* & *libra* fit Gallorum *livre*; a *faber*, *febris*, &c. fiunt Gallorum *feve*, *fevre*, &c. Item a Latinorum *libero*, *cooperio*, *habeo*, *recipio*, &c. fiunt Anglorum *deliver*, *cover*, *have*, *receive*, &c. aliáq; innumera paſſim obſervanda ſunt; ut non mirum ſit *B* in *V* commutari. Monet tamen ex Salmaſio Gatakerus (quod nec mihi diſplicet) deduci poſſe *Viginti* a Dorico ϝίκατι, pro εἴκοσι: præfixo Æolico Digamma, ut in Ἴτέα *Vitex*, ἴτυς *vitus*, rotæ canthus, &c. unde Heſychio Γιτέα, ἰτέα: Γίαρ, ἔαρ (ver:) Γία, ἄνθη (violæ utiq;) κ in g permutato ut in κώβιος *gobius*, κύκνος cygnus: ν inſerto, ut in τόκα *tunc*, νίφω *ningo*, λείπω *linquo*.

* *Vid. Tractatum* de Loquela, *quam mea* Grammaticæ linguæ Anglicanæ *præfixi.*

Ut autem a *Bis* fit *Viginti*, ſic a *Tribus*, *Quatuor*, &c. vel *Ter*, *Quater*, &c. fiunt *Triginta*, *Quadraginta*, &c. terminatione ubiq; a Græcorum κοντα deductâ. Pariter apud Anglos, *Twenty*, *Thirty*, (ſeu, ut loquuntur *Scoti Threety*) *Forty*, &c. a *Twaine*, *Three*, *Four*, &c. deſcendunt, additâ terminatione *ty* a voce *Ten*, ut videtur, deſumpta. Sed progrediendum eſt.

Triginta &c.

Tres. *Tres* idem eſt Latine ac τρεῖς Græce: Atq; hinc *ter*, *ternio*, *ternus*, *ternarius*, *tertius*. &c.

Decem. A Græcorum Δέκα Latinorum *Decem* deſumptum eſſe nemo dubitat, terminatione α in *em* mutatâ. A *Decem* vero formantur *Decimus*, *Decies*, *Deni*, (quaſi Deceni,) *Denarius*. &c.

Sex. *Septem.* Sic ab ἕξ, ἑπτὰ, formantur *Sex*, *Septem*; ſpiritu aſpero in *s* converſo. Quod facile fieri poſſe, ab aliis derivatis abunde liquet

quet. Dicimus enim ab ὗς *ſus*, ab ὑπὸ *ſub*, ab ὑπὲρ *ſuper*, & *ſupra*, at in *up* & *upper*, inde fortaſſe deductis, *s* iterum excidit,) ſic ab ἕρπω *ſerpo*, ab ἑρμῆς (vel εἱρμὸς); *ſermo* ſic ab εἴρω (dico) *ſero*, *ſerui*, o ſenſu quo dicitur *ſerere ſermones*, & *vario ſermone ſerebant*. Virgil. h. e. *loquebantur*: atq; hinc *diſſero diſſerui*: Et ab εἴρω (necto) it *ſero* (hoc eſt *jungo*) unde *ſertum*, *deſero*, *conſero*: (At *ſero*, *ſevi*, hoc eſt, *ſemino*, a σπείρω dicitur.) ſic ἅλλω *ſalio*, ἓ *ſe*, ἑὸς *ſuus*, ὅλος *ſolus*, ἥλιος *ſol*, ἅλς *ſal*, unde & σάλος *ſalum*; ſic ὕλη *ſylva*; ab ἅμα vel ὁμῶ fit *ſimul*; ſic ὅμοιος *ſimilis*, (ubi terminatio *lis* ſervilis eſt, ut in *facilis*, *humilis*, &c.) ab ἵζω, ἵζω, ἵστημι, *ſedeo*, *ſiſto*; ab ἕπω *ſequor*; ſic ab ὕπατος *ſummus*, (mutato τος in *mus*, hoc eſt, terminatione ſuperlativi Græci in terminationem ſuperlativi Latini; & in *m*, euphoniæ gratia, nempe pro *ſupmus*, *ſummus*, ut ab ὕπνος *ſomnus* & *ſopor*,) ſic ab ἥμισυ *ſemis*, & pro ἡμι in compoſitis Græcis fit *ſemi* in compoſitis Latinis, ut ἡμικύκλιον *ſemicirculus*: Sed & pro ſpiritu leni nonnunquam ſubſtituitur *s*; ut ab εἰμὶ *ſum*, quod ab εἰμὶ deſcendere aliis perſonis magis liquet, cum enim ab εἶς, ἐσὶ, ἐστὲ, dicimus *es*, *eſt*, *eſtis*, cur non ab εἰμὶ, ἐσμὲν, εἰσὶ, vel Dor. ἐμμὶ, εἶμες, ἐντὶ, *ſum*, *ſumus*, *ſunt*.) ſic εἰ *ſi*, ἐὰν *ſin*, (hoc eſt, *ſi vero* ἐὰν δὲ, at *ſin* pro *ſi non*, ex *ſi* & *ne* componitur) Et ante conſonas non raro præfigitur *ſ*; ut a γράφω *ſcribo*, a γλάφω, γλύφω, *ſcalpo*, *ſculpo*, (tanquam a γάλφω & γύλφω, metatheſi literæ, ut cum pro κράτος & κράτιστος dicimus κάρτος & κάρτιστος) quanquam & ipſa γράφω, γλάφω, γλύφω, ab Hebræo כרב *exarare*, deſumpta videntur, mutato (in poſterioribus) ר in ל: cui affine eſt כתב *ſcribere*. Sed de his ſatis A *ſex* autem & *ſeptem* fiunt *ſexies*, *ſextus* (quaſi ab ἕκτος) *ſenus* (quaſi *ſexenus*) *ſenio*, *ſenarius*, &c. Item *ſepties*, *ſeptimus* (ut ἕβδομος) *ſeptenus*, *ſeptenarius*. &c.

A Græcorum Εἷς, ἕν, ἑνὸς, fit Latinorum *Unus*; mutato ε in *u*; quod ipſum non raro fit. (Atq; hinc *Unicus*, & *ullus*, quaſi *unulus*, & *nullus*, quaſi *ne ullus*, ut ſupra dictum eſt.) Sic ἑὸς, *ſuus*; σὸς, τεὸς, *tuus*; σκόπελος, *ſcopulus*; νεφέλη, *nebula*; a φλέγω ſunt φλὸξ, φλογὸς, & *fulgeo*; ab ἀμέλγω, ἀμολγὴ, & *mulgeo*, ab ἀμόργω, ἀμοργὴ, *amurca*; a μείλιχος vel μειλίσσω, *mulceo*; a μέλι, *mel* *mulſum*; σφενδόνη, *funda*.

Aut potius dici poſſit *Unus* quaſi contracte pro *Venus* vel *Wenus* ut *Venus*; Nempe pro ſpiritu aſpero vocis ἕν, ſubſtituta conſona *V*; quæ olim (non raro ſaltem, ſi non ſemper) mollius efferebatur

efferebatur ut noſtrum *W*; (quanquam Priſciani tempore duriorem ſonum adepta fuerat, quem & nunc dierum apud pleroſq; retinet;) quod ex derivatis non paucis liquet; eſt enim apud nos *Vinum*, wine; *Via*, a way; *Veni*, went; *Volo*, *vellem*, will, would; *volvo*, wallow; *ventus*, wind; *vellus*, wooll; *veſpa*, a Waſp; &c. Sive autem dicat quis voces noſtrates illas à Latinis, vel potius tam noſtras quam Latinas ab antiqua lingua Teutonica deſumptas, (quæ quidem cum Latina poterit de antiquitate contendere,) perinde omnino eſt; utcunq; enim, affines illos fuiſſe ſonos non eſt dubium. Sic pro *Valens*, *Valerius*, ſcribebant Græci οὐάλης, οὐαλέριος, & a Græco οὐαὶ fit Latinum *Væ*, & Anglicum *Wo*, vel (prout dicebant veteres, & etiamnum dicunt Boreales) *wea*.

Ut autem pro ſpiritu aſpero præponatur *V*, hoc eſt, ut pro *Henos*, dicatur *Venus*, *Venus*, ſeu *Wenus*, facile concedi poteſt; ſic enim ab ἑστία dicitur *Veſta*, ab ἕσπερος *Veſper*; imo etiam pro ſpiritu leni; dicitur enim ab εἴδω (quod ipſum a ידע) *video*; ab ἐσθὴς, *veſtis*; ab ἐσθίω, *eſca* & *veſcor*; ab οἶνος, *vinum*; ab ἔντερον, *venter*; ab ἴς, *vis*, (niſi forſan a βίη,) ab ἔαρ vel ἦρ, *ver*; ab ἴον, *viola*: Sed & non raro interſeritur *V*; dicitur enim ab ὠὸν, *ovum*; ab ὄϊς, *ovis*; a βοῦς βοὸς, *bos*, *bovis*; a ναῦς ναὸς, *navis*; a παῦρον, *paulum*, *parum*, *parvum*; ab αἰὼν *ævum*, (unde etiam noſtrum *aye*, & *age*, nam y & g ſunt apud nos literæ admodum affines, & ſæpiſſime commutabiles;) ſic a νέω, *novi*; ab ὄγδοος, *octavus*; a νέος, *novus*; & ab ἐννέα, *novem*: ſic Ἰέρνα, *Hiverna*, *Hibernia*, *Ireland*.

Ideo autem *Unum*, tanquam ex *Venum* contractum judico, (potius quàm immediate ab ἑνὸς, mutato *e* in *u*, quia prima ſyllaba longa eſt, quæ, ſi immediate fieret ex ε, potius eſſet brevis. Forſan dici poterit *Unum* ex ὁ ἓν (per craſin) contractum fieri.

Hinc autem et *Bonum* dici facilè conjicio, quaſi ὁ ἓν, *quod unum eſt*. Platonici enim omnes formalem rationem *Boni* in *Unitate* collocant, unde factum eſt quòd *Unum & Bonum converti* dicimus. Nam ſi ex ὁ ἓν *Hoenum*, vel *Venum* dicatur, &, præfixo F Æolico, *Foenum*; digamma illud facile in B migrabit, ut fiat *Boenum*, unde & *Boenè*, et (extritis inde e, hinc o) *Bonum* et *Bene*, unde et *bellus* pro *bonulus*, vel *benulus* vel *boenulus*. Atq; hinc forſan evenit; quòd, *bonum* et *benè* quamvis ſint conjugata, in altero *o*, in altero verò *e* maneat. Sic *forem* et *fore* dicimus, pro *fuerem* et *fuere*,

ab

antiquo *fuo*, *fui*, quod a Græco φύω deſcendit. Ex F autem fie-
poſſe *B*, vel inde liquet, quod *Bubulcus* et *Bubſequa* dicitur, pro
viſequa, a Græco βοῦς βοὸς, Æolice βοϜος.

Ne quem verò terreat in *Bonum* & *Bene*, ſyllaba prima brevis,
iam exſpectarent potiùs longam futuram ſi ab ἐὺν contracta
catur: Sciendum eſt regulam illam, *ſyllabas contractione factas
gas eſſe*, non ubiq; valere; quod, ne longiùs abeam, in ipſis *fo-
m*, & *fore*, ex *fuerem* & *fuere* ab antiquo *fuo* contractione factis,
t extra dubium; ſic in *fit* pro *fiet*, & multis aliis.

Quod quidem quò rectiùs intelligatur, notandum eſt, con-
actionem duplici modo fieri; nempe vel θλίψει, vel κράσει.
oc quidem, quando duarum ſyllabarum vocales in unam ſive
ocalem ſive diphthongum coeunt, & quidem vel mutatæ vel
nmutatæ, (niſi malis illam κρᾶσιν, hanc συναίρεσιν appellare)
t (apud Græcos) τείχεϊ τείχει, τείχεος, τείχους, τείχεα τεί-
η, &c. Et ſyllaba ſic contracta ſemper evadit longa. Illud
utem, quando, nullâ vocalium coalitione factâ, altera planè
xpulſa, reliqua intacta manet, ut in ἐμαυτοῦ, σαυτοῦ, &c. ſic in
ρᾶς, σφέ, σφῶιν σφίν· & multis aliis; vel etiam ubi diphthongi
ocalis altera expellitur manente reliqua, ut in Doricis πώτες,
ῶτα, πῶτον, &c. pro πώατες, πώατα, πώατον, & multis aliis. Et
uoties hoc evenit, vocalis ea quæ ſupereſt eandem quam priùs
abuit retinet quantitatem, nempe ſi priùs longa fuerit, longa
anet, ſin brevis fuerit, manet adhuc brevis, nec propter con-
tractionem producitur. Sic apud Homerum

Iliad. α. v.88. Ὄρσο Θέτι· καλέει Ζεύς --
Odyſ: η. v.342. Ὄρσο κίων ἂν ξεῖνε. ——
} pro Ὄρσεο

Et Il. ε. v.109. Ὄρσεο Τυδείδη Καπανηϊάδη. ---

Aliquando autem vix aliud ſupereſt indicium an κράσει an
θλίψει fiat contractio, quam ex quantitate vocalis quæ ſuper-
ſt, ut βόας, βῶς; ubi duæ vocales breves αε in unam longam α
oaleſcunt; adeoq; ſi α etiam prius ante contractionem fuiſſet
onga, perinde fere eſſet ſive per κρᾶσιν ſive per θλῖψιν contracti-
nem fieri diceremus, ſaltem niſi aliorum verborum analogia
orum alterum potius ſuaderet.

Quod autem Græcis familiare eſt, illud & Latinis non raro
ſu venit: præſertim in verbis tertiæ & quartæ conjugationis
n *io* terminatis, ut *cupio, fugio, audio, neſcio, &c.* Cum enim ad
formam tertiæ conjugationis (*Lego, legis, legit, legimus, legitis,*

 legunt

legunt, legebam, legam, lege, legito, legerem, legere, &c.) dicendum eſſet verbi gratia, *cupio, cupiis, cupiit, cupiimus, cupiitis, cupiunt, cupiebam, cupiam, cupie, cupiito, cupierē, cupiere, cupiendi, cupiens, &c.* dicimus tamen contractius *cupis, cupit, cupimus, cupitis, cupe, cupito, cuperem, cupere, &c.* nempe per θλίψιν prioris vocalis, reliquâ ſuam quantitatem retinente; at *cupio, cupiunt, cupiebam, cupiam, cupiendi, cupiens,* &c. omnino incontracte: & ſimiliter in iis omnibus quæ, etiam poſt contractionem, reputantur adhuc tertiæ conjugationis. In reliquis autem quæ ad quartam conjugationem referuntur, (quanquam & ea omnia ſint revera non niſi verba tertiæ conjugationis contracta,) per κρᾶσιν plerumq; fit contractio nempè *audis, audîmus, audîtis, audî, audîto, audîrem, audîre, &c.* duabus nempe vocalibus brevibus *ii*, vel *ie* per κρᾶσιν in unam longam î coaleſcentibus; at *audit* (ultima brevi) per θλίψιν prioris *i*, reliquâ ſuam quantitatem brevem retinente; item *audio, audiunt, audiebam, audiam, andiendi, audiens, &c.* incontracte: et ſimiliter in aliis verbis conjugationis quartæ. Verum et hic ſuam libertatem exercent Poetæ. Nam verbi gratia, *Neſcis* apud Ovidium habet ultimam brevem, quaſi θλίψιν paſſum non κρᾶσιν; et contra *Neſcit* apud Juvenalem habet ultimam longam, quaſi per κρᾶσιν fiat contractio, non per θλίψιν. Atq; idem accidit in *abit, obit, perit, redit, it, neſcit, petit, &c.* quæ apud poetas ultimam habent longam; imo & *abiit, periit, rediit, ſubiit*, pro *abivit, perivit, redivit, ſubivit*, ultimam habent longam, nempe *v* conſona prius in *u* vocalem tranſeunte (quod aliquandò fit, ut *evoluiſſe* pro *evolviſſe* apud Ovidium & *Sylua* pro *Sylve* apud Horatium, &c. uti notavit Cl. Gatakerus in tractatu ſuo de Bivocalibus,) & deinde facta craſi duarum vocalium *ui* in i longam. (Exempla ſiquis petat, ne longus ſim, apud Smetium quærat; in ſuo quævis ordine.)

His adjungere licet *potitur* apud *Virgilium*, & *Ovidium* (probatos authores) penultima correpta, quaſi θλίψιν non κρᾶσιν (uti in ſimilibus fieri ſolet) paſſum.

Ovid. *Mars videt hanc, viſamq; cupit,* potiturq; *cupita.*

Virg. *Vi* potitur; *quid non mortalia pectora cogis.*

Sic *potiretur, potiturus, nequitur* &c. de quibus vide Smetium.

Secunda conjugatio Verborum, eſt forma contracta tertiæ. Quod autē de conjugatione quarta dictum eſt, & de ſecunda fere intelligendum erit. Nam verba conjugationis ſecundæ vix aliter differunt a verbis tertiæ, quam quod in pleriſq; temporibus

oribus (intellige quæ a præſenti formantur, non item uæ a præterito) perpetuam fere patiantur craſin, nem- e vocalis *e* cum ſequenti, in *e* longum, puta *doces*, *doce-am*, &c. pro *doceis*, *doceebam*, &c. excepta tertia perſona ræſentis Indicativi, ubi pro *doceit* fit per θλίψιν *docet*, ultima revi. Sed & hic ſuam libertatem exercent Poetæ, nam *ide* apud Perſium & Catonem, & *cave* apud Horatium, ulti- nam habent brevem, (quod notant Lubinus & Farnabius, ad erſii Sat. I. verſ. 108.) ſed & *vale* apud Ovidium, (& ejuſmodi ortaſſis alibi occurrant alia,) quaſi per θλίψιν fieret contractio: d & *fervere*, penultima brevi legitur, quanquam a *ferveo*, uaſi ex *ferveere* non κράσει ſed θλίψει fieret.

Pari modo, ubi pro *poſſiem*, *poſſies*, *poſſiet*, *poſſiemus*, *poſſietis*, *ſſient*, (ex *ſiem*, *ſies*, *ſiet*, &c. prout olim ſcribebant, compoſitis) icimus contractius *poſſim*, *poſſis*, *&c.* duo illa *poſſim*, *poſſint*, per- ide eſt ſive per thlipſin ſive per craſin contracta dicas; at *poſſi-us*, *poſſitis*, per craſin, propter vocalem longam; *poſſit* per thlip- n, propter ultimam brevem; contra vero *ſit* ex *ſiet* contra- tum, quaſi per craſin non per thlipſin, ultimam pro- uctam habet apud Lucretium.

Deterior ſit ut forma muliercula ametur.

Poſſis indifferenter nunc per hanc nunc per illam; habet nim apud Horatium ultimam longam, apud Juvenalem ulti- am brevem, quaſi ille per craſin, hic per thlipſin contraxerat. triuſq; exemplum apud Smetium exſtat (librum pædagogis tis notum) hoc autem eò potius moneo, quoniam audivi non pridem D. *Prideauxium* μακαρίτην (virum omnigena eruditione fertiſſimum) immeritò a quodam taxatum, quaſi metri leges olaſſet, cum vocem *poſſis* ultima correpta in carmine uſurpaſſet, od tamen non niſi veterum exemplo fretus fecerat. Et qui- m Grammaticalis illa regula, cui nixus ille hanc protulit cen- ram, nempe quod Ultimam longam habeant *ſecundæ perſonæ gulares verborum in is, quorum ſecundæ plurales deſinunt in* ītis *penul-mâ producta*, non ſine grano ſalis admittenda eſt, nec quidem rāmatici omnes eam ita univerſaliter pronunciant, quod qui- s vacat facile collatis Grammaticis reperiant. Verum quidem , quod Syllabæ illæ longæ *eſſe poſſint*, & non raro *ſint*, non autem l neceſſario vel ſemper producendæ: cum veterum Poetarum

Poſſis, ultima ancipiti.

E 2 authoritas

authoritas (quæ hîc ſuprema lex eſt) ſæpiſſime in contrarium eat. Exempli gratia.

Ovid. Neſci *an excedant etiam loca, venimus illuc.*
Juven. *Tam jejuna fames,cum* poſsis *honeſtius illic.*
Perſ. -------- *nec te* quæſiveris *extra.*
Horat. *Integer eſt animi, ne* dixeris,*ergo abi parve,*
Juven. *Accipit Andromedem ſi* dixeris *æſtuo,ſudat.*
Virg. *Verum ubi auctores acie* revocaveris *ambos.*
Juven. *Græculus eſuriens ad cœlum* juſſeris *ibit.*

Et ſimiliter in aliis accidere, cui hæc non ſufficiunt exempla, invenire poterit ſi Smetium conſulat ad voces,*concluſeris, curtaveris,guſtaveris, juveris,oraveris, piaveris,poſſederis,ſpectaveris,ſpreveris, teſtaveris,verſeris,viceris,videris,&c.* Et quidem non modo in tempore Præterito modi ſubjunctivi, (ubi volunt Grammatici ſecundas perſonas plurales penultimam ancipitem habere,) ſed & in tempore futuro, (cujus ſecundæ plurales penultimam ſemper habent longam,uti iidem tradunt Grammatici,) ultima ſecundæ ſingularis ut plurimum corripitur (contra quam docet allegata regula) & non niſi raro admodum (extra poſitionem) producta legitur. Si quando autem dubium ſit an vox ejuſmodi ad tempus præteritum an ad futurum referenda ſit; at ſaltem ubi ſenſu imperativo uſurpatur,ad futurum certo certius referendum erit (non enim jubemus præterita ſed futura) atq; etiam ubi Hypothetice aliquid aſſeritur ſub conditione rei adhuc futuræ. Sed de his hactenus.

Summa huc redit, ſi ab ὃ ἓν vel Fὲν deducatur Latinum *Boenum* & *Boene*, & contractius (per thlipſin alterius vocalis) *Bonum* et *Bene*, erit nihilominus utrobiq; prima brevis.

Ab eodem autem themate Ἓν, formantur *ſemel*, *ſingulus*, & *ſimplus*, item *ſimplex* (quod non dicitur, ut vult *Scaliger*, quaſi *ſine plicâ.*) Nam eodem modo quo ab ἅμα vel ὁμοῦ fit *ſimul*,(præfixo *s* pro ſpiritu aſpero, & adjuncto ſervili *l* finali:) ſic, ab ἓν,
Semel. *ſemel*, *ν* interim in *m* converſo, (niſi potius ab ἁμὸς dictum putemus, quod Jonicè pro εἷς uſurpatur.) At *ſemel* & *ſimplex* ejuſdem eſſe originis, nemo dubitabit; cum ſyllaba *plex* ſit manifeſto adventitia, ut in *duplex, triplex,&c.* ut et *plus* in *ſimplus, duplus, triplus,&c.* quibus reſpondent Græcorum ἁπλοῦς, διπλοῦς, &c. Non enim ἁπλοῦς dicitur vel ab α στερητικῷ, vel ab α ἐπιτατικῷ, ſed vel quaſi ἁμοπλοῦς, ab ἁμὸς *unus*, vel ab α μόνωσιν ſignificante, ſeu *ſingularitatem*, ut vult Euſtathius; ut in ἁμάζων, ὁ ἀδελφὸς,

Simplex. Simplus.

ἀγάστωρ,

ἀγάστωρ, ἀγάλακτος, ἄκοιτις, ἄλοχος, ἀτάλαντος, ἀκόλουθος, &c. Atq; hoc facit quæ habet Euſtathius, dum exponit ἀγάστωρ, ὁμογάστριος: ἄλοχος (quæ et ἄκοιτις) ὁμόλεκτρος: Quid enim aliud eſt ὁμογάστριος, ὁμόλεκτρος, quam qui *communi* (hoc eſt, *uno eodem*,) ventre feruntur, aut lecto concumbunt. Nam *communionis* notio etiam *Unitatis* ſeu potius *Identitatis* notionem includit. Sic et ἅπαξ, ἅπας, et forte ἀμός, et hinc ἅμα, ὁμός, ὁμοῦ, ὅμοιος, ut et οὐδαμῶς, μηδαμῶς, quaſi *nullies*. Terminatio verò πλους, vel eſt a πέλω, ut Euſtathio videtur, vel eſt paragogica, ut vult Etymologicus. His autem *ſingulum* et *ſingularem* cognata eſſe patet: quæ ab ἑνικὸς dicta videntur, ut φρίκη *frigus*, πέφρικα *frigeo*, πύκτης *pugil*, κόμμι *gummi* κυβερνάω *guberno*. Sed et *ſincerus* etiam dicitur ab ἓν et κεράω ſeu κεράννυμι *miſceo*; quod ipſum et ἀκέραιον ſignificare putarem (non tam ab α στερητικῷ quam ab α μόνωσιν ſignificante;) ut id nempe ſignificent quod ex planè Homogeneis conflatur, et non ex varia mixtura: nec quidem magis diſtant voces ἀκήριος *ſincerus*, quàm ἀριστερὸς *ſiniſter*, (ubi ρ in *n*, ut in ἔρως *Venus*, ἑσπερία *Hiſpania*, ſic Ἐῤῥῖκος *Henricus*, quod nos *Henry*, et *Harry* dicimus.) *Sincerum* autem quaſi *ſine cerâ* dictum eſſe (quod Scaligero videtur) mihi neutiquam placet; partim quod ipſa præpoſitio *ſine* in compoſitione nuſquam occurrat, (ſed ipſius forſan loco nonnunquam præpoſitio inſeparabilis *ſe*, ut *ſecurus* quaſi *ſine cura*, vel *ſeorſim a cura*;) partim etiam quod hæc omnia *ſimplex*, *ſimplus*, *ſingulus*, *ſingularis*, *ſemel*, *ſimul*, *ſimilis*, *ſincerus*, cognatæ tam ſignificationis quàm originis eſſe nemo meritò dubitare poſſit, in omnibus nempe *Unitas* quædam ſeu *ſingularitas*, ſive, quod tantundem valet, *communitas* quædam ſeu *Identitas*, indigitatur: At qui *ſincerum* dictum putant quaſi *ſine cerâ*, et *ſimplex* quaſi *ſine plica*, non ipſi tamen dicerent, credo, *ſingulum* dici quaſi *ſine gulâ*, aut *ſimplum* quaſi *ſine pilo* vel *polo*, aut etiam vocibus *ſemel*, *ſimul*, *ſimilis*, ejuſmodi nugatorias derivationes affigerent. Sed progrediendum eſt ad ea quæ ſequuntur. *Singulus.* *Sincerus.*

Ab ἐννέα dicitur *novem*, ut a νέος *novus*, (ut ſupra dictum eſt,) terminatione item mutata ab *a* in *em*, ut a δέκα *decem*; ε item ſeu ſyllaba ἐν a principio pereunte, quod etiam in aliis Derivatis præſertim ubi ex una lingua in aliam tranſitur non raro fit. Sic, ab *expendo* dicimus *ſpend*, et ab *extraneus* fit Gallicū *eſtrange*, et noſtrū *ſtrange*: ab *Hoſpitale*, fit Ital. *ſpedale*, et Anglicū *ſpittle*, quod et *Hoſpital* et *Hoſtel* dicimus, nempe, Xenodochium: ſic ab *Epiſcopus* dicimus *Biſhop*: ita ἐρεύγω *ructo*, ἐρετμὸς *remus*, ἐρυθρὸς *ruber*, ἐρυ- *Novem.*

 θρὸν

ἐρυθρὸν *rubrum*, ἐρωτῶ, *rogo*; ſic ab ἀμέλγω, *mulgeo*, et noſtrum *milk*; ab ἀμαλὸς, μαλὸς, *mollis*; ab ὠθέω vel ὠθύω, *trudo*; ab ἐμὸς *meus*, ab ἀσπάραγος, *aſparagus*, *ſparagus*; ab ἀστὴρ, *aſter* & *ſtella* (quaſi *aſterula*:) ab ἀμάω, ἄμητος, ἀμητὴρ, fiunt *meto*, *meſſis*, *meſſor*; pro ἀμαυρὸς *obſcurus*, ἀμαυρόω, *obſcuro*, *infuſco*, dicuntur per Aphæreſin μαυρὸς, μαυρόω, unde Latinorum *Maurus* & *Mauritania*; a γάλα γάλακτος (quaſi a γάλαξ) *lac lactis*; a צדק צריק, δίκη, δίκαιος: a σφενδόνη, *funda*; ſic apud ipſos Græcos dicuntur promiſcuè γαῖα & αἶα, item ἐμοῦ, ἐμοί, ἐμέ, & μοῦ, μοί, μέ, item πᾶς, & ἅπας, ſic στάχυς & ἄσταχυς; γαῦρος, & ἀγαυρὸς *ſuperbus*, & alia multa; ſic ὅς & ἑὸς, αὑτοῦ & ἑαυτοῦ, κεῖνος et ἐκεῖνος, μαλὸς et ἀμαλὸς, ſic γαστέρες ἀργαὶ (*Tit.* 1.12.) pro γαστέρες μαργαὶ, hoc eſt γαστρίμαργοι *gulones*: Atq; apud Ionas & Poetas augmenti & reduplicationis rejectionem ſæpiſſimè fieri nemo neſcit, ut cum τύπτον et βλήμενος dicunt pro ἔτυπτον et βεβλημένος. A *novem* autem fiunt *nonus*, quaſi *novenus*, item *nonies*, *novies*, & *novenarius*, &c.

Centum. Ab ἑκατὸν fit *centum*: dempto a capite s, (ut ἐννέα *novem*) & Epentheticè inſerto *n*.

Hujuſmodi autem Epentheſis literæ *N*, vel *M*, (prout ſequens conſona palatina fuerit aut labialis) eſt frequentiſſima. A κῆπος fit *campus*; a סָדִין *ſindon*; a לַפִּד *lampas*, *lampadis*, & quidem λάμπω: & pro Hebræo Dages notiſſimum eſt Chaldæos & Syros ſæpiſſimè ſubſtituere literam *Nun*, (non modo ubi Dages eſt abſentis *Nun* vicarius, ſed & alibi.) Sic etiam ſive a תפף ſive a τύπτω fit τύμπανον *tympanum*: ſic a φάω, φαίνω, & φαντασία: a τάω, τείνω, & *tendo*; a τύπτω, *tundo*; a σπείδω, σπένδω: ab ἄχος, ἄχνυμι, *ango*, & *angor*, *angoris*; quod Angli *ake* & *ach* dicunt: ab ἔχις *anguis*, (ubi & χ in g tranſit, ut ἔγχελυς *anguilla*, χαλβάνη *galbanum*, βληχὼν *pulegium*, Χαρχηδὼν *Cartago*, ὄνυξ, ὄνυχος, *unguis* & *ungula* &c.) a πετάω *pateo* & *pando*; a χέω, χύω, χύνω *fundo*, (ubi & χ in f convertitur, ſic a σύγχυσις *confuſio*, a σχοῖνος *funis* & *finis*; ſic in χολὴ *fel*, χλόη *flos*, Χλωρὶς *Flora*: *Chloris eram quæ Flora vocor*, Ovid. *Faſt.* & χυμὸς *fumus*; niſi hoc ultimum potiùs a θύειν *adolere*, unde θύματα & θυμιάματα *ſuffimenta*, & θυμιᾶν *fumigare*, *ſuffire*, θ in f, ut in θύω *fio*, *ſuffio*; θῆρες Æol. φῆρες *feræ*, θέρω *ferveo*, θερμὸς *formus*, θράω, θραύω *frio*.) ſic a σχίζω σχίζον *ſcindo* & *findo*; ſed & a σχίζω σπινθαλμὸς, ſicut & Angli, eodem ſignificatu, a *ſplit*, *ſplinter*: a σπεύδω *feſtino* fit σφενδόνη *funda*, teſte Euſtachio: a λείχω *lingo*; a λείπω *linquo*, ab εἴπω *inquio*, (ubi π in *q* tranſit, quod ſæpe fit, ut poſt dicetur)

icetur) a ζάγω *jungo*, (ubi ζ in j tranſit, ut ζεὺς *Jovis*, *Jupiter*
el *Joupiter*, hoc eſt *Jovis pater*, ζεὺς πατὴρ, ut dicimus *Marſpiter*,
Dieſpiter, *Liber pater* &c. Sic Inſula *Zocotora*, ad Mare rubrum
oſita, unde *Aloe Zocotrina* nomen ſortitur, a nautis vulgò dici-
ur *Jacatra*: item *Succus*, Italice *ſucco* et *ſugo*, Hiſpanice *Xugo*, An-
lice *juyce*, quæ omnia a *ſugendo* dicta:) Illud autem *n* in *tundo*,
ndo, *ſcindo*, *findo*, *pando*, *linquo*, *lingo*, *jungo*, et ſimilibus, adventi-
um eſſe, inde magis liquet quoniam in derivatis frequenter ex-
dat; dicimus enim *tutudi*, *fudi*, *ſcidi*, *fidi*, *liqui*, *&c.* & a
ndo, *paſſum*, a *jungo jugum*, et a λείχω non modò *lingo* dicitur,
d et *liquor*, *liquidus*, (unde *liquido* et *liquet.*) et Anglicum *lick*,
æ quidem omnia ab Hebr. לחך vel לקק deſcendunt: ſic a
riginta, *trigeſimus*, a τριάκοντα τριάκοσ©, ut ſupra dictum eſt.
Sic a σκάζω (*claudico*) σκάνδαλον: ſed et *ſcando*, et *ſcala*, et σκα-
νὸς, quod ideo potiùs moneo, ut Geometricæ vocis σκαληνὸς o-
ginem obiter tradam. Formatur enim σκαληνὸς quaſi a σκαλὸς
l σκαλάω, aut ejuſmodi aliquâ voce (cui Latinorum *ſcala* vi-
tur affinis) quam a σκάζω vel σκάω facile deſcendere poſſe ne-
o dubitabit, ejuſmodi enim terminationes præter radicis ſub-
ntiam ſatis frequenter accedunt, ut in ipſo σκάνδαλον, ἁμαρτω-
ς, διδάσκαλ©, διδασκαλία, διδασκαλικὸς, διδασκαλεῖον, &c. ſa-
patet, ſic et ab ὁμὸς, ὁμαλὸς & ἀνώμαλ©, & ab εἴκω εἴκελ© : A
αλὸς verò, vel σκαλάω, vel ejuſmodi voce aliâ, facile fiet σκαλη-
, ut a Μαγδαλὰ Μαγδαλήνη: ſic κάρα κάρηνον, item γαλήνη (Eu-
chio teſte) a γελάω quod ipſum a γαίω (unde & γηθέω *gaudeo*;) ut
tem γαίω, γελάω, γαλήνη, ſic σκάζω, σκαλάω, σκαληνὸς dici poſſunt:
ri modo & σπάργανον, σπαργανόω, σπαργάνωσις, ſive a σπαργάω ſive
ργάω: ſic & ab ἔργον vel ἐργάζω, dicuntur ἐργαλεῖ©, ἐργαλεῖον, ὄργα-
, Ἐργάνη : item a σταφὶς, σταφυλὴ & σταφυλῖν© : ſic a καίω ſeu κάω
ο) fiunt κᾶλον (*lignum*) & κῆλον *jaculū lignēū*, item κήλων & κηλώ-
ν *tollenο*. Nec quicquam in contrarium ſuadet vocum ſigni-
atio: Conus enim ille *Scalenus* dicitur, qui erectus non eſt,
magis in alteram partem propendet, hoc eſt, *claudicat*; quid
m aliud eſt claudicare, quàm non erectus incedere, ſed ad
s alterutrum inclinatus? Atq; eodem plane ſenſu Triangu-
illud *Scalenum* dicitur, quod æquicrurum non eſt, ſed, prop-
crurum inæqualitatem, in latus alterum inclinatum. Sic e-
n ab eadem claudicationis ſive inclinationis notione, voces
do & *ſcala* non abludunt; in plano ſiquis incedit, non ille
ſcandere

ſcandere ſed *ambulare* dicitur; quod autem ad perpendiculum erigitur, eſt illud vix aut ne vix ſcanſile; adeóq; illud ſolummodo ſcandimus, quod eſt inclinatum ſive acclive: ſiquando autem erectum illud ſit ad cujus ſummum aſcendere velimus, illud *Scalæ* inclinatæ auxilio faciendum erit; ideóq; παρὰ τὸ σκάζειν *ſcala* dicitur, eadem ratione quâ παρὰ τὸ κλίνειν κλίμαξ. Sed de σκάζω, σκαλανὸς, & *ſcando* hactenus.

Ut autem *n* vel *m* adventitium non rarò inſeritur, ſic e contra *n* vel *m* radicale non rarò excidit, ut ubi Hebræorum *Nun* tranſit in Dages: & ab Hebræo *Nimrod* fiunt Græca Νέμβρωτος & Νεμβρὼδ (inſerto β ut in μέβλωκα, μεσημβρινὸν) &, apud Joſephum, Νεβρώδης, extrito μ radicali: ut literæ *n* vel *m* (ſaltem inſertæ) minor ratio in derivationibus habeatur.

A *Centum*, fiunt *Centies*, *centuria*, *centenus*, *centenarius*, *centurio*, &c.

Mille. Ut autem ab ἑκατὸν *centum*, ſic a χίλια fortaſſe *millia* dici poterit, mutato χ in *m*, ut cum a τρέχω in Aoriſto ſecundo fit ἔδραμον pro ἔτραχον, & inde δρόμος: quæ tamen ſi formari dicantur tanquam a δρέμω & non a τρέχω, ſaltem erunt δρέμω & τρέχω cognata. Sic quem vocant Græci Ἰάκωβον, Latini *Jacobum*, Hiſpani *Jago*, Galli *Jaques*, hunc Itali *Jacomo* appellant, & nos *James*. Deinde cum χ & φ, quamvis non ejuſdem organi, ſint tamen literæ invicem commutabiles, (ut ſupra oſtendimus, in σχοῖνος *funis*, χέω (χύδην) *fundo*, σύγχυσις *confuſio*, σχίζω ἔσχιδον *findo*, &c.) ipſa π, φ, β, cum litera *m* (ejuſdem organi) commutari poſſe aliunde liquet; dicimus enim a δαπάνη *damnū*, ab ὕπνος *ſomnus*, ſic ab ὕπατος (vel ὑπὲρ) *ſummus*; ſic *ſummitto*, *ſummoveo*, pro *ſubmitto*, *ſubmoveo*; item πολὺς *multus*, (niſi forſan a μάλα vel μάλιστα, α in *u*, ut in τλάω *tulo tuli*, κραιπάλη *crapulo*, στραγγαλῶ *ſtrangulo*, ἀγκύλος *uncus* θρίαμβος *triumphus*; at ſaltem μάλα & πολὺ apud Græcos, ſunt cognatæ ſignificationis, quidni & originis; quàm apud Latinos *multum* & *plus*:) μολύνω *polluo* (niſi forſan a παλάσσω *contamino*, unde πηλὸς *cœnum*, *lutum*; vel potiùs a *porro*, ſive *prorſus* & *luo*, unde *lutum* & *lues*, & fortaſſe *abluo*, *deluo*, &c. ne dicam *diluvium*, *illuvies*, *colluvies*, potiùs quam a *lavo*, quod eſt alterius conjugationis:) ſic μέρος *pars*, vel utrumq; (forſan a פרס) & μοῖρα *Parca* (niſi potiùs, ut Gatakero videtur, a πειρατῶ unde πείρω) itaq; videntur olim *Partæ* dictæ quæ nunc *Parcæ*: inde Propert. *l.* 3. *el* 4. ubi nunc *parca* legitur, veteres codices habere

ere perhibentur *parta*; *Optima mors Partâ quæ venit apta die*, i. τῇ ...φωμένῃ Scalig. Harum autem tertia, quæ Græcis ἄτροπος, atinis priſcis eſt *Morta* dicta, a μοῖρα, ſive εἵμαρται, unde & εἱ-μαρμένη. vid. Gell. *l.* 3. *c.* 16. *Mors* certè a μόρος, ut a πόθος ...ebs, a μένος *mens*:) ſic ab ἁπαλὸς fiunt ἀμαλὸς, μαλὸς & *mollis*; φαῦλος *malus*, (vel forſan a μαλὸς, *mollis ignavus*, ut κακὸς à χάζω *cedo*, *fugio*, & contra ab ἄρης ἀρετὴ unde & *ars* & *virtus*, niſi ſi ...ud a *viro*, quod a גבר ſunt qui velint, malim ego ab ἄρης vel ...ελῶ:) ſic μετὰ Dor. πεδὰ, *apud* & *poſt*: ſic a βουνὸς *mons*, (niſi ...is dici malit *montem* a verbo *minere*, quod apud Luc etiam reperitur, unde & *minæ* murorum; a *minendo* autem, ſive e-*minendo*, *mons montis*; ſicut, a *pendendo*, *pons pontis*; a *prominendo*, ...*montorium* quaſi *prominuntorium*; atq; ab eodem verbo *mineo* or-...m habent illa omnia *emineo*, *immineo*, *præmineo*, *promineo*, non ...tem a *maneo*; a *maneo* enim non *emineo*, ſed *emaneo* habetur, unde *emanſor* dicitur.) Sed & ipſum *m* aliquando ſimpliciter præfi-...tur, ut cum ab ἄρης ἄρειος fit *Mars*, *Martis*, (& forſan ab ἅλς, ...n modo *ſal* & *ſalum* ſed & *mare*,) ſic ab ἄρσην *mas maris*: ſed & ...in ὀρέγω *porrigo*; (niſi potius a *porro ago*, ut *porricio*, *porro jacio*, hoc ..., *projicio*; vel, quod ego mallem, a *porro rego*, propter præteri-...m *porrexi*, ad formam *direxi*, *ſurrexi*, *correxi*, &c. non *porregi* ad ...rmam *ſategi*, *peregi*, *redegi*, *ambegi*; ipſum autem *rego*, non tam a ...*ago* vel *res ago* dictum crediderim, quàm a Teutonico ſeu Sax-...ico antiquo *rice*, quod *dominium* ſive *regnum* ſignificat, quam ...cem adhuc retinemus in *Biſhop-rick*, hoc eſt, *Epiſcopatus*, ſive ...πλεξεὶ *Epiſcopi dominium*, inde autem *rego*, *rex*, *regnum*, *regio*, *&c.* ...ces enim *Latinas* non paucas a Teutonicis originem duxiſſe, ...o nullus dubito:) ſic ἄρω *paro*, ἄρτιος *par*, αἰδέω *pudeo*, ἥβη *pu-*... μόλυβδος *plumbum*, אור πῦρ.

Vid. noſtram Grammat. Linguæ Anglicanæ.

Verùm ego *Mille* & *Millia*, potius a μύρια, quam χίλια, dedu-...cem; (niſi potius vox ſit ab utriſq; conflata; nam principium ...tius μύρια exhibet, & finis χίλια:) nam λ & ρ facile tranſmu-...tur. Sic perinde dicitur κείβανος & κλίβανος: *parum* & *paulum*, ...umq; a παῦρος: ſic φραγέλλιον *ſcribunt* Græci quod Latini *fla-*...*llum*: γράφω & γλάφω voces ſunt affines utraq; a כרב, ſic σκαλ-... *ſcalmus*, a σκαίρω *ſalio*, Etymologo teſte; ſic *Willelmus* Græcè ...ρμος ſcribitur; ἑσπερία, *Hiſpania*, & *Hiſpalis*; ſic *puer*, *puellus*; ...r, *tenellus*; *pulcher*, *pulchellus*; *liber*, *libellus*; aliáq; multa. Sic a ...eco λείριον fit Latinum *lilium*, & forſan ab ἔρος vel ἔιρον, *vellus*,

F (quam-

(quanquam Varro & Plinius a *vellendo* volunt, unde vulſuram contra priorem probatum eunt: forta ſſe tamen a *μάλλος vel-leris*.) Sic ab *Epiſtola, Apoſtolo, Capitulo,* dicunt Galli *Epiſtre, Apoſtre, Chapitre*. Hinc decantatus ille Alcibiadis Tranliſmus, λ pro ρ pronunciantis; quo nomine ab Ariſtophane irridetur in *Veſpis*, Εἶτ' Ἀλκιβιάδης εἶπε πρός με τραυλίσας, Ὁλᾷς; Θέωλος τὴν κεφαλὴν κόλακος ἔχει, cum dixiſſet, ὁρᾷς Θέωρος τὴν κεφαλὴν κόρακος ἔχει, adeoq; Theoro, pro capite *Corvino* (hoc eſt, nigro) *Adulatoris* caput tribuit; falsè quidem & pro more ſuo. Et quidem *R & L in omnibus linguis facilè invicem commutantur*, ut notat doctiſſimus Cauſabonus ad Perſii. Sat. 5. verſ. 22.

Numeros Ordinales quod attinet, illi a Cardinalibus derivantur omnes, præter primores duos.

Primus. *Primus* nempe, quaſi *Proimus*, dicitur a Græco πρῶτος, mutata nempe terminatione ſuperlativi Græci in terminationem Latini, hoc eſt, τος in *mus*. Vel etiam (quod eodem recidit) a Græco πρὸ, Poeticè περὶ, fit Latinum *præ*, & inde *prior* & *primus*. Hoc enim dicere mallem, quàm *pridem, prior, primus*; cùm vox *pridem* videatur idem eſſe ac *prius demum*: vel ſaltem *præ* cum expletivo *demum* compoſitum; ut in *idem, ibidem, itidem, identidem, tantundem*, & ſimilibus.

Secundus. *Secundus* autem a *ſequor* dicitur, ut *oriundus* ab *orior*: Quod autem per *C* ſcribatur, & non per *qu*, hoc nihil eſt; tantundem enim valent: ſic a *qui* dicitur *cujus, cui*, vel (apud Plautum) *quojus, quoi*; a *ſecus* (adverbio) *ſequior*; a *ſecus* (præpoſitione) *ſequeſter*; ab εἰκὸς εἴκελος, *æquus* æqualis; & *perſecutio, ſecutus*, &c. promiſcuè ſcribuntur per *c* & *qu*, ſic *cum* & *quum*, aliaq; multa.

Quatuor. Duo ſaltem reſtant Numerorum nomina, nempe *Quatuor* & *Quinque*; quæ, quamvis a Græcis nominibus longiſſimè recedant, inde tamen orta puto. *Quatuor* enim Græcè dicitur τέσσαρες, Atticè τέτταρες & τίττορες, Poetice ſeu potius Æolice πίσυρες (apud Homerum Il. ο. & forſan alibi) item πίσυρες & πέτορες, (unde *Petorritum*, Flacco, a rotarum numero,) exinde Cambricum *pedwar*, Armoricum *peuar* (teſte Bocharto) & forſan inde Anglicum *ſower*, quod tamen Teutonicæ potius originis eſſe duco. At a τέσσαρα, vel τέτταρα, vel πέτορα, ad *Quatuor*, non ita difficilis eſt tranſitus; mutato nempe π in *Qu* vel *C*. Oſtendimus autem ſupra gutturales κ & χ cum ipſis labialibus π, β, φ. (aut quæ tantundem valent) aliquando commutari; ſic a χῖνος, fit

finis

is & ſunis; ϛφίζω, fundo; a χέω, ſundo; a χολὴ ſel & bilis; & contra
είπω, linquo; ab ἕπω, ſequor; ab ἕπω, inquam; ab ἵππ⊙, equus: a
ρέω vel πορέω, quæro, (nisi ſit ab Hebr. בקר, quæro & a בקר
ſe; dempto b, ut in βρέχω rigo; βρώσκω rodo) ſic a πάτ7ω, κναπω, Galat.
tio, quaſſo, &c. Et revera pauciſſimæ occurrunt voces Latinæ,
qu ſcriptæ, quæ non apud Græcos vel per π vel per τ (rari-
per κ vel χ) ſcriptæ reperiuntur. Ita enim a τόσα, πόσα, tot,
; & πόσ⊙ quotus; ſic & τόσον, πόσον, tantum, quantum, (inſerto
penthetico;) ſic a πότε quando (unde Anglicum when ſeu when,
, ut Scoti ſcribunt quhan:) ſic πῦ quò; πῆ qua; item πῖ⊙, πῖ⊙,
, qualis, in quibus terminatio alis eſt adventitia, ut & in æ-
lis ab æquus, (ſicut εἰκαλὸς ab εἰκὼς, & ὁμαλὸς planus, ab ὁμὸς
lis, par, ſic ἁμαρτωλὸς, διδάσκαλ⊙, ὑψηλὸς, σκάνδαλον, &c.) &
minatio ilis in ſimilis, ab ὅμοι⊙, quod ipſum ab ὁμὸς, quare et
æca terminatio ιος ſervilis eſſe apparet; ſed & Humilis ab hu-
(quod ipſum a χαμαὶ, unde & χθαμαλὸς humilis, ut ἄχ⊙
θ⊙, μαλακὸς, μάλθακὸς) Facilis a facio, Habilis ab habeo, unde
Habitus, ut ab ἔχω vel σχῶ, ἕξις & σχέσις, Agilis ab ago, aliáq;
lta, terminationem ſervilem adſciſcunt, prout ſupra l in
al & ſemel ſervile eſſe diximus. Sic & a τε que, a τις quis; ſic ab
ω, eſca & veſcor; & contra tolleno (quaſi colleno,) a κηλώνιον.
Æoles ὄκα & ἄλλοκα, pro ὅτε & ἄλλοτε, dicebant; ſic apud La-
os ocium, negotium, ſpatium, nuncium, vicium, &c. promiſcuè vel
t, vel per c, ſcribuntur; unde literarum t & c affinitas mag-
colligitur: quod idem patet apud Græcos in ὀρύτ7ω, ὀρύξω,
χα, ὤρυγμαι, ὤρυκται, aliiſq; verbis ejuſdem formæ, ubi τ in
, γ, κ, convertitur: Ita etiam promiſcuè dicimus uſpiam &
iam, nuſpiam, & nuſquam, quiſpiam & quiſquam; unde etiam
xima affinitas literarum p & qu ulterius patet; adeò ut non
um ſit a πίσυρα, vel πίσυρες, dici Quatuor. A Quatuor verò fiunt
rius (ut τέταρ7⊙) quater, quaterni, quartum, quaternarius, &c.
Eadem item operâ oſtenditur, & Quinq; derivari poſſe a πέντε, Quinque.
l. πέμπε, unde & πεμπάζω & πεμπτὺς: poſitis nempe pro πεν
, & pro τε que. Atq; hinc quintus ſeu quinctus (πέμπ7⊙)
quies, quinus, quinarius, &c.

Atq; ita oſtendimus Numerorum nomina Latina a Græcis
urpta eſſe, quanquam illud in nonnullis vix adeo probabile
primo intuitu videri poſſit. Sicui verò hac re nimis prolix
uiſſe videar, aut etiam a ſimitâ deviaſſe, cum hæc Grammatica

tica ſint potius quam Mathematica: ſpero ab illo me veniam facile impetraturum, ſi ſaltem intelligat me numeros ex profeſſo hîc loci non Mathematice tantum, ſed & Philologice tradendos ſuſcepiſſe; partim quidem quoniam neſcio an quiſpiam antehac illud ſuſceperit; partim etiam quoniam legitimi mei Auditores (quibus hæc primitus parabantur) non omnes eouſq; in rebus Mathematicis verſati fuerint, quin opus ſit nonnunquam aliud aliquid ſalis inſtar ſeu condimenti interſpergere, quò melius quæ arida ſecus aut ſicca nimis videri poſſint facilius deglutiantur, neq; vel palatum offendant vel ſtomachum moveant. Quòd autem nonnunquam prolixior ſim & in exſemplis copioſior, ideo factum eſt, quia nonnunquam Derivata a ſuo fonte eouſq; recedant, ut, niſi magnâ exſemplorum copiâ illud evincatur, non eſſet adeò perſuaſu facile ullam omnino cognationem inveniri: quod de *Quatuor* & *Quinque* præſertim dictum intelligatur; quanquam & alia aliqua prima forſan fronte vix ſuam familiam ſatis indicarent. Neq; hoc quidem mirum, cùm illud omnino uſu ſit compertum, ut, ubi vox aliqua ex una in aliam linguam tralata eſt, derivationum leges multo ſint laxiores quàm ubi intra eandem linguam manendum eſt. Atq; hoc in Latinis a Græcis deductis eò magis accidit, quoniam non tam ex puro fonte Græco ſeu dialecto vel Attica vel Ionica (quarum frequentior eſt uſus) quàm ab Æolica adeoq; omnium impuriſſima dialecto ut plurimum ducta ſint, quod agnoſcunt omnes; vel ſaltem a Dorica, quæ & ipſa a Communi ſatis deflectit.

Contra verò, ſiquis minutioribus hiſce (prout videri poſſint) delectatus, ampliorem meſſem optaret: conſulat, ſi libet, Caninii Grammaticam Græcam (apud quem olim me hujuſmodi non pauca legiſſe memini;) vel potius (ne multos nominem) Acutiſſimi ſimul & Venerandi Senis *Tho. Gatakeri* noſtratis opus κεκπικώτατον (qualia ſunt ipſius omnia) quod adverſus Sebaſtianum Pfochenium *de ſtylo novi Inſtrumenti* inſcripſit; apud quem (in prioribus præſertim capitulis) multa hujuſmodi reperiat magno acumine ſcripta: ubi quidem in multis nobiſcum conſentit, atq; inde alia in noſtrum uſum, ſi opus eſſet, exſempla mutuari poſſent, niſi quòd ea perlegere non priùs mihi contigerit, quàm quæ ſupra habentur, ſcripta fuerint; quanquam & ex illis aliquot non diffiteor a Clariſſimo illo

viro, meiq; amantiſſimo, me primitus didiciſſe; Qui agno literarum damno) anno jam proxime præterito (poſt- am hæc ſcripta erant) relicta terra cœlo potitus eſt.

Atq; hactenus de numerorum nominibus diximus. Sequitur umerorum Notatio ſive Deſcribendi ratio, proximo in co tradenda.

CAP. VII.

Numerorum Notatio, per omnes Alphabeti literas præſtita, Hebræis & Græcis communis.

NUmerorum Notatio, ſive Deſcribendi ratio, non omnibus una eſt. Quamvis enim omnes in hoc conſentiant, ut Nu- eros Characteriſmis quibuſdam, brevitatis gratiâ, deſcribant, uo etiam calculus facilior evadat: Gentes tamen variæ vari- etiam ſcribendi modos adhibuerunt. *Notatio, ſeu Numerorum deſcriptio.*

Hebræi, aliíq: Orientales, in deſcribendis Numeris, Alpha- eti Literas adhibuerunt: Prioribus nempe Alphabeti literis nitatum numeros exprimebant, אב גד הו זח ט ſequenti- us deinceps, quot opus erat; numeros Decadum, יכלמנסעפצ tandem reliquis Centurias, קרשת Reliquos vero nume- eros centenarios (quia non ſuperſunt plures Alphabeti lite- e) deſignant literarum quinq; characteribus finalibus ך ם ן ף aut etiam literis compoſitis תק· תר· תש· תת· תתק· *Apud Hebræos.*

Numeros autem juſtis Decadibus interjectos, conjunctis li- eris ind[...]ant; numero nempe decadum ſubjungendo nume- um adjunctarum unitatum; ut יא כב. At ubi numerum de- imum quintum deſcribunt, pro יה, ſcribunt טו, (hoc eſt, ro decem & quinq;, ponunt novem & ſex,) ne ſcilicet No- men Dei, iſtis literis expreſſum, videantur temerare. Et pari modo numeros juſtis Centuriis interjectos conjunctis literis de- ribunt, ut קיא רלג·

Millenarios verò numeros & qui ſequuntur, iiſdem quibus Unitates, aut etiam decadas, centuriáſve, literis deſig- ant; levi fortaſſe punctulo, diſcriminis gratiâ, diſtinctis; אּ בּ & ſiquæ ſuperſunt centuriæ, decades, aut unitates juſtis milli- bus interjectæ, ſubjunguntur earum characteres ut אּמנה'.

Græci eodem pariter modo quo Hebræi numeros deſignant; *Apud Græcos.*

prioribus enim Alphabeti literis Monades deſignant, ſequentibus Decadas, & ultimis Centurias; Millia verò iiſdem repetitis, leviculo puncto vel virgulâ diſtinctis: Et numeros interjectos literis conjunctis.

Sed & propter literarum defectum, tres characteres præter Alphabeti ordinem interſerunt: inter monadas unum, alium inter decadas, & inter centurias reliquum.

C. ϛ. Ἐπίσημον C, vel ϛ, (qui character eſt vel τῦ ſigma finalis, vel literarum στ,) numerum Senarium deſignat. Inſeritur verò hoc ordine (potius quam monadum characteribus reliquis poſtponitur) loco Hebræorum ו; ut ſubſequentes literæ eandem poteſtatem obtineant quàm eis homologæ apud Hebræos: puta, ut ז & ζ, item ח & η, necnon ט & θ, י item & ι, (& ſic de cæteris) eundem numerum indigitent; quod ſecùs non fieret, cùm Græci, loco Hebræorum *Vau*, nullam habeant literam, (ſaltem non pari ſede poſitam,) Latini verò eodem ordine reſtituerunt ſuum F, (hoc eſt Æolum Digamma) quod ferè tantundem valet; imo omnino idem forſan ſonabat olim, cum ipſo ו *Vau* Hebræorum, & Latinorum *V* conſona, prout nunc a pleriſq; (ſaltem Anglis) harum utraq; pronunciatur: prout & digamma *Æ*olicum F olim pronunciatum fuiſſe teſtatur Priſcianus; in cujus locum non rarò ſubſtituitur apud Latinos conſona *V*, ut quum ab οἶνος, οἶς, Æolicè Ϝοῖνος, ὄϜις, fiunt Latina *Vinum*; *Ovis*, aliaq; ejuſmodi. Unde conjicere licet, duplicem olim fuiſſe ſonum conſonæ *V* apud Latinos: aliquando ille qui nunc dierum auditur in *qui*, *lingua*, [illegible]o, ubi idem ſonat ac *w* in *wiſe*, *way*, *perſwade*; aliquando idem cum Anglorum *V*, in *have*, *ſave*, *vaine*, *vice*, &c. Quare apud Græcos aliquando ſcribitur per β, ut in Βιργίλιος, Δαβὶδ, aliquando per ȣ, ut in ȣαλέριος, ȣάλης, quæ omnia Latine ſcribuntur per *V* conſonam. Sed & etiamnum Cambro-Britanni (& olim, ni fallor, Angloſaxones) *f* eodem modo efferunt quo nos conſonam *v*, nempe ut *b* aſpiratum: ſonum verò quo nos & alii pleriq; nunc efferimus *f* vel φ, illi per *ff* ſcribunt. Quod autem de Latinorum *V* conſona dictum eſt, dici fortaſſe poterit de Hebræorum *Vau*, nempe ipſius olim ſonum non fuiſſe in omnibus & apud omnes conſtantem; certum enim eſt (ex *Jud.* 12. 6.) non eundem fuiſſe apud omnes ſonum literæ ש, & quare non & eadem eſſe poſſet in literâ *Vau* varietas non video: atq; nunc

dierum

dierum Arabes quidem & Perſæ literam illam ut noſtrum *w* pronunciant, & Turcæ ut noſtrum *V*.

Character autem hic ϡ nongenta deſignat, quem σαμπῖ vocant, quaſi ex literis C (inverſo) & π, nempe *ſigma* (quam Dores σὰν vocant) & *Pi*, conflatus, vel, ſi libet, ex *Antiſigma* (ſic enim Ɔ, ſive ſigma inverſum, appellant) & *Pi*. Quanquam revera ipſius aliam potiùs fuiſſe originem exiſtimat Scaliger; nempe ab Hebræorum ſeu Syrorum antiquo charactere literæ *Tzade*. ϡ.

Pro Nonaginta verò ponitur ϟ Ϙ vel *G*; unde figura Latinorum G deducta eſt; antiquis Latinis ignota; qui Græcorum γ per C exprimebant, quam literam tertio igitur loco, ut Græcorum γ, ponebant. Dicebatur autem Κόππα ſeu *Kophe*, tanquam ab Hebræorum & Syrorum *Koph*: ſed & *Antirrho*, quaſi *Rho* inverſum. Ab hac figura dicebatur apud Ariſtophanem ἵππος κοππατίας: a præcedente verò σαμφόρας ſive σαμπέρας ſive σαπτόρας: (prout hoc aut illo charactere notatus erat.) De utroq; videatur Joſephus Scaliger, in ſuis ad Euſebium Animadverſionibus: quibus digreſſionem ſatis longam de antiquis Græcorum literis inſeruit. ϟ Ϙ.

Pro Ϙ verò ſcribitur a nonnullis ϟ, aut etiam ϥ, vel deniq; ς (idem nempe character cum illo ſenarii numeri) ſed perperam, incuria nempe librariorum. Item pro ϡ, eadem incuriâ, ſcribitur nonnunquam ϖ. Uterq; autem error (ponentium ς pro Ϙ, & ϖ pro ϡ) non raro in libris impreſſis retinetur; quod propter typorum inopiam factum credo; cum enim veros typos non habebant, ipſis quam proxime ſimiles ſubſtituerunt: Eodem nempe modo quo in libros tam Manuſcriptos quam Impreſſos (ſive propter Scribarum ignorationem Characterum Hebræorum, ſive propter Typorum defectum) irrepſit error ille ponentium ππ pro nomine יהוה: Quomodo etiam pro ΙΗC ΧΡC, vel ιης χρς, (quo pacto Græce contracte ſcribitur ἰησοῦς χριστὸς) ſubſtituerunt Latini ihc xpc vel ihs xps, quibus innuitur *Jeſus Chriſtus*. Sic apud Juriſconſultos, *Digeſtorum* libri, Græce πανδέκται dicti, hac nota vulgo citantur *ff*, quæ a Græco π deflexit.

Atq; hæc, de modo ſcribendi numeros Hebræis Græciſq; magis uſitato, dicta ſufficiant: Cujus ſpecimen aliquod hic apponit r

α	1	א	π	80	פ	
β	2	ב	ϟ G G ϟ	90	צ	
γ	3	ג	ρ	100	ק	
δ	4	ד	σ	200	ר	
ε	5	ה	τ	300	ש	
C ϛ	6	ו	υ	400	ת	
ζ	7	ז	φ	500	ך	תק
η	8	ח	χ	600	ם	תר
θ	9	ט	ψ	700	ן	תש
ι	10	י	ω	800	ף	תת
κ	20	כ	ϡ	900	ץ	תתק
λ	30	ל	,α	1000	א̇	
μ	40	מ	,β	2000	ב̇	
ν	50	נ	,γ	3000	ג̇	
ξ	60	ס	,ι	10000	י̇	
ο	70	ע	,κ	30000	כ̇	

ια	11	יא
ιβ	12	יב
ιε	15	טו
κγ	23	כג
νϛ	56	נו
οη	78	עח
σλα	231	רלא
,αχνε	1655	א̇םנה

Rarius autem tam Hebræi, quam Græci, literas Alphabeti continua ſerie adhibent, ad rerum vel Numerum vel ſaltem Ordinem deſignandum. Sic enim Homeri Ilias & Odyſſea in libros diſtinguuntur, Et eodem modo apud Hebræos Pſalmus CXIX in membra, aliiq; in Periodos, videntur diſtingui. Sed hæc indigitâſſe ſat eſt.

Supereſt alius Numeros ſcribendi modus, Græcis item uſitatus, Romanorum mori non abſimilis, per aliquot ſaltem, non omnes, Alphabeti literas; de quo proximè agendum eſt.

CAP.

CAP. VIII.

Numerorum Notatio, per aliquot ſaltem Alphabeti literas præſtita, Græcis & Latinis communis: Et, cur illæ potius quam aliæ, ad hunc uſum ſeliguntur.

PRæter illum quem ſuperiùs tradidimus Numeros ſcribendi modum, erat etiam alius a Græcis uſitatus; non per omnes quidem, ſed ſelectos quoſdam, Alphabeti characteres, peractus. Sex ſcilicet literis M. X. H. Δ. Π. I. numeros omnes deſignabant M deſignat μύρια, ſeu decies mille: X χίλια, ſeu Mille: H ἑκατὸν, Centum: Δ δέκα, Decem: Π. πέντε, Quinque: I verò ἓν, Unum. Quoties autem plures vel Unitates, vel Decades, Centuriæve, aut Millia apponenda ſunt, illud literis bis, térve, quatérve iteratis, indigitatur. Quum verò ad quina deventum eſt, illud literâ Π innuitur; hæc enim litera, ſimpliciter poſita, quinque denotat; at, incluſo Δ, (hoc modo 𐅄,) quinquaginta; incluſo H, quingenta; incluſo X, quinquies mille, &c. Notatio alia Græcorum.

Eodem planè modo Latini ſeptem literis ſuos numeros deſcribunt. M. D. C. L. X. V. I Litera M deſignat Mille: D, quingenta: C, centum: L, quinquaginta: X, Decem: V, Quinque: I, Unum. Numeros intermedios, aliquorum vel conjunctione, vel repetitione (ſicut & Græci) deſcribunt. Nonnunquam tamen Latini (ſed non item Græci) numerum minorem majori præponentes, illum ex minori auferendum notant; unde IV, IIX, IX, XIIX, XIX, XL, XC, ſignificant 4, 8, 9, 18, 19, 40, 90. Atq; idem nonnunquam in numerorum appellationibus faciunt; dicunt enim *undeviginti, duodeviginti*, pro *octodecim, novendecim*: quòd & de aliis ſimilibus intelligendum eſt. Hoc pacto, ſi numerus *Milleſimus ſexcenteſimus quadrageſimus nonus* deſcribendus eſſet; hoc Græci ſic peragerent Χ𐅅ΗΔΔΔΔΠΙΙΙΙ: Latini verò hoc modo MDCXLIX vel etiam ſic CIƆIƆCXLIX. Notatio Latinorum.

Latini, pro M, numeri millenarii nota, nonnunquam ſic ſcribunt CIƆ, & deinde CCIƆƆ pro decem millibus, & hujus dimidium IƆƆ pro quinq; millibus; item CCCIƆƆƆ pro centum millibus, ejuſq; dimidium IƆƆƆ pro quinquaginta

G millibus:

millibus: ſic CCCCIƆƆƆƆ pro millenis millibus; & ſic deinceps.

Totius hujus Notationis ſpecimen, hic apponitur.

M	10000	CCIƆƆ	I	1	I	[Δ]	50	L
X	1000	CIƆ.M	II	2	II	[Δ] ΔΔΔΔ	90	XC
H	100	C	III	3	III	H	100	C
Δ	10	X	IIII	4	IIII. IV	HHHH	400	CCCC
I		I	Π	5	V	[H]	500	D. IƆ
Π	5	V	ΠI	6	VI	[H]H	600	DC. IƆC
[Δ]	50	L	ΠIIII	9	IX	X	1000	M. CIƆ. ∞.
[H]	500	D. IƆ	Δ	10	X	XXXX	4000	MMMM
[X]	5000	IƆƆ	ΔI	11	XI	[X]	5000	IƆƆ.
[M]	50000	IƆƆƆ	ΔΠ	15	XV	[X]X	6000	IƆƆƆ.
			ΔΠIIII	19	XIX	M	10000	CCIƆƆ
			ΔΔ	20	XX	[M]	50000	IƆƆƆ
			ΔΔΔ	30	XXX		100000	CCCIƆƆƆ
			ΔΔΔΔ	40	XL		1000000	CCCCIƆƆƆƆ
							10000000	CCCCCIƆƆƆƆƆ

Literarum numeralium ſelectarum ratio. Harum verò literarum numeralium valorem quamvis intelligant plurimi, earum tamen rationem pauci ſunt qui animadvertunt; Latinarum præſertim. Imò qui ex profeſſo illarum rationem reddere conantur nonnulli, potiùs nugas proferunt quàm veras rationes: Quas tamen ego exagitare non operæ pretium judico. Legat, qui velit, Julium Scaligerum, *de Cauſis Linguæ Latinæ*; Hermannum Hugonem, *de Ratione Scribendi*; Venerabilem Bedam, alióſq;: qui, quamvis rationes reddere conantur, cur hæ potiùs quam aliæ literæ numeris ſignificandis adhibeantur, ut plurimum tamen mihi neutiquam ſatisfaciunt. Alii, quos non conſului, fortaſſis meliores reddant. Ego interim, omiſſis aliis, eas quæ mihi maximè videntur probabiles breviter producam.

Apud Græcos. Quod ad Græcas literas attinet, non eſt cur multum hæſitemus, cùm earum ratio ſatis in pleriſq; pateat.

M. X. Δ. Π. M *μύρια*, X *χίλια*, Δ *δέκα*, & Π *πέντε* ſignificant, quia vocum illarum literæ ſunt initiales. Item, cur Π, incluſis literis Δ, H, X, M, harum valorem quintuplum exhibeat, ſatis liquet, cum ipſum Π numerum quinarium deſignet.

De

De ſolis literis H & I quæſtio reſtat; quarum illa Centum, hæc Unum indicat : cùm nec vox ἑκατὸν, nec εἷς, ab illis incipiat, ſed ab ε utraq;.

De priori dicendum eſt, characterem illum H (prout Centenarium numerum notat) non tam eſſe figuram literæ *Eta*, quàm ſpiritûs aſperi. Nam antiquiores Græci, antequam vocales longæ η & ω Alphabeto acceſſerant, Spiritum Aſperum eo charactere deſignabant, quo jam Latini utuntur : Spiritum autem Tenuem omnino omittebant, ut & Latini etiamnũ faciunt. Eſtq; revera ipſa vox *Eta* ab Hebræorum *Cheth* deſumpta, & eundem in Alphabeto ordinem retinet, ut & Latinorum *H* : (ſaltem ſi Loco Hebræorum *Vau* ſubſtituatur vel ἐπίσημον C, vel Æolicum Digamma, & Latinorum *F.*) Poſtea verò eadem litera biſecta ⊢ ⊣ figuras utriq; Spiritui ſuppeditabat; pars nempe prior Spiritum Aſperum, poſterior Tenuem, deſignabat. Tandem verò illæ, quas nunc habemus, Spirituum notæ, ut expeditiores, obtinebant. ‘ ’. Antiqui igitur, non ἑκατὸν, ſed Ηεκατον ſcribebant; unde character ille initialis deſumptus eſt, H, numeri Centenarii nota.

H. ⊢ ⊣.

Quod ad reliquam, quæ ſupereſt, figuram I attinet; adhibita fuit illa, vel quod tam Spiritus Aſper, quam prima litera vocis εἷς, ipſi communes eſſent cum voce ἑκατὸν, ideóq; proximam quæ ſequitur literam I aſſumpſerunt, quâ ſignificent vocem εἷς, adeóq; numerum primum ſeu Unitatem: vel, quod ipſa vox εἷς antiquitùs per nudum I ſcriberetur, ante inventam diphthongum ει, quæ forſan ſeriùs, quàm numeris Characteres primitùs aptabantur, inventa erat. Vel etiam quod ἴος, ἴα, ἴον, dicantur pro εἷς, μία, ἕν : vel deniq;, quia ſimpliciſſima illa & minutiſſima litera, (μονόγραμμος nempe, & unicâ lineolâ conſtans,) facillimè omnium pingeretur; qua ratione, etiam nunc dierum, qui omnino rudes ſunt & ἀγράμματοι, adeo ut nequidem literas intelligant, numeros tamen utcunq; deſcribunt, totidem forſan in pariete lineolis cretâ vel rubricâ ductis quot vellent innuere unitates. Nec quidem hoc apud Græcos & Latinos tantùm, reliquoſq; populos Occidentales obtinet; ſed & in libello quodam Chinenſi idem ſe abſervaſſe dicit Gatakerus; paginas nempe quatuor primores ita deſignatas; primam lineola unica I, ſecundam duabus II, tertiam tribus III, quartam quatuor IIII; ſequentes vero aliis characteribus diſtinctas

I.

diſtinctas. Atq; hæc de Græcorum characteribus ſufficiant.

Apud Latinos. De Latinorum autem literis non adeo facilis eſt ratio. Præter duas enim *M* & *C*, quarum illa *Mille*, hæc *Centum* inchoat, aliarum origo altiùs petenda eſt.

M. Literam igitur *M* dicimus ad numerum Millenarium indicandum adhibitam, quia ejuſdem litera eſt initialis. Sed addimus, ipſius figuram aliam aliquando fuiſſe, & etiamnum eſſe, quàm quæ vulgo adhibetur. In libris quippe Anglicis, Belgicis, Germanicis, aliiſq; pinguiori typorum forma impreſſis, occur-
𝔐. rit paſſim iſtius literæ hic Character 𝔐; rotundiori nempe forma quam in typis Italicis, Gallicis, Hiſpanicis, fieri ſolet: An-
ɱ. tiquiores vero Anglo ſaxones hac forma ſcribebant ɱ; & quidem in Libris Manuſcriptis cujuſcunq; gentis reperitur paſſim Latinorum litera *M* majuſcula rotundiori forma exarata. Hujuſce vero literæ (rotundiori, ut dictum eſt, forma ſcriptæ)
D. ſemiſſis poſterior, literæ *D* ſimillimus eſt; quam ideo adhibuerunt ad numerum Quingenarium indicandum, nempe Millenarii dimidium. Sed & hanc & illam, non antiqui modò, ſed & Recentiores nonnunquam in membra dividunt: nempe, pro
CIↃ. ɱ & D, ſcribunt CIↃ & IↃ; priorem verò nonnunquam &
IↃ. hoc modo ∞; ut in libris non paucis apud Belgas præſertim
∞. (ſed & alibi) impreſſis videre eſt.

C. Literam verò *C*, centenarii numeri notam, antiqui Romani ſic ſcribebant Ꮯ, (quadrata ſcilicet formâ,) ut ex antiquis marmorum & nummorum inſcriptionibus conſtare dicitur. (Quos imitantur quodammodo typi Germanici Anglicíq;
𝔈. pinguiores. 𝔈,) Hujus quadratæ literæ ſemiſſis inferior ip-
L. 𝔏. ſam literam L. 𝔏. efficit; quæ igitur ad exprimendum numerum Quinquagenarium adhibetur, nempe Centenarii dimidium.

X. Ad numerum Denarium exprimendũ adhibuerunt, non literā
V. *D* initialem; (quoniam erat ea quingenarii numeri nota, ut ſu-
Λ. pra dictum eſt.) ſed literam *X*, quæ conflatur ex duplicata litera V ſeu Λ; utroq; enim modo Quinarii numeri nota antiquitùs ſcripta fuit.

Erat autem *V* litera, Quinarii numeri nota; vel forte quia
⁘ ex quinq; punctis conflari videtur ⁘; Vel quia ipſius figura inverſa Λ (quæ etiam non rarò, apud Antiquos, numerum quinarium denotat) ad figuram Græcorum literæ Π (quinarii,

apud

apud illos, numeri notam) proximè accedat; (quippe nulla Latinorum litera ipſis eſt ſimilior:) Vel etiam quia vox *Quinq;* antiquitus per *CV* ſcripta fuerit, (antequam litera *Q* ad Latinorum Alphabetum acceſſerat;) quarum prima *C*, cùm ſit centenarii numeri nota, non potuit adhiberi, ideóq; ſequentem *V* aſſumſerunt. Ipſam verò literam *Q*, recentius quàm reliquæ literæ, ad Alphabetum acceſſiſſe, non eſſe dubitandum exiſtimo; ut nempe illud ſignificet quod conjunctæ literæ *CV*; (ſicut & &, *x*, idem ſonant ac *et*, *cs*:) adeóq; ipſa litera *V*, quæ nunc pro more literæ *Q* ſubjungitur, omnino redundat, cùm ipſius ſonus in ipſa *Q* litera includatur; (prout contendit Reverendus Senex *Thomas Gatakerus* Anglus, in tractatu quem edidit de Diphthongis, ſive *Bivocalibus*:) ſecùs enim litera *Q* omnino eſſet ſuperflua. Nam ut *gua* conſtituit ultimam ſyllabam in voce *lingua*, & *ſua* primam ſyllabam vocis *ſuadeo*, ſic & *cua* idem ſonat ac *qua* in voce *qualis*: vel igitur redundat *u*, cùm *Q* tantundem valeat ac *Cu*; vel ipſa litera *Q* omnino eſt ſuperflua, & perperam alphabeto inſerta, utpote quæ non alia eſt quam litera *C*. Et revera quidem, non modo ſonus literæ *Q*, ſed & ipſius character, conflatus videtur ex *CV*, nam *CV* & *Q* ſolo ſitu differunt. Eodem prorſus modo ponebant veteres literam *K* pro *CA*, adeóq; promiſcue *Klendas* & *Calendas*, item *Krtago* & *Cartago*: quanquam nunc dierum, tam *A* perperam ſubjiciatur literæ K, quam *V* literæ *Q*; adeóq; tam *K* quam *Q*, prout nunc uſurpantur, prorſus redundent, nec aliud quicquam ſonent quam *C*; non nego tamen hunc ſcribendi modum jam olim obtinuiſſe, neq; tanti furſan res eſt ut nunc mutatum iri ſtrenuè urgeamus. At ſaltem eodem, ſi non majori, jure dicendum eſſet, *Poſt Q non ſcribitur V*, & *Poſt K non ſcribitur A*, atq; dictum eſt, *Poſt X non ſcribitur S* (nempe quia ſ includitur in litera *x*, quæ ex *cs* conflatur:) nam pariter abſurdum eſt literam *A* literæ *K* incluſam, aut *V* incluſam literæ *Q*, repetere ipſive K vel Q ſubjungere: ac ipſam literam *S* literæ *X* incluſam eidem denuò repetitam ſubjungere. Sed neq; hæc regula univerſaliter obtinere debet, acſi poſt *X* nunquam ſcribenda eſſet litera *S*; quamvis enim illud ſecus obtineat, tamen quoties præter ipſum *S* literæ *X* incluſum, aliud ſequatur *S* juxta vocis analogiam ipſi ſubjungendum, nihil impedit quo minùs adjungetur, prout in modernis typis accuratioribus fieri

CV *Q*.

conſuevit. Ideóq; meliùs *exſcribo, exſurgo, exſiſto, exſto, exſulto,* &c. per ſ ſcribuntur, quàm *excribo, exurgo,* &c. ſine ſ. Quamvis enim ſ in *x* includatur; nihil tamen abſurdi ſequitur ſi geminum ſ adeſſe dixero; alterum nempe præpoſitionis *ex*, alterum vocis ſequentis: Sed & eadem de cauſa *aſſto, aſſcribo, aſſcendo, aſſtipulor,* &c. per geminum ſ, ſcribenda ſunt, (alterum nempe loco abſentis *d*, alterum vocis ſequentis,) non minùs quàm *aſſumo, aſſurgo, aſſimilo,* &c. quæ ab omnibus per geminum ſ ſcribi ſolent. Niſi malit quis utrobiq; literam *d* retinere, *adſto, adſumo,* &c. Sic & *exſul, exſilium,* per ſ ſcribenda ſunt, quæ ejuſdē ſunt originis ac *præſul conſul, conſilium,* ejuſdē (credo) cum *exſulto, exſilio,* a voce *ſalio*.] Sic & *exſemplum* a voce *ſimilis*; dicimus enim Anglicè tam *enſample* quā *exſample* & *ſamplar*, unde liquet literam ſ radicalem eſſe, & non tantum ad præpoſitionem *ex* pertinere: *p* verò Epentheticè inſeritur, ut in vocibus *exemptus, redemptus, contemptus,* &c. & *β* in Græcis μέμβλεται, μέμβλωκα, pro μεμέληται, μεμόληκα, ſic & μεσήμβριον *meridies*, quaſi μεσήμερον, contractè pro μεσημέριον, ut & in Anglicis (vel etiam Gallicis) *Aſſemble, diſſemble, reſemble, ſemblance*, a Latinis *ſimul, ſimulor, ſimilis*, ſic ab *humilis, tremulus,* fiunt *humble, tremble*; ſic *chamber, tender, cinder*, a Gallicis *chambre, tendre, cendre*, cum tamen Latinè dicamus *cameram, tenerum, cinerem*; ſic a *Cimmerius* fit *Cimbricus*; ſic ab ἀνήρ, per Syncopen ἀνρὸς, Emphonicè ἀνδρός. Nam revera literæ *m* & *n* cum ſequentibus aliquot conſonis (præſertim *l* & *r*,) vix cohærent niſi poſt illam interveniat *b* vel *p*, poſt hanc *d* aut *t*. Sed hæc obiter.

I. Reſtat alia *I*, cujus rationem reddituri ſumus. Eâ nempe, ut Græci, ſic Romani Unitatem indigitant; atq; hoc faciunt Romani vel quòd Græci ſic prius fecerint; vel, quia litera hæc minima quidem eſt & ſimpliciſſima, ut & ſupra de Græcorum ι diximus.

Vel deniq;, fieri poteſt, ut pro *Unitate* ſimplici, ſive primi loci, poſuerint lineolam ſimplicem I: pro unitate ſecundi loci, hoc eſt *Decade*, duas tranſverſas, ſeu literam X, (hujuſq; ſemiſſem V pro numero quinario;) pro unitate tertii loci, hoc eſt, *Centuria*, tres conjunctas, ſeu literam ⊏, (hujuſq; ſemiſſem L, pro quinquaginta :) & deniq;, pro unitate quarti loci, ſeu *Mille*, quatuor conjunctas lineas, nempe literam M vel ↀ, hujuſq; ſemiſſem D pro quingentis.

Atq;

Atq; hactenus de Numerorum Notatione per literas Alphabeticas dictum eſt: ſupereſt, ut eorundem notionem per *Ziphras* (ut vocantur) *Saracenicas*, explicemus.

CAP. IX.

Numerorum Notatio per Ziphras Saracenicas, ſive Vulgares Figuras Numerales. Ciphra quid; ejúſq; variæ ſignificationes. Occultæ ſcribendi modi. Siglæ & Notæ, quomodo differant apud Romanos, Notæ Arithmeticæ a quibus inventæ.

PRæter eos quos ſuperius tradidimus Numeros deſcribendi modos, per Alphabeti Literas; alius adhuc maximi momenti ſupereſt tradendus: Adhibitis nempe vulgaribus figuris Numeralibus, 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. quas *Ziphras Saracenicas* nonnulli dicunt; de quibus nunc agendum eſt.

Vox *Ziphra* (vel *zifera*, vel *ſiphra*, vel *ciphra*, variis enim modis ſcribitur) eſt planè Arabica. Sed non uno ſemper eodémq; ſenſu uſurpatur. Deſcendere videtur vel ab Hebræorum ספר *ſaphàr*, (uti Schindlero placet, in ipſius Dictionario Pentaglotto,) quod & *numerare* ſignificat & *deſcribere* ſive *notare*: Et quidem ſi a priori ſignificatu deſcendere putetur, ſignificaret propriè *notas numerarias*, quo ſenſu novem illas figuras numerarias *Siphras Saracenicas* appellamus; ſi autem a poſteriori, quaſlibet etiam alias *Notas* vel *Characteres* rei alicujus aut vocis, vel etiam literæ indices, quo ſenſu *furtivas literarum notas*, ad occulte ſcribendum inventas, *Ziferas* appellat Baptiſta Porta, ut & alii. Vel, ſi ea derivatio minus placeat, deduci poteſt (et, credo, rectius) ab Arabico צפר *Zaphara*, quod *vacuum eſſe* vel *inane* ſignificat, uti docet D. Golius in Lexico ſuo Arabico: adeoq; de *nihili* ſive *nullitatis* notâ præcipuè intelligenda erit.

Ciphra quid?

Unde dicitur.

Vox illa ab Arabibus ad nos delata, pro certa cujuſdam Numeri *Nota*, ſeu charactere certi alicujus Numeri indice, paſſim occurrit; quo ſenſu decem illæ, nunc vulgo receptæ, figuræ Arithmeticæ vocantur *Ziphræ* ſeu *Ciphræ*. Nonnunquam tamen, & quidem frequentius, non de illis omnibus, ſed de illarum unica, vox illa dicitur; Nempe de Circello, *Nullitatis* ſeu *Nullius* nota: (unde & metaphorice, de re ſeu perſona inutili, πεςιμιωδας dicitur, *inſtar ciphræ*, tanquam *nullius numeri*:) Atq; hoc

quidem

quidem ſenſu ſæpius & apud alios, & apud nos deinceps occurret.

Occulte ſcribendi ratio.

Nonnunquam autem vox illa latius patet, ut non tantum decem illas, quæ in Arithmetica uſurpantur, ſed ſimpliciter quaſlibet vel literarum vel etiam vocum aut rerum Notas, vel brevitatis vel etiam occultationis cauſa adhibitas. Atque hoc ſenſu *Iohannes Baptiſta Porta*, Neapolitanus, librum *De Zipheris, ſive furtivis literarum Notis*, conſcripſit: Trithemius item *de Steganographia* libellum conſcripſit, abſtruſum ſatis; quem inter alios, Guſtavus Silenus explicandum ſuſcepit. Item Blaiſius Vigenerius (Gallice) & alii de ejuſmodi Zipheris libros ediderunt. Sed & novæ indies methodi per *Zipheras* ſcribendi excogitantur, & in rebus majoris momenti, ab iis præſertim qui Principibus ſunt a ſecretis, uſui aptantur: ſaltem quoties aliquid occulte ſcribendum eſt, quod nollet ſcriptor etiam intuentibus innoteſcere. Hinc voces illæ *Ciphrandi* & *Deciphrandi* ortum habent; eſt enim *ciphrare*, aliquid ciphris committere, ſeu occulte ſcribere; *Deciphrare* vero eſt ciphras explicare vel quid ſub ciphris occultetur interpretari.

Atq; hæc quidem occulte ſcribendi ratio flagrante nuper apud nos Bello Inteſtino admodum erat familiaris; adeo ut vix quiſquam eſſet alicuius notæ vir, qui non, in rebus majoris momenti communicandis, hujuſmodi ciphras adhibere ſolebat, ſcriptaſq; ad ſuos epiſtolas hujuſmodi involucris obtegere; ut, ſi in hoſtium manus perveniant, non intelligantur.

Et hujuſmodi quidem ſcripta non pauca, in itinere ſuo intercepta, nobis explicanda tradebantur; diverſis quidem occultandi methodis involuta, adeoq; alia aliis explicatu difficiliora; & quidem nonnulla tam inſuperabili difficultate obvoluta videbantur, ut fere de illorum explicatione deſperaverim, nec niſi poſt diuturnam inquiſitionem incredibili labore tandem ſuperaverim. Quorum non pauca ſpecimina in publicâ Bibliothecâ Bodleiana Oxoniæ conſervanda tradidi, ubi & conſpicienda manent.

Duplex erat hujuſmodi apud Romanos ſcribendi ratio; quarum veſtigia ſaltem ad nos pervenerunt: Altera per *Notas* (ut loquuntur) altera per *ſiglas*: Quarum utraq; partim expeditionis, partim occultationis cauſa erat adhibita.

Romanorum *Siglæ*.

Per *Siglas* ſcribere dicebantur, cùm ſingulis fere literis totidem

dem voces deſignabant. Sic Romanorum Nomina & Prænomina non raro pingebantur. Sic *M. T. Cicero*, pro *Marco Tullio Cicerone*, ponitur. Ita per C, *Caium*; per D, *Decium*; per P, *Publium*; per Q. *Quintum*; per Cn, *Cnæum*; per A, *Aulum*, intelligebant: (unde lis illa, inter Criticos, de illius nomine qui *Noctes Atticas* ſcripſit; quem alii *Agellium*, alii *Aulum Gellium*, dicendū putant.) ſic S. P. Q. R. *Senatum Populumq; Romanum* ſignificabat: (quod Beda noſter Romæ agens, uti refert Eraſmus, ſciſcitanti hoſpiti cuidam, qui ſaxis inſcriptum crebrius offendiſſet, quid vellet; Reſpondit, *Stultus Populus Quærit Romam.*) S.P.D. *Salutem plurimam dicit*: A. U. C. *Anno urbis conditæ*: M. S. *Memoriæ ſacrum.* aliaq; multa.

His ſunt conſimiles Hebræorum Abbreviaturæ, quas *Raſhe Teboth* dicunt: dum varia nonnunquam vocabula initialibus tantum literis deſignant. Sic אשר לברכה זכרו . אלו׳ *cujus memoria benedictioni*, ſeu *benedicta ſit*: quam formulam adjicere ſolent quum Rabbinos quoſdam mortuos nominant; prout nos *Beatæ Memoriæ*. Aliaq; hujuſmodi innumera videnda ſunt apud Buxtorfium in libello quem ſcripſit *De Hebræorum Abbreviaturis.* Sic & Rabbinorum Nomina vulgo ſcribunt: ut

רמבם (Rambam) *Rabbi Moſhe ben Majemon*, ſeu *Maimonides.*

רמבן (Ramban) *Rabbi Moſes ben Nachman*, ſeu *Nachmanides.*

רדק (Radak) *Rabbi David Kimchi.*

רשי (Raſhi) *R. Solomon Jarchi.*

רלבג (Ralbag) *R. Levi B. Geiſhom.* &c.

Siglarum mentio eſt apud Juſtinian. *in Pandect.* σημείοις ἅπερ σίγλας καλοῦσι. Et σημείων ejuſmodi meminit etiam *Plut.* in *Cat. min.* *Siglas* vero dicebant Romani quaſi *ſingulas*, quia ſingulis literis totidem voces ſignificabant; vel etiam quaſi *ſigilla*, idq; vel propter ſecretum ſcribendi modum, vel potiùs quòd ſint *ſignula* ſeu parva *ſigna*; hæc enim eſt prima ac propria ſigilli notio unde & *ſigillaria.* Quod autem litera *n* excidit in *ſigla*, quæ habetur in *ſingula*, illud parum eſt; præſertim cum ſit literæ *g* proxima: Dicimus enim *ſinguli*, *ſigillatim*; *Lingua*, *ligula*; *ſignum*, *ſigillum*, (unde Anglicum *Seal*, ſicut a *Regula*, *Rule*,) ſic *Tignum*, *tigillum*, quæ forſan a *tango*, quia res

 contiguas

contiguas copulant; vel, ut Scaligero placet, *Tignum* a *tegendo*, ut *lignum* a *legendo*, nam tignis & tegulis tectum conſtat. Sic a *jungo*, (Anglice *joyn*) fit *jugum*, Anglice *a Yoke*; (Græce ζεύγω, ζευγνύω ζεῦγος,) unde forſan *jugulum*, non modo quia Jugum (cervicem pariter ac) jugulum cingat, ſed potius quia humerus uterque ad jugulum coeunt & conjunguntur; quâ ratione et am juguli oſſa κλεῖδες & κληῗδες Græce, Latinè *Claviculæ*, appellantur, quia utrumq; humerum connectunt; ſub his autē claviculis eſt celeberrima illa Arteriæ magnæ, cor ipſū nuperrimè egreſſæ, diſtributio, unde a communi trunco quaſi per varios ramos ſanguis arterioſus in varias corporis partes derivatur: Hîc & venæ minores a pleriſq; corporis partibus in communem venæ cavæ truncū conjūguntur. Hinc eſt quod ſæpiſſime Homerus, lethaliter vulneratos, *ſub claviculis tranſfixos* dicit. eſt autem illi *ſub claviculis figere* perinde ac Latinis *jugulare*, hoc eſt, jugulum petere; quod ideo pro lethali vulnere ponitur, non modo propter violatam Trachæam ſive Aſperam arteriam, ſed potiſſimum quia eadem opera tam Aortæ ſive Arteriæ Magnæ quam Venæ cavæ truncus facile diſſecantur: adeóq; breviſſimo compendio (quod & laniis notum eſt) univerſum corpus tam venoſo quam arterioſo ſanguine citiſſime evacuatur. Sed hæc obiter de *jungo* & *jugo*, ubi excidit *n* non minus quam cum a *ſingulis*, *ſiglus* dicimus. Sed & a *jungo conjugem* & *conjugium*; & a *jugo*, *jugales*, ſic enim boum paria dicimus qui ſub eodem jugo conjuncti ſeu conjugati. Sic a πηγνύω vel πήγνυμι tam *figo* dicitur, quam *pango pegi* (quod ſignificat *jungo*) atque hinc *compingo*, *compactus*, *compages*, &c. Sed de Siglis hactenus.

Romanorum Notæ. Præter ſiglas vero, etiam *Notas* habuerunt Romani; Quarum hæc eſt differentia; *ſiglæ* ſunt abbreviaturæ per ipſas Alphabeti literas factæ; *Notæ* vero, abbreviaturæ per characteres aliunde adductos. Hinc *Notarii* apud Romanos dicti, qui brevibus *notis* aliorum ſermones exceptos ſcribebant, ut apud nos Stenographi. Hujuſmodi Notæ apud veteres ſatis erant frequentes: & extat adhuc libellus *de Notis Senecæ, & Tironis liberti Ciceronis*, inter quas tamen nonnullas ſeriùs adjectas eſſe res ipſa loquitur, nec quiſquam qui ipſas perpendit dubitare poterit.

Cum igitur, pro Numeris, ponuntur literæ Alphabeticæ, ut M pro *Mille*, C pro *Centum* &c.; eſt hæc ſcriptio per *Siglas*: cum verò alii characteres apponuntur, quales ſunt ciphræ Saracenicæ

nicæ, eſt ſcriptio per *Notas*; prout notæ a ſiglis diſtingui ſolent. Quas vero olim *notas* dicebant, nunc dicuntur potius *Ziphræ* dicuntur; quæ vel ad expeditionem vel ad occultationem ſcriptorum adhibentur.

Atq; hactenus de *Ziphrarum* nomine diximus: *Saracenicas* verò vel *Arabicas* dicimus; quia ab Arabibus ad nos devenerunt, ante annos plus minus quadringentos huc adductæ. An autem Arabes, ſeu Saraceni, has ipſi invenerint, an ab antiquis Phœnicibus (quod non videtur probabile, cum Arabes doctrinam ſuam ut plurimum a Græcis hauſerint, non a Phœnicibus traditam continuaverint) aut potius ab Indis (quod dicendum videtur) aut quibuſvis aliis acceperint, ab illis potius quam a nobis determinabitur. Cum autem nos illas ab Arabibus accepiſſe ſit extra dubium, unde illas habuerint Arabes ex eorum potiſſimum ſcriptis inquirendum eſt. Cumq; illi earum inventionem Indis tribuant, non eſt cur nos eâ de re dubitemus. Eorum autem doctiſſimus Scholiaſtes *Alſepadi* (uti a Cl. *Pocockio* noſtro, iſtarum linguarum cognitione nulli ſecundo, accepi) in commentariis ſuis ad elegantiſſimi Poetæ *Tograï* poema *Lamiato'l Ajam* dictum, notat *Indos de tribus ſuis inventis gloriari, Indo Scacchii, Figuris numericis, & libro* Golaila Wadamna *dicto,* (qui liber in Arabicam, Græcam, & alias linguas converſus, Fabulis Æſopicis, ad iſtius imitationem factis, anſam dedit:) nec ipſe interim huic Indorum gloriæ quicquam derogatum it. Atq; huic congruit illud quod teſtatur *Maximus Planudes* in ſuæ Arithmetices initio (prout in duobus Codd MSS. exſtat in Bibliotheca Bodliana) cui Titulus Μαξίμου τοῦ Πλανούδου λογιστικὴ Ἰνδική, (vel Ψηφοφορία κατ' Ἰνδοὺς) ἡ λεγομένη μεγάλη Quem librũ ab his verbis orditur, Οἱ τῶν ἀστρονόμων φιλοσοφώτεροι, ἐπεὶ ὁ μὲν ἀριθμὸς ἔχει τὸ ἄπειρον, τοῦ (δὲ) ἀπείρου γνῶσις οὐκ ἔστιν, ἐφεῦρον σχήματά τινα καὶ μέθοδον δι' αὐτῶν, ὡς ἂν τὰ τῶν ἐν χρήσει ἀριθμῶν εὐσυνοπτότερον κατανοῆται καὶ ἀκριβέστερον· εἰσὶ δὲ σχήματα ἐννέα μόνα, ἃ καὶ εἰσὶ ταῦτα ι μ ϻ ς 8 ϥ ν ∧ ϥ. Τιθέασι δὲ ἕτερον τὸ σχῆμα, ὃ καλοῦσι τζίφραν, κατ' Ἰνδοὺς σημαῖνον οὐδέν· καὶ τὰ ἐννέα δὲ σχήματα καὶ αὐτὰ Ἰνδικά ἐστιν· ἡ δὲ τζίφρα γράφεται οὕτως 0. τούτων τῶν ἐννέα σχημάτων ἕκαστον καθ' αὐτὸ μόνον κείμενον, εἴτουν κατὰ τὴν πρώτην χώραν ἀπὸ τῆς δεξιᾶς χειρὸς ἡμῶν ἀρχόμενον, τὸ μὲν ι σημαίνει ἕν, τὸ δὲ μ δύο,

Ziphra Saracenica.

τόδε ٣ τρία, τόδε ٤ τέσσαρα, τόδε ٥ πέντε, τόδε ٦ ἕξ, τόδε ٧ ἑπτὰ, τόδε ٨ ὀκτὼ, τόδε ٩ ἐννέα. κατὰ δὲ τὴν δευτέραν χώραν τὸ μὲν ١ δέκα, τὸ ٢ εἴκοσι, τὸ δὲ ٣ τριάκοντα, καὶ ἑξῆς. Ubi hæc duo confirmat Planudes, nempe figuras illas ab Indis originem habuiſſe, atq; etiam *Ziphram* apud Indos (fortaſſe rectius dixiſſet Arabes) ſignificare οὐδὲν, ſeu *nihil*; adeoq; a צפר *zaphara* potiùs quam ספר *ſaphar* deductam; quod & confirmat ipſius ſcriptura, ſi enim a ספר deſcendiſſet σίφρα potius quam τζίφρα ſcriberetur. Nos autem eas ab Arabibus accepiſſe, præter communem omnium conſenſum, ulterius adhuc teſtatur, conſenſus ille qui inter Arabum characteres quibus hodie utuntur, (quiq; ab illis Planudis non multum abſunt,) cum iis qui numeris deſignandis apud nos inſerviunt. Levis enim eſt in pleriſq, characteribus diſcrepantia, niſi quod qui apud Arabes ſive proni ſive ſupini jacent, apud nos eriguntur: ut ex appoſita comparatione videre eſt

o					8				
·	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Notat autem Erpenius (apud quem hi Characteres extant) o circellum ab eorum aliquibus pro nullitatis nota haberi (ut apud nos) qui igitur diſtinctam habent quinarii notam 8 apud alios verò circellum illum quinarii numeri indicem, qui interim puncto craſſiuſculo nullitatem deſignant. Quod & Arabum libri Manu-ſcripti teſtantur. Et quidem in MSS. tam Græcis quam Latinis (paulo vetuſtioribus) figuræ numerales minus adhuc ab Arabum figuris differunt, quam quibus hodie utimur. Quî autem ab Arabum figuris ſenſim deflexerint, donec ad eas quibus jam utimur figuras pervenerint, qui Codices Manuſcriptos Græcos Latinoſq; ſuccedentibus ſeculis exaratos pervolverit, facile perſpiciet, quod nos præ characterum inopia typis exprimere haud valemus.

Atq; hactenus de ipſis Ciphris ſeu figuris Arithmeticis: ſequitur ut ipſarum uſum oſtendam.

CAP.

CAP. X.

Figurarum Numeralium Valores; primarius & ſecundarius. Locus. Periodus. Ciphræ uſus. Fractiones Decimales. Gradus Aſcendentes & Deſcendentes, in proportione decupla.

SUnt illæ (quas diximus) figuræ Arithmeticæ vulgares, omnino decem: quarum valores jam explicandi ſunt. Prima o *Nullum* valet, ſive Numeri negationem, & vulgo *ciphra* dicitur: Reliquæ novem totidem numeros ſignificant (& *figuræ ſignificativæ* dici ſolent:) nempe 1 *Unum.* 2 *Duo.* 3 *Tria.* 4 *Quatuor.* 5 *Quinque.* 6 *Sex.* 7 *Septem.* 8 *Octo.* 9 *Novem.* Suntq; hi illarum *valores Primarii*, quos nempe per ſe ſignificant. Habent enim & valores *Secundarios*, quos non per ſe, ſed ratione ſedis ſeu loci ubi reperiuntur, induunt: Sicut enim aliud eſt *duos boves* dicere, aliud *duos homines*; ita & aliud eſt *duas unitates* dicere, aliud *duas decades*, ſive *duas centurias*; nam quamvis in his omnibus *numerus numerans* idem ſit, (nempe *binarius*,) non tamen idem *numerus numeratus*. Hic autem characterum valor ſecundarius ſubinde mutatur, pro ratione *Sedis* ſeu *Loci* ubi reperiuntur. *Figurarum valor primarius.*

Cum igitur horum characterum plures in continua ſerie collocantur; locus ille qui ad dextram eſt, *primus* dicitur; qui illi proximus eſt ſiniſtram verſus, *ſecundus* dicitur; & ſic deinceps reliqui quotquot ſunt loci numerandi ſunt. Ut poſitis his figuris 1654, eſt 4 in loco primo, 5 in loco ſecundo, 6 in tertio, & 1 in quarto. Ubi obiter notandum eſt me locum dextrum (in charta vel abaco) illum dicere, qui legentis dextræ opponitur, & eâdem ratione ſiniſtrum qui ſiniſtræ: quod ideo facio, quoniam vulgatus loquendi uſus apud pleroſq; ſcriptores hic eſſe ſolet, neq; ſoleo quidem a recepto loquendi more niſi coactus diſcedere, ne, dum accuratius loqui velim, minùs intelligar. Non ignoro tamen, quod ſi accuratiùs loqui velimus, ea pars chartæ ſeu libri dextra dicenda eſſet, quæ inſpicientis ſiniſtræ opponitur, ſiniſtra verò quæ dextræ; ſupponitur enim liber inſpectus oppoſita facie nos intueri, non terga dare: Atq; hinc eſt quòd Feciales, dum Gentilitia Scuta, quibus familiarum Inſignia inſcribuntur, expo- *Figurarum Sedes, ſeu locus, quid.*

nunt, eam ſemper Scuti partem Dextram appellant, quæ inſpicientis ſiniſtræ opponitur; quia nempe inſpiciens rem inſpectam adverſa fronte ſupponitur intueri. Verum cum apud alios alius ut plurimum mos loquendi obtinuerit, cum vulgo loquendum eſſe duxi; adeoq; (ut alii, ſic ego) eam inſpectæ chartæ dextram appello partem, quæ inſpicientis dextræ objicitur; ideoq; figuram loco primo poſitam, ad dextram poni dico; quæ verò in ſecundo loco, illam dico quæ proxima adeſt ſiniſtram verſus; & ſic deinceps.

Figurarum valor ſecundarius. In primo quæ occurrit loco figura, tot Unitates numerat quot ipſius valor indicat: quæ in ſecundo, tot Decades: quæ in tertio, tot Centurias: quæ in quarto, tot Millia; quæ in quinto, tot Decades Millium: in ſexto, tot millium Centurias: in ſeptimo, toties millena millia, ſeu tot Milliones, (prout nunc dici ſolet:) in octavo, tot millionum Decades: in nono, tot Millionum Centurias: in decimo, tot Millionum Millia, ſeu millies millena millia: & ſic deinceps, pro ſingulis locis, continua proportione decupla valorem ſemper augendo: prout ipſam numerorum diſpoſitionem ſive ordinationem, in decupla proportione procedere, ſupra dictum eſt. Et hac ratione numerus his characteribus exhibitus 1656, eſt *Mille ſexcenta quinquaginta & ſex*, ſeu *unum Mille, ſex Centuriæ, quinq; decades, & ſex inſuper unitates.* Atq; hunc figurarum valorem *ſecundarium* appello; quia nempe ex ſede ſeu loco ubi reperitur conſurgit.

Periodus quid. Sed & ipſa etiam Loca, quo melius intelligantur, præſertim ubi plura occurrunt, in *Periodos* diſtingui ſolent: Ita nempe ut tria priora loca minima primam periodum conſtituant; tria proxima, ſecundam; & ſic deinceps, ſingulis periodis tria loca aſſignando. Has autem periodos, (ubi ſaltem plures occurrunt, ut in grandioribus numeris,) pleriq; vel punctulis ſuprapoſitis, vel alia ad libitum diſtinctione, diſtinguere ſolent, quò promptius numerus efferatur.

Periodus autem prima *Unitates* denotat; ſecunda denotat *Millia*; tertia verò *millena millia*; & ſic deinceps. Ut enim locus locum ſuperat proportione decupla, ſic Periodus Periodum proportione Millecupla. Erit igitur numerus iſte

2.468.013579, ſic efferendus; *bis mille & quadringenta ſexaginta*

octo

ecto Milliones, (ſeu *Millena millia*) *tredecim Millia, quingenta ſeptuaginta novem.* Et eodem prorſus modo de Numeris aliis omnibus judicandum eſt; tam ubi numerus datus, eſt ſuis characteribus deſcribendus; quàm ubi characteres propoſiti, ſunt ſuis nominibus explicandi: Eadem enim utrobiq; eſt ratio.

Ubi notandum eſt, circellum illum o, (*Ciphram* vulgo dictam, quam eſſe *nullitatis* notam ſupra diximus,) quamvis per ſe nihil ſignificet ubicunq; ponatur, (perinde enim eſt ſive nullas unitates, ſive nullas Decadas, ſive nullas Centurias, nullave Millia dicamus; nihil enim utcunq; ponimus:) Non redundat aut nulli inſervit uſui, ſed neceſſario adhibetur ut locum ſaltem ſua præſentia compleat; unde figuræ omnes in locis ſuperioribus poſitæ juſtum ſuum valorem obtineant, verbi gratia; ſi, in numero proximè appoſito, 2468013579, deeſſet circellus ſexto (a dextra) loco poſitus, adjuncta figura 8 numeri octonarii, non ſeptimo, ſed ſexto eſſet loco; adeoq; non octies millena millia, ſed ſolum octingenta millia, ſignificaret: atq; idem de reliquis judicandum eſſet: nempe figuram 6 non octavo (ut nunc) ſed ſeptimo eſſet loco, & 4 octavo, 2 nono: adeoq; earum valores decuplo minores eſſent. Sic 1 *Unum* ſignificat, (quia primo loco;) 10 *Unam decadem*, (quia 1 eſt loco ſecundo, & quamvis adjuncta ciphra o per ſe nihil ſignificet, hoc tamen præſtat ut figura 1 ſit jam loco ſecundo, quæ ſecus eſſet primo.) 100 *Unam Centuriam.* &c. Si vero locis ſupremis ponantur ciphræ, nulli prorſus ſunt uſui, nullius ſaltem neceſſitatis, ſed redundant prorſus; tantundem enim ſignificant 0001, 001, 01, & 1. Fieri quidem nonnunquam poteſt ut Elegantiæ gratia, vel quo numerorum ſupputandorum collatio commodior fiat, ſiquando ſummæ variæ ſint in unam contrahendæ (ut in exſemplo appoſito,)

libræ.	ſolidi.	denarii.
13 ——	12 ——	10
24 ——	08 ——	06
05 ——	04 ——	01

aut alia ejuſmodi leviori cauſa accidentali, ejuſmodi redundantes ciphræ ſcribuntur; ſed tantundem ſignificant acſi prorſus abeſſent. Atque hinc eſt, quod, licet in hac numerorum notatione, per notas has numerales, hujuſce circelli ſive ciphræ

Ciphra, ſeu Nullitatis nota.

phræ uſus ſit neceſſarius, quia valores notarum pro ratione loci ubi reperiuntur augeri poſſunt aut minui: Ubi tamen per Literas Alphabeticas numeri ſcribuntur, quarum valor conſtans eſt & immutabilis, (prout apud Latinos, Græcos, Hebræos, aliosq; antiquitus fieri diximus,) hujuſmodi notæ nullus omnino eſt uſus, unde & nullam excogitarunt: Nam, verbi gratia, MD, *Mille & quingenta* ſignificant, ſive alii ſequuntur numeri, ſive non.

Atq; hactenus harum Figurarum Numeralium ordinarium ſeu vulgarem Notationem, ſeu (ut loquuntur alii) Numerationem explicavi, prout nempe uſu frequentiori ſolent occurrere: ita nempe ut Locus ad dextram ultimus, vel (ſi libet) primus, qui & omnium infimus eſt, ſemper habeatur pro unitatum Loco.

Fractiones Decimales. Recentiores verò, qui de *Fractionibus Decimalibus* agunt, (ultra quam Priores ſolebant Arithmetici,) non modo quotlibet ſupra Unitatum locum aſcendentia ſiniſtrorſum ſupponunt Loca; ſed & etiam infra Unitatum locum loca quotlibet Deſcendentia dextrorſum imaginantur, quibus *Fractiones* (ut loquuntur) *Decimales* ſcribantur.

Ut hoc autem melius percipiatur; ſciendum eſt quemlibet locum ad ſiniſtram progrediendo antecedentis ad dextram decuplum valere, ut ſupra declaratum eſt; contra verò, quemlibet dextrorſum procedendo valere antecedentis ſubdecuplum. Quoniam nempe decem Unitates conſtituunt unam Decadem, & decem Decades unam Centuriam, decem vero Centuriæ unum Mille, &c. (ſiniſtrorſum procedendo:) igitur vice verſâ (dextrorſum procedendo) unum Mille continet decem Centurias, & una Centuria decem Decadas, una verò Decas decem Unitates: Atq; hic vulgo ſiſtitur neq, ulterius dextrorſum proceditur, quoniam Unitatum locus ſupponitur infimus ſive ad dextram ultimus. Si verò libeat plures adhuc dextrorſum locos aſſignare infra Unitatum locum cenſendo eodem quo priùs modo procedendum erit, nempe quælibet Unitas continebit decem ejuſmodi partes ſeu quantitates (proximo dextrorſum loco numerandas) quarum decem conſtituant Unitatem, hoc eſt, quælibet Unitas continebit decem partes decimas; &, eâdem ratione, quælibet pars decima continebit decem partes centeſimas; & quælibet centeſima

decem milleſimas; & ſic deinceps: Ideoque quælibet figura loco infra unitates primo poſita deſignabit tot partes decimas; quælibet ſecundo totidem centeſimas; & quælibet tertio infra unitates loco, tot partes milleſimas deſignabit; & ſic deinceps quouſq; libet.

Exſemplum eſto hic numerus 3579|753; (ubi præter integrorum numerum 3579, adjunguntur partes decimales 753.) Figura 9, unitatum loco poſita, ſimpliciter *novem* (ſeu *novem Unitates*) deſignat: figura 7, quæ ad ſiniſtram eſt, *ſeptuaginta* (hoc eſt, *ſeptem decades*,) deſignat; at quæ ad dextram ſeptem *δεκατημόρια* (ſeu, *partes decimas*) innuit: Item 5 ad ſiniſtram *quingenta* (ſeu *quinque centurias*) ſignificat; at 5 ad dextram *quinque partes centeſimas* (quinq; *ἑκατοστημόρια*) ſignificat: ſic & 3 ad ſiniſtram, *tria millia* denotat; at 3 ad dextram, *tria χιλιοστημόρια*, ſeu *tres partes milleſimas*. Adeoq; totus ille numerus 3579|753 denotat *ter mille quingenta ſeptuaginta & novem* integra, & inſuper (7 partes decimas, 5 centeſimas, & 3 milleſimas, ſeu) 753 *partes milleſimas*: (nam 50 *partes milleſimæ* tantundem valent ac 5 *partes centeſimæ*; & 700 *partes milleſimæ* tantundem ac 7 *partes decimæ*; adeoq; conjunctim 753 *partes milleſimæ*, tantundem ac 7 *decimæ*, 5 *centeſimæ*, & 3 *milleſimæ*.) Figuræ autem illæ 753 poſt unitatum locum appoſitæ, (quæ *partes* ſeu *Fractiones Decimales* exprimunt) ſunt ab integris, interpoſito punctulo vel *ſeparatrice linea*, diſterminandæ; ut innoteſcat Unitatum locus, & conſequenter reliqui tam ſupra quam infra locum Unitatum, unde tam ſingularum notarum quam totius Numeri valor æſtimandus eſt.

His ita explicatis: mihi quidem omnino commodum videtur, ſingula numerorum loca ſic diſtinguere, ut, poſito Unita- *Gradus Aſ-*
tum loco indifferenter ſive ad aſcenſum ſive ad deſcenſum, (ut *cendentes &*
qui eſt quaſi utriuſq; communis terminus) loci reliqui (prout *Deſcendentes*
gradatim vel augentur vel diminuuntur) *Gradus* dicantur vel *Aſcendentes* vel *Deſcendentes*. Ita, in numero propoſito 357|9|753, præter figuram 9 unitatum loco collocatam, accedunt gradus *Aſcendentes* (primus, ſecundus, tertius,) ſiniſtrorſum computandos, & totidem *Deſcendentes* Dextrorſum. Adeoq; ſi graduum Aſcendentium indices ponantur 1, 2, 3, &c; erunt è contra deſcendentium indices −1, −2, −3, &c. vel 1, 2, 3, &c. Atq; hoc ſignificatu graduum Aſcendentium &

 Deſcen-

Deſcendentium deinceps facturus ſum mentionem.

3. 2. 1. 0. $\bar{1}$. $\bar{2}$. $\bar{3}$.
3 5 7 1 9 1 7 5 3

Atq; hæc de Figuris Arithmeticis, juxta continuam proportionem decuplam dixiſſe ſufficiat.

CAP. XI.

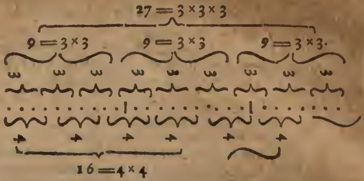
Gradus Aſſcendentes & Deſcendentes in quacunq; proportione. Algebræ fundamentum. Poteſtates Algebricæ cum Geometricis dimenſionibus comparantur. Earum appellationes & characteres. Poteſtates illæ per Gradus Arithmeticos, quàm per Geometricas dimenſiones, aptius explicantur. Algebrica notatio ulterius traditur. Algebræ veterum & Recentiorum differentia. Utriuſq; uſus exſemplo oſtenditur.

Graduum Aſſcendentium & Deſcendentium conſideratio eadem eſt in alia quslibet proportione, quæ in Decupla.

NUmeros vulgo in proportione decuplâ ubiq; gentium diſpoſitos eſſe, ſuperiùs diximus; atq; huic diſtributioni aptatas eſſe vulgares notas ſive figuras Arithmeticas, earumq; locos ſeu gradus tam aſſcendentes, quam deſcendentes. Sed & monuimus, quamvis aliam proportionem in diſponendis Numeris aſſumi potuiſſe, aut etiamnum (ubi opus eſt) poſſe. At quæcunq; demum adhibeatur proportio, modo ea continua ſit, eadem omnino erit Graduum tam Aſſcendentium quàm Deſcendentium conſideratio atq; in proportione Decuplâ.

Exſempli gratiâ. Si apponantur Unitates *vigintiſeptem*: conſtituunt illæ (ut patet) in proportione decupla, *duas Decades cum ſeptem reſiduis Unitatibus*; ideoq; in gradu primo aſſcendente (qui decadum locus eſt) ponenda eſt figura 2 (propter *duas* decades,) & (ob reſiduas *ſeptem Unitates*) in unitatum loco figura 7: ut 27 exprimant *viginti ſeptem*, ſive *duas Decades cum ſeptem inſuper Unitatibus*. Si vero eidem unitatum multitudo in continua proportione quadrupla diſponatur; emerget *Quaternionum quaternio unus*, & Duo inſuper ſimplices *Quaterniones*, cum Tribus reſiduis *Unitatibus*: ponenda igitur (quoad hanc proportionem) in gradu ſecundo aſſcendente figura 1, (quâ quaternionum quaternio *unus* deſignetur;) & in gradu aſſcendente primo nota 2, (propter *duos* quaterniones ſimplices:) & demq; (propter *tres* reſiduas unitates) in unitatum loco figura

gura 3: adeoq; 1, 2, 3, exhibent *unum quaternionem quadruplum, duoſq; ſimplices quaterniones, cum tribus inſuper unitatibus*, ſeu,



quod tantundem eſt, *viginti ſeptem*. Si deniq; proportione triplâ diſponantur: emerget præciſe *ternionum triplicatorum ternio* unus: ponenda igitur eſt, loco tertio aſſcendente, figura 1; & in reliquis ciphra ſeu o, quia nullus ſupereſt innuendus vel ternionum ternio, vel ternio ſimplex, vel etiam unitas, horum igitur loci ciphris erunt ſupplendi; ut tandem 1, 0, 0, 0. (juxta continuam proportionem triplam) exhibeat præciſe *unum ternionum triplicatorum ternionem*, quod tantundem eſt atq; *viginti ſeptem* Et pari modo de alia quâvis proportione dicendum eſſet. Hoc eſt,

In proportione { decupla, 2,7. / quadrupla, 1,2,3. / tripla, 1,0,0,0. } tantundem valent.

Pariter dicendum eſt de gradibus Deſcendentibus. Nam in proportione quadrupla, erit gradus deſcendens primus, *Quadrantum* locus; ſecundus verò, *quadrantū quadrantes* continebit, &c. In proportione triplà, erit gradus deſcendens primus, *trientium* locus; ſecundus vero, *trientum trientes* continebit; tertius, *trientum trientes triſectos*; Et ſic deinceps in infinitum deſcendendo, ſicut ex aliâ parte in infinitum proceditur aſſcendendo. Hujuſce rei exemplum ſatis inſigne paſſim occurrit in fractionibus (ut loquuntur) Aſtronomicis; ubi Integra ſupponuntur dividi in partes ſexageſimas & ſexageſimarum ſexageſimas &c. hoc eſt,

minuta prima, ſecunda, tertia, &c. ad dextram deſcendendo; & contra ad ſiniſtram aſſcendendo colliguntur in Aggregata Sexagecupla, & Sexagecuplorum ſexagecupla, &c. quæ vocantur *Sexagena prima, ſecunda, tertia, &c.* hoc modo.

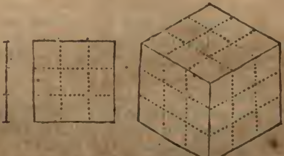
$49^{''''}, 36^{'''}, 25^{''}, 15^{'}, 1^{0}. 15^{'}, 25^{''}, 36^{'''}, 49^{''''}$. ubi quilibet locus valet ſexagecuplum loci ſibi ad dextram proximi, & contra ſexageſimam partem illius qui ſibi proximus eſt ad ſiniſtram. Quod autem vulgò fit in ratione Decupla, & in fractionibus Aſtronomicis in Sexagecupla, poteſt & in alia quavis ratione fieri.

Hinc Algebræ fundamentum. His ita explicatis; monendum duco, Univerſam Artem *Algebræ* ſive *Analytices* ex hoc uno quaſi fundamento dependere. Atq; ſi hæc, quæ de Gradibus (in quacunq; ratione Aſcendentibus & Deſcendentibus) diximus, ſatis intelligantur; magnam exinde affulgere lucem ad *Poteſtates* (uti vocantur) *Algebricas* intelligendas, & ritè tractandas. Nam revera, quod nobis nunc eſt *gradus* (ſive Aſſcendens, ſive Deſcendens,) *primus, ſecundus, tertius,* &c. illud eſt Algebriſtis *Latus, Quadratum, Cubus,* &c. vel *Poteſtas prima, ſecunda, tertia,* &c. cum hoc tamen diſcrimine: Quod illi per plurium dimenſionum Geometricarum ſuppoſitionem conantur explicare, nos inter Arithmeticæ fines continemus: vel etiam, ſi in materia Geometrica velimus illud oſtendere, poſſumus illud per Quantitates Homogeneas (nempe vel per ſolas lineas, vel per ſolas ſuperficies, vel per ſola corpora) præſtare, quod alii per Heterogoneas (nempe per lineas, & ſuperficies, ſimul cum ſolidis, aliiſq; etiam plurium adhuc dimenſionum imaginariis quantitatibus comparatas) præſtare ſatagunt. Hoc autem cum olim vel ignorabant, vel non ſatis attendebant, vel forte diſſimulabant, adeoq; occultabant Algebriſtæ Veteres; coacti fuere multa ſpecialiter de Lineis, de Planis, & de Solidis, tradere & demonſtrare, quæ rectiùs (& quidem faciliùs) de numeris (vel, ſi liber, de Rationibus) generaliter eſſent & tradenda & demonſtranda; quæ deinde, ubi opus eſſet, (ſive in re Geometrica, ſive in quavis alia) ſpecialiter eſſent accommodanda, non minus quam reliqua Arithmetica tota. Cur autem illi ad quantitates Geometricas (potius quam Arithmeticas) & quidem Heterogeneas (potius quam Homogeneas) confugerit; nullam ego rationem video

video magis probabilem, quam quod Arithmeticorum *Terminos* (non verò, ut oportuit, *Numeros*) cum *Partibus* Geometricis comparabant; adeóq; non animadvertebant quo pacto poſſent Arithmeticè illud exhibere quod in Geometricis obſervaverant: aut etiam fortaſſe, quoniam Elementa Geometrica pro totius Matheſeos baſi reputabant, putabant etiam Arithmetica omnia eò redigenda eſſe, neq; de horum veritate meliùs conſtare poſſe quàm ſi inde comprobentur; cum tamen revera res Arithmeticæ altioris ſint & magis abſtractæ naturæ, quàm Geometricæ; & v.g. non, quia *linea bipedalis bipedali addita facit quadripedalem*, ideo *duo & duo faciunt quatuor*: ſed potius, quia hoc, ergo illud. Totum autem hoc quicquid eſt negotii meliùs percipietur poſtquam Notationem ſive Numerationem Algebricam (ut loquuntur) ſeu Coſſicam, ejuſq; originem, explicavero: Quod jam facturus ſum.

Poteſtatum Algebricarũ cum Dimenſionibus Geometricis comparatio. Earumq; appellationes.

Obſervarunt illi (qui numeros Coſſicos ordinarunt) ex principiis Geometricis, quod ſi *Linea* aliqua ad libitum aſſumpta (puta, trium pedum longa;) ducatur in ſe, (hoc eſt, ſi tantum extendatur, ſive moveatur directè in latum, quantum eſt in longum extenſa,) fiet *Quadratum*, cujus *Latus* erit linea aſſumpta: ſi vero Quadratum hoc ducatur in ſuum Latus



(hoc eſt, ſi tantum extendatur, ſeu moveatur directe in altum, quantum eſt vel in longum, vel in latum extenſum; ſeu, quod perinde eſt, ſi altitudinem acquirat Lateris longitudini æqualem) *fiet Cubus*, cujus itidem latus erit aſſumpta linea. Obſervárunt deinde Aream ſeu magnitudinem inveſtigari multiplicando numerum lateris in ſeipſam; (ideoq; cum latus ſit

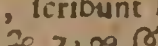
trium pedum longum, quoniam ter tria ſunt 9, continebit Area Quadrati novem pedes quadraticos:) Item ſi Area quadrati multiplicetur in ſuum latus, emerget magnitudo Cubi, ſeu potius multitudo pedum cubicorum in cubo contentorum; (adeoq; ſi area quadrati 9, multiplicetur per latus 3, prodibit numerus 27, quæ eſt magnitudo Cubi, ſeu multitudo pedum cubicorum in illo cubo contentorum cujus latus eſt trium pedum longum.) Hæc autem invicem comparantes, quoniam figura quæ ex latere in ſeipſum ducto emergit *Quadratum* dicitur, & quæ emergit ex quadrato in latus ducto *Cubus* dicitur; ideo & productum ex numero in ſeipſum multiplicato numerum *Quadratum* appellabant (qui quadrati Aream quodammodo repræſentat) cujus *Latus* ſive *Radicem* appellant numerum illum qui ſic erat in ſe multiplicatus; & productum, ex multiplicatione numeri quadratici in ſuum latus ſeu radicem, appellabant numerum *Cubicum*, qui & aream ſeu magnitudinem Cubi quodammodo repræſentat. (Atq; hinc ortum eſſe, credo, ut *numerum hunc in illum ducere* idem ſignificet ac *numerum hunc in illum*, ſeu per illum, *multiplicare*.)

Quamvis autem animadverterint, Geometrice in *Cubo* ſiſtendum eſſe (utpote qui tres dimenſiones Geometricas habeat, longitudinem, latitudinem, & profunditatem; nec plures ſint in rerum natura poſſibiles) adeoq; cubum in ſuum Latus duci non poſſe: attamen, cum nullum ejuſmodi terminum Arithmeticis Multiplicationibus poni viderint, quin ut poſſit Radix ſeu Numerus lateralis in continuos productos quouſq; libet multiplicari; ideo & Numeros *Figuratos* (quos vocant) ulterius continuandos putabant, quos quatuor, quinq:, ſex, aut etiam plures dimenſiones ſupponunt continere: eóſq; *Quadratoquadraticos*, *Surdeſolidos*, *Quadraticubos*, &c. nominabant; appellationibus ſcilicet tanquam ex Geometria mutuatis.

Nonnulli (præſertim Itali) pro *quadrato*, *zenſum* vel *cenſum* dicunt, & *Zenzizenzum*, *Zenzicubum*, &c. pro *quadratiquadrato*, *quadraticubo*. (vel *quadratocubi*) &c. item, pro *Radice*, *Rem* dicunt; unde & Regulam Algebræ, *Regulam rei & cenſus* (hoc eſt, regulam Radicis & Quadrati, ſeu Zenzi) appellant: item, pro *Re*, *coſam* dicunt (nam *res* Italice *coſa* dicitur, ſicut Gallice *choſe**) unde hi numeri Figurati, *Coſſici* vocantur; & regula Algebræ, regula *coſæ*, ſeu *coſſi*, ſeu *coſſica*; ſic *characteres coſſici*, *operatione*,

* Utrumq; a Latino idem causa.

perationes Coſſicæ, &c. dici ſolent. Alii ſimplicius (& forte melius) pro *Radice*, *Quadrato*, *Cubo*, *Quadrato-quadrato*, (ſeu *Biquadrato*,) *Surdeſolido*, *Quadrato Cubi*, *Surdeſolido ſecundo*, *Quadrati-quadratiquadrato*, *Cubo cubi*, *Quadrato ſurdeſolidi*, *Surdeſolido tertio*, &c; dicunt *Poteſtatem primam*, *ſecundam*, *tertiam*, *quartam*, &c. pro numero dimenſionum quæ inibi ſupponuntur contineri.

Sed & hiſce poteſtatibus ſeu numeris figuratis ſuos Characteres aptatos habent, quibus indicentur. Aliqui quatuor initialibus literis R, Q, C, S, innuunt *Radicem*, *Quadratum*, *Cubum*, *Surdeſolidum*; vel etiam pro R, ſcribunt N, hoc eſt *Numerum*: Alii characteribus his utuntur  qui ex literis r z c ſ oriuntur, & innuunt *Rem*, *Zenſum*, *Cubum*, *Surdeſolidum*. Alii (ſaltem poſt *Franciſcum de Vietâ*, qui Arithmeticam *Speciosam*, ut loquuntur, vel primus omnium introduxit, vel ſaltem admodum auxit) pro *Radice* quamlibet ad placitum Alphabeti literam adhibent, ut A, ejuſq; reliquas poteſtates adjunctis literis *q* & *c* innuunt, ut Aq, Ac, Aqq, &c. pro *Quadrato*, *Cubo*, *Quadratiquadrato*, &c. ex radice A: Atq; hac notatione utitur D. *Oughtredus*, Anglus, (venerabilis ſenex adhuc in vivis) in ipſius *Clavi Mathematicæ*, quam (aliquandiu antea conſcriptam) Anno 1631 primo edidit, & deinceps aliquoties iteravit. Poſt eum (vel eodem circitèr tempore) D. *Harriotus* item Anglus, Mathematicus eximius, in ipſius *Artis Analyticæ praxi*, (quã poſt ipſius obitũ edidit D. *Warnerus*, egregius & ipſe Mathematicus, anno item 1631) literis alphabeticis ad placitum aſſumptis, & toties iteratis, quoties poteſtas indicata poſtulaverit, deſignat, puta *a*, *aa*, *aaa*, *aaaa*, &c. pro Radice, Quadrato, Cubo, Biquadrato, &c. Deniq; D. *des Cartes*, & poſt illum alii, literarum ſæpe iterandarum tædium timentes, radicem, ut prius, qualibet Alphabeti litera deſignant, & ipſius reliquas poteſtates ſuſpenſis notis numericis (pro numero Gradus ſeu Poteſtatis) deſignant, ut a, a^2, a^3, a^4, &c. Quorum ſpecimen in ſubjuncto Schemate intuendum propoſui.

Characteres Coſſici.

Nomina

Nomina.	*Characteres.*					*Poteſtas ſeu gradus.*
Radix	𝔯	R	A	a	a	1
Quadratum	ʒ	Q	Aq	aa	a^2	2
Cubus	𝔠	C	Ac	aaa	a^3	3
Quad. quadratum	ʒʒ	QQ	Aqq	$aaaa$	a^4	4
Surdeſolidum	ß	S	Aqc	&c.	a^5	5
Quad. Cubi.	ʒ𝔠	QC	Acc		a^6	6
2^m^ Surdeſolidum.	Bß	bS	Aqqc		a^7	7
Quad. quad. quad.	ʒʒʒ	QQQ	Aqcc		a^8	8
Cubi cubus	𝔠𝔠	CC	Accc		a^9	9
Quad. Surdeſol.	ʒß	QS	Aqqcc		a^{10}	10
3^m^ Surdeſolidum	Cß	cS	Aqccc		a^{11}	11
Quad. quad. cubi	ʒʒ𝔠	QQC	Acccc		a^{12}	12
4^m^ Surdeſolidum	Dß	dS	Aqqccc		a^{13}	13
Quad. 2^i^ Surdeſol.	ʒBß	QbS	Aqcccc		a^{14}	14
Cubus Surdeſol.	𝔠ß	CS	Accccc		a^{15}	15
Quad. quad quad. quad.	ʒʒʒʒ	QQQQ	Aqqcccc		a^{16}	16
&c.						

Notandum autem eſt, quod in grandioribus poteſtatibus (quæ nempe quartam ſequuntur) non eodem apud omnes modo appellationes aptantur. Nam v. g. *Quadratocubus* apud non paucos ſignificat *Quadrati cubum*, ſeu *Cubi quadratum*, adeoq; *poteſtatem ſextam*, (quæ ex cubo in ſeipſum ducto emergit, vel ex quadrato cubicè multiplicato, hoc eſt, in ſeipſum bis ducto;) atq; in hac ſignificatione appellationes quas in Schemate appoſui intelligendæ ſunt, atq; huic congruunt prima & ſecunda characterum ſeries: At *Vieteus* (& qui illum hac in re ſequuntur) per *Quadrato-cubum* intelligunt poteſtatem quintam, quæ ex quadrato in Cubum ducto emergit; adeoq; veterum *Surdeſolidos* (primos) ille quadrato-cubos vocat; (& eadem analogia reliquarum poteſtatum nomina format, adeoq; ſurdeſolidorum appellationem omittit;) cui etiam nomenclaturæ conveniunt ipſius characteres, (qui in characterum tertia ſerie habentur) *Carteſius* (& qui illum imitantur) veterum potius nomenclaturam reſumit: ipſius verò characteres (quinta ſerie poſiti) utrivis æquè conveniunt, cum ſolummodo

modo poteſtatum ordinem, ſeu numerum dimenſionum innuant, adeoq; minus dubiæ ſignificationis, & errori minus obnoxii.

Quod autem alii per varias dimenſiones Geometricas explicarunt, ego potius per gradus Arithmeticos explicandum exiſtimo, adeoq; extra campum Arithmeticum non excedendum. Idem igitur nobis eſt *Gradus aſcendens primus, ſecundus, tertius,* &c. quod illis *Radix, Quadratum, Cubus,* &c. Prout enim, apud illos, quoties in Radice continetur Unitas, toties in Quadrato Radix, totieſq; in Cubo Quadratum ſupponitur contineri: ſic & nobis, quoties in *Gradu Aſcendente primo* continetur unitas, toties in ſecundo primus, & in tertio ſecundus; & ſic deinceps. Quod autem de gradibus ſupra unitatem Aſſcendentibus dictum eſt, etiam de gradibus infra Unitatem Deſcendentibus eſt intelligendum. Sicut enim, ubi Radix eſt unitate major, ſingulæ poteſtates gradatim Aſſcendunt: ita ubi Radix eſt unitate minor, gradatim Deſcendunt. Si vero ipſa Unitas ſit Radix, neq; Aſſcendunt neq; Deſcendunt, ſed & poteſtas unaquæq; eſt etiam Unitas; nam Unitas in Unitatem quotieſcunq; Multiplicata, manet Unitas. Mallem autem per varios Gradus Arithmeticos, quàm per Geometricas Dimenſiones, rem explicare. his de cauſis.

Poteſtates Algebricæ meliùs per Gradus Arithmeticos, quam per Geometricas Dimenſiones, explicantur.

1° Quia univerſa Algebra eſt vere Arithmetica, non Geometrica; ideoq; potius Arithmeticis quam Geometricis principiis explicanda. Quamvis enim Geometrica multa Algebricis principiis vel inveniantur vel elucidentur, non tamen inde ſequitur Algebram eſſe Geometricam, aut quidem Geometricis principiis nixam, (prout, qui ſic procedunt, videntur imaginari,) ſed ob intimam Arithmeticæ Geometriæq; affinitatem illud evenit, aut potius quoniam Geometrice ſit Arithmeticæ quaſi ſubordinata, adeoq; univerſalia Arithmetices effata rebus ſuis ſpecialiter applicet. Nam, ſiquis lineā tripedalem bipedali additā, lineā quinq. pedes longam, conſtituere affirmet eò quod numerus binarius & ternarius additi efficiant quinarium; non tamen calculus ille Geometricus, eſt ſed plane Arithmeticus, quanquā Geometricæ menſuræ ſubſerviat: eſt enim aſſertio illa, de æqualitate numeri quinarii, cum numeris binario, & ternario conjunctis; aſſertio generalis, quibuſcunq; aliis rebus non minus quam Geometricis applicabilis; nam & Angeli duo

& tres, ſint Angeli quinque. Atq; eadem omnino ratio eſt operationum omnium ſive Arithmeticarum ſive ſpeciatim Algebricarum; quæ ex principiis magis generalibus procedunt quam ut Geometricis menſurationibus reſtringantur.

2° Quia Poteſtates Algebricæ nõ rarò altiùs aſcendunt quàm Geometricæ dimenſiones. Cum enim Geometria non plures quàm tres admittat dimenſiones, Longitudinem, Latitudinem & Altitudinem ſeu profunditatem, adeoque nec ultra corpus ſolidum, ſeu cubum, aſcendit: Algebra interim ad Quadratoquadrata ſeu ſurdeſolida, aliaſq; ad libitum ſuperiores poteſtates procedit. Cõmodius ergo per gradus Arithmeticos, quia indefinite quouſq; libet extendi poſſunt, quam per Geometricas Dimenſiones, quæ vel omnino tantũ tres ſunt vel, ſi plures ſupponantur, imaginariæ tantum ſunt & plane impoſſibiles.

3° Quia etiamſi Geometria poſſet tot dimenſiones ſuppeditare, quot Arithmetica gradus; tamen nec ſic quadrarent operationibus Algebricis. Sæpiſſimè enim contingit æquationes fieri inter varias poteſtates non ejuſdem altitudinis quod quamvis ſatis conveniat Gradibus Arithmeticis, Geometricis, tamen dimenſionibus neutiquam convenit. Verbi gratiâ Poſito pro Radice, ternario; hujuſmodi poſſunt æquationes occurrere $2\,Q = 6\,R$ vel $2\,C = 6\,Q$; hoc eſt, Duo Quadrata æquari ſex Radicibus; vel duos Cubos, ſex Quadratis. At quis non videt, Quadrata & Cubos, vel Quadrata & Latera, cum ſint quantitates heterogeneæ, non poſſe comparari? Nec enim Cubus conſtituitur ex quadratis, (quamvis illis terminetur) nec quadratum ex Lateribus. Omnes enim quantitatum comparationes quoad æqualitatem, inter Homogeneas tantum ſunt faciendæ. Sic ſolidum ſolido æquale eſt aut inæquale, & Planum Plano, & Linea Lineæ; At ſolidum Plano nec æquale eſt nec inæquale, ſed quid Heterogeneum. Sic ſolidum ſolido addi vel auferri dicitur, & planũ plano, lineæq; lineæ: at nec ſolidum plano, nec utrivis linea. Verum, ſi Arithmeticè loqui libeat, optimè dici poteſt, centurias duas æquari viginti decadibus, aut Duo millitia centuriis viginti; hoc eſt, numeros aliquot unius gradus ſimul ſũptos, æquari aliquot numeris alterius gradus ſimul ſumptis: Sic & duas trientum triades æquari ſex trientibus, hoc eſt, (ſi 3 ſit radix) duo quadrata æquari ſex radicibus. Cum enim numeri omnes (pro-

prie

priè dicti) ex unitatibus conſtituantur (vel ſaltem ad unitatem vere rationem habeant) ſunt vere Homogeneæ (licet fortaſſe, ſi de numeris ſurdis etiam loqui velimus ſint Incommenſurabiles) ideoque vel æquales vel inæquales majores aut minores, alii aliis dici poſſunt, poſſuntque invicem addi vel auferri: quæ omnia in Geometricis magnitudinibus, niſi homogeneis, fieri non poſſunt.

Siquis dicat Æquationes Algebricas, ubi Cubi, quadrata, & Latera comparantur, non de Cubis, quadratis & Lateribus Geometricis inſtitui; ſed de Numeris Cubicis, quadraticis, & Lateralibus; poſſe autem Numeros quadraticos cubicis aliquot æquales eſſe: Fateor quidem hoc verum eſſe: Sed jam de Numeris res erit, (quod nos contendimus,) non de magnitudinibus; eritq; conſideratio plane Arithmetica, non Geometrica. Eſtq; numerus Lateralis, quadraticus, Cubicus, cæterique, nihil aliud quam denominationes graduum (ſive Aſſcendentium ſive Deſcendentium) primi, ſecundi, tertii, &c. in certâ aliquâ proportione. Sic in proportione triplâ, gradus aſſcendentes exhibent Triades, Ternionum triades, Ternionum triades triplicatas &c. hoc eſt, Radices, Quadrata, Cubos &c. Si enim *Ternio* radix conſtituatur; *ternionum trias* erit numerus quadraticus, nempe numerus ternarius in ſe ductus; & *ternionum trias triplicata* numerus cubicus, nempe numerus ternarius in ſui quadratum ductus, Et ſic de cæteris.

Atq; has rationes dediſſe ſufficiat, cur credam poteſtates Algebricas melius per Gradus Arithmeticos, ſeu numeros continue proportionales, quam per dimenſiones Geometricas Heterogeneas, explicari poſſe.

Verum cum jamdiu recepta fuerint vocabula, quibus poteſtates Algebricæ vulgò exprimuntur; eadem & mihi non incommode adhibenda cenſeo: cum vocabula artium ſemel recepta, quamvis fortè minùs exactè rebus aptata, rarò poſſint citra gravius incommodum immutari. Præterquam enim, quod ſi frequentes hujuſmodi pro cujuſvis arbitrio fierent immutationes, non modo pluribus quam neceſſe eſt vocabulis oneranda eſſet memoria, cum & antiqua & nova ſint addiſcenda & recordanda, ut varii authores varia nomenclatura utentes intelligantur; illud interim gravius eſt, quod eadem vocabula, vario ſenſu a variis uſurpata, confuſionem non raro

Poteſtates Algebricas, cur antiquis nominibus adhuc appellandas duxerim.

 haud

haud exiguam inducant. ſufficiat ſaltem monuiſſe, varias Poteſtates Algebricas, quocunq; appellentur nomine, nil aliud eſſe quam Numeros ſive Lineas ſive alias etiam quantitates invicem homogeneas, continue proportionales.

Notatio Algebrica ulterius traditur. Ut autem numerationem Algebricam plenius abſolvam; ſciendum eſt hujuſmodi ſive poteſtates ſive gradus (cum non ita commode poſſint ac numeri ſimplices decupla proportione diſpoſiti, ipſis tantum locis deſignari) appoſitis ſuis quibus indigentur characteribus diſtingui ſolere, quales nempe ſupra oſtendimus. Cum autem hujuſmodi poteſtates plures ſimul conjunguntur, fit hoc non ſimpliciter unam alteri immediate poſtponendo (prout in vulgaribus notis numeralibus fieri ſolet;) ſed peculiaribus *ſignis* hunc in finem inventis colligantur: ſuntque ea præſertim hæc duo + & −, quorum illud Additionis, hoc Ablationis indicium eſt; ſive illud Affirmativum, hoc Negativum; vel illud Poſitivum, hoc Ablativum; ſive (ut vulgo efferuntur) *Plus* & *minus*. Ego hoc tertium (cum *Oughtredo*) adjungendum exiſtimo, × quod ſit Multiplicationis indicium. Item, = vel ∞ quæ ſit Æqualitatis nota. Sic numerus (ſupra memoratus) 27, ratione decupla conſideratus erit 2 ℞ + 7 vel 2 R + 7 vel 2 A + 7, Hoc eſt, duæ radices ſeu decades & ſeptem unitates: In proportione quadrupla, erit 1 𝔷 + 2 ℞ + 3 vel 1 Q + 2 R + 3 vel A q + 2 A + 3, vel $a^2 + 2a + 3$; hoc eſt unum quadratum (ſeu quaternionum quaternio) & duæ radices (ſeu quaterniones) & tres unitates: In proportione tripla, erit 1 ȼ vel 1 C vel 1 A c vel $1a^3$; hoc eſt, unus cubus, ſeu ternionum trias tripla. Vel etiam in proportione decupla idem numerus 27 erit 3 ℞ − 3 vel 3 R − 3 vel 3 A − 3; hoc eſt, tres Radices (ſeu decades) demptis tribus unitatibus: In quadrupla, 1 𝔷 + 3 ℞ − 1 vel 1 Q + 3 R − 1 vel 1 A q + 3 A − 1 vel $1a^2 + 3a - 1$: hoc eſt, unum quadratum (ſeu quaternionum quaternio) & tres Radices (ſeu quaterniones) deptâ unitate: Et pariter in aliis; Atque hujuſmodi ſunt illæ formulæ locutionis ordinariæ, cum, pro *Novendecim*, dicimus *Undeviginti*; pro *Octodecim*, *Duodeviginti* &c. hoc eſt, *viginti dempto uno*, *viginti demptis duobus* &c. Tale quid innuitur, cum pro 4. 9. 19. &c. ſcribitur IV. IX. XIX. hoc eſt, 5 − 1. 10 − 1. 10 + 10 − 1. Item 40. 90. 99. &c. XL. XC. XCIX. hoc eſt, 50 − 10. 100 − 10.

100

100 — 10 + 10 — 1. &c. Eſq; hæc notatio Algebrica, ſeu numerorum Coſſicorum.

Notandum eſt autem inter Algebram Veterum, & Recentiorum hoc præſertim diſcrimen intercedere; quod veteres ſolebant numeros tantum adhuc ignotos & inveſtigandos characteribus Coſſicis exprimere; at Recentiores Algebriſtæ, tam notos quā ignotos ſic ſolent exprimere Ut deinceps ſuo loco patebit. *Algebrica Veterum & Recentiorum, quomodo differunt.*

Interrogabit forſan aliquis; Quorſum hæc nova ſigna ſeu ſymbola adhibeantur numeris exprimendis, potius quam vulgares numerorum Notæ? *Utriuſq; uſus.*

Reſpondeo; Triplici de cauſa hoc factum eſſe; partim Neceſſitatis, partim Brevitatis, partim Perſpicuitatis (atq; adeo Utilitatis,) gratiâ.

Primo, inquam, Neceſſitatis cauſa: cum, pro numero aliquo adhuc ignoto, ſubſtituitur ſymbolum ſeu character eo uſque dum ipſe innoteſcit.

2° Brevitatis & facilitatis causâ, cum illud non raro citiùs peragatur per ſymbola ſeu *ſpecies*, quam per ipſos numeros.

3° Perſpicuitatis adeoq; majoris Utilitatis gratiâ: ubi enim per ſymbola ſeu ſpecies procedit inquiſitio; tota operationum ſeries ſic peracta evidentius in ipſa tandem quantitate provenienre patet: quod ſi operationes ipſis numeris peragerentur, quamvis eadem tandem provenire poſſit quantitas quæſita, nulla tamen ipſarum operationum veſtigia ſupereſſent. Ea vero quæ provenit quæſtionis ſolutio in hujuſmodi ſymbolico operationum progreſſu, univerſalem oſtendit methodum qua non modo propoſita difficultas ſpeciatim ſolvatur; ſed & infinitæ aliæ quæſtiones commun&a eadem opera ſolutionem accipiant, ſi generalis nempe ſolutio proveniens ſpeciatim applicetur prout quæſtionis hypotheſis variata poſtulet.

Res tota exemplo melius patebit. Operæ pretium igitur exiſtimo problema quoddam non difficile breviter ſubiungere, quo melius perſpiciatur quid ea velint quæ diximus. (Ubi tamen veniam me facile conſequuturum ſpero, ſi nonnulla de Additione, Subductione, Multiplicatione, & Diviſione tanquam jam cognita aſſumam, quæ deinceps ſunt tradenda: aut ſaltem ſiqui mihi hanc veniam non ſit conceſſurus, poterit ille hujuſce problematis ſolutionem eouſq; differre, donec ea fuerint tradita: non enim ego illam hic loci ἀποδεικτικῶς pro- *Exemplo oſtenditur.*

pono, ſed tantum ἐξηγητικῶς.) Eſto igitur hoc Problema propoſitum

“ Acceſſit virgo quædam tres ſucceſſive Divos, puta Jovem, “ Apollinem, Palladem; Oravit Jovem, ut quos ipſa ſecum “ attulerat nummos ille duplos efficiat; quo præſtito, reddidit “ illa Jovi gratitudinis ergo tres aſſes: Apollo deinde ſimili ora- “ tione compellatus duplavit virginis nummos reſiduos; cui & “ illa tres ſtatim aſſes pependit; Reliquos autem ad Palladem “ duxit quos ipſa geminavit; cui & virgo tres item aſſes dona- “ rii loco obtulit; Quibus peractis, unicus tandem aſſis virgini “ relictus erat quem ſecum auferat. Quæritur; quot pri- “ mum attulerat.

Hoc ego Problema ſic ego aliquando carmine utcunq; reddidi; ad imitationem aliorum, quæ paſſim extant ἐπιγραμματικῶς propoſita.

Acceſſit virgo tres, ſupplex, ordine Divos;
Et tulit accedens aſſes, quot neſcio, ſecum.
Oratus, ductos geminavit Jupiter aſſes;
Protinus illa Jovi tres aſſes grata pependit.
Quotq; ſuperfuerant duplavit Phœbus Apollo:
Grata itidem Phœbo tres virgo reddidit aſſes.
Pallas tunc reliquos geminavit Virginis aſſes:
Aſſibus & tandem tribus eſt donata Minerva.
Unicus & ſupereſt, quem ſecum retrulit, aſſis.
Dic mihi, quot fuerant, quos primo Virgo ferebat.

Hoc ego ut ſolvam problema; Primo juxta veterum Algebram pro numeris adhuc ignotis Characteres coſſicos ſubſtituam, notos autem notis ſuis characteribus ſubſtituam :• Deinde verò, juxta Recentiorum methodum, pro numeris tam notis quam ignotis ſymbola ſubſtituam uſque dum ad ſolutionem pervenero: Ut hoc pacto utriuſq; methodi exēmplū præſtem.

Primo. Pro ignoto aſſium allatorum numero, ſubſtituo 1 ℞: hic autem numerus (quantuſcunque fuerit) a Jove duplatus fit 2 ℞: hinc demptis tribus aſſibus Jovi ſolutis, reſtant 2 ℞ — 3. hoc reſiduum cum geminaverat Apollo, fiunt 4 ℞ — 6: hinc cùm tres adhuc aſſes ablati fuerint, Apollini tradendi, manebunt 4 ℞ — 9 hoc reſiduū Pallas duplando efficit 8 ℞ — 18: unde cum tres inſuper aſſes ſint adhuc auferendi qui Palladi tribuantur, manebat tandem 8 R — 21. At in

quæſtione propoſita unicus aſſis ſupereſſe dicitur. Ergo ſtatuendum eſt 8 R − 21 tantundem eſſe ac 1. Hoc invento; Quoniam 8 R − 21 = 1, (additis utrinq; 21) erunt 8 R = 22. Ergo 4 R = 11 Et 2 R = 5 $\frac{1}{2}$. Et deniq; 1 R = 2 $\frac{1}{4}$. At 1 R ponitur numerus aſſium allatorum; erant ergo aſſes allati 2 $\frac{1}{4}$. Totus quippe operationis progreſſus ſic ſimul conſpiciendus eſt.

1 ℞	1 R
1 ℞	1 R
2 ℞	2 R
− 3	− 3
2 ℞ − 3	2 R − 3
2 ℞ − 3	2 R − 3
4 ℞ − 6	4 R − 6
− 3	− 3
4 ♃ − 9	4 R − 9
4 ♃ − 9	4 R − 9
8 ♃ − 18	8 R − 18
− 3	− 3
8 ♃ − 21 = 1.	8 R − 21 = 1
8 ♃ = 22	8 R = 22
4 ♃ = 11	4 R = 11
2 ♃ = 5 $\frac{1}{2}$	2 R = 5 $\frac{1}{2}$
1 ♃ = 2 $\frac{1}{4}$	1 R = 2 $\frac{1}{4}$

Patet hinc Characterem Coſſicum 1 ℞, vel 1 R, neceſſitatis cauſa primò fuiſſe appoſitum: quia tunc ipſius valor nondum innotuerat, ſed quærendus erat. Non tamen adeo abſolute neceſſarium erat (in præſente problemate) hoc pacto procedere, acſi nulla alia methodo quæſtioni reſponderi potuerit: Nam, quamvis illud fortaſſe in difficilioribus Problematis non raro accidat, non tamen adeo difficilis eſt præſentis quæſtionis ſolutio quin ut poſſit citra opem Algebræ inveſtigari. Nempe hoc pacto, Si reſiduo 1, reſtituantur 3 (qui nuperrime Palladi ſolvebantur) fiunt 4 (tot ergo Pallade duplante provenerant) horum ſemiſſis 2, eſt numerus aſſium ad Palladem adductorum; quibus ſi adjiciantur 3 (qui nuper ſoluti fuerant Apollini) fiunt 5, (tot ergo Apolline duplante provenerant) horum ergo ſemiſſis 2 $\frac{1}{2}$ ad Apollinem duxerat; quibus ſi adjiciantur 3 (qui nuper detracti erant ſolvendi Jovi) fiunt 5 $\frac{1}{2}$, qui duplante Jove provenerant; horum ergo ſemiſſis 2 $\frac{1}{4}$ eſt numerus aſſium ad Jovem allatorum; qui eſt numerus quæſitus

Quamvis autem in hujuſmodi minoris difficultatis quæſtionibus

nibus non ſit abſolute neceſſarium ut Methodo Algebrica ſeu Analytica procedatur: Hoc tamen utilitatis utcunq; emergit, ut ſolutio ſemel inveſtigata poſſit etiam aliis hypotheſibus applicari; nec opus ſit pro ſingulis quæſtionis variationibus totam operationum ſeriem de novo ordiri. Verbi gratia. Si, cæteris ut prius manentibus, dicamus 3 aſſes tandem ſupereſſe; eſſent igitur 8 R — 21 = 3: ideoq; 8 R = 24 & R = 3. Si ſupereſſent 5 aſſes, eſſent 8 R — 21 = 5; ideoq; 8 R = 26, & $3\frac{1}{4}$. Et pariter faciendum erit ſi plures aut pauciores aſſes ſupereſſe dicatur. Ut

8 R — 21 = 3	8 R — 21 = 5	8 R — 21 = 7
8 R = 24	8 R = 26	8 R = 28
1 R = 3	1 R = $3\frac{1}{4}$	1 R = $3\frac{1}{2}$

8 R — 21 = 9	8 R — 21 = 11	
8 R = 30	8 R = 32	&c.
1 R = $3\frac{3}{4}$	1 R = 4	

Secundo. Juxta Algebram ſive Analyticen Recentiorum, qui non modo pro numeris ignoratis, ſed & pro numeris datis, ſymbola ſubſtituunt, ſolutio proveniet magis adhuc univerſalis. Verbi gratia. Pro numero quæſito ſubſtituatur A, pro binario (quia nempe ſit aliquoties numerorum duplicatio) B, & deinde pro ternario (quia nempe 3 aliquoties auferuntur) C, & deniq; pro numero reſiduo (qui hic eſt 1) D: progreſſus erit hujuſmodi

A
B A — C
Bq A — B C — C
Bc A — Bq C — B C — C = D

Hæc autem ſymbola pariter præſtabunt quæſitum, ſive quemlibet Divorum allatos nummos duplare, triplare, quadruplare, &c. dixeris; (nempe interpretando B, pro 2, 3, aut 4 &c.) item ſive tres, quatuor, aut quinq; &c. aſſes ſingulis traditos, (nempe interpretando C de 3, 4, 5, &c.) & deniq; ſive unum, duos, tres, &c. (nempe interpretando D, de 1, 2, 3, &c.) aſſes tandem ſupereſſe dixeris.

Si enim quemlibet deorum nummos dupláſſe dixeris erit B = 2, Bq = 4, Bc = 8; Si tripláſſe dixeris, erit B = 3, Bq

Bq = 9, Bc = 27, &c. Deinde ſi cuivis tres aſſes redditos dixeris, erit C = 3; ſi quatuor erit C = 4 &c. Deniq; ſi unum ſupereſſe dixeris, erit D = 1; ſi duos, erit D = 2, &c. Adeoq; pro variatâ hypotheſi varianda erit ſolutionis interpretatio.

$$BcA - BqC - BC - C = D$$
$$8A - 4C - 2C - C = 1$$
$$8A - 12 - 6 - 3 = 1$$
$$8A = 22$$
$$A = 2\tfrac{1}{4}$$

$$BcA - BqC - BC - C = D$$
$$27A - 9C - 3C - C = 2$$
$$27A - 36 - 12 - 4 = 2$$
$$27A = 54$$
$$A = 2$$

Et ſimiliter faciendum eſſet quicunq; eſſent alii numeri in quæſtione poſiti.

Atq; hactenus Notationem Algebricam, Coſſicam, Symbolicam ſive ſpecioſam, quantum opus eſt explicavi.

CAP. XII.

Fractionum ſive Minutiarum Notatio. Fractionis Denominator, & Numerator. Minutiæ minutiarum. Fractio propria, impropria. Numerationis Epilogus.

Unicum adhuc ſupereſt ut univerſam numerorum Notationem abſolvamus: nempe Notatio *Fractionum*, ſive *Minutiarum*, quos *Numeros Fractos* appellare ſolent. Quamvis enim Fractionum natura perfectius deinceps intelligetur, poſtquam Rationum ſive proportionum naturam explicaverimus, operæ tamen pretium eſſe exiſtimo, eâ de re nonnulla hîc adjungere, necui manca videatur Notationis traditio, ſi illud hic loci prorſus negligeretur. *Fractionum Notatio.*

Sunt autem *Fractiones*, ſeu *Numeri Fracti*, non tam numeri, quam *Unitatis fragmenta*. Quanquam enim, ut ſupra dictum eſt, *Unitas* ſit Numerorum minimus; (cum paucius quàm Unum *Fractionis Denominator.*

eſſe non poſſit, neque aliquid rariùs quàm ſemel:) attamen *Unum* illud ſupponi ſolet (ut quid continuum) in membra partiri ſive plura, ſive pauciora, (prout res poſtulaverit) æqualia tamen.

Fractionis Denominator. Prout autem membra illa æqualia, ſive partes æquales, alio atque alio numero eſſe poſſunt, ita & aliam atque aliam Denominationem ſubeunt. Ita ſiquid unum in duas partes æquales partiri ſupponatur, illarum utraque Semiſſis dicitur; ſi in tres, appellantur Trientes; ſi in quatuor, Quadrantes; ſi in ſex, Sextantes; ſi in octo, Octantes; ſic ſi in decem partes dividatur, quælibet earum Dextans dici poteſt, ſeu pars decima; & ſic in aliis: (quamvis enim non ignorem *Dextantem* pro *Deunce* a multis poni, & quidem apud antiquos eo ſenſu occurrere; analogia tamen Grammatica ſuadere videtur ut *partem decimam* potius ſignificet quam *decem duodecimas*: ſicui ſecus videatur, poterit ille, pro *Dextante*, eodem ſenſu *partem decimam* dicere) Græci dicunt *τριτημόριον*, *τεταρτημόριον*, *πεμπτημόριον*, *ἑκτημόριον*, *δεκατημόριον*, &c. Hæc autem *denominatio*, in ſcribendis Fractionibus, exprimitur figurâ analogâ lineolæ ſubſcripta.

Fractionis Numerator. Quot autem harum partium aſſumptas eſſe ſupponitur, alia figura eidem lineolæ ſupraſcripta innuitur. Sic $\frac{2}{3}$ *duos trientes* ſignificat, $\frac{1}{10}$ *unum dextantem*, ſeu *δεκατημόριον*, $\frac{3}{4}$ *tres quadrantes*, $\frac{5}{12}$ *quincuncem*, ſeu *quinque partes duodecimas*, ſic $\frac{13}{100}$ *tredecim partes centeſimas* ſeu *ἑκατοστημόρια*, $\frac{11}{20}$ *undecim partes viceſimas*, ſeu *εἰκοστημόρια* ſignificant. Et pariter de ſimilibus dicendum eſt.

Duobus igitur numeris Fractio ſcribitur; quorum inferior *Denominator* appellatur, ſuperior *Numerator*: Quoniam ille partes *denominat*, & *ποστημόριον* ſeu *quota pars* ſit numerandarum quælibet determinat; hic vero partes illas *Numerat*, & *quot partes* ejuſmodi ſint aſſumendæ oſtendit.

Minutiæ Minutiarum. Si verò *partium particulæ* notandæ occurrant, ſeu (ut appellantur) *Minutiæ minutiarum*; puta *unius quadrantis dimidium*, vel *duorum quintantum tres quadrantes*, aliæq; ejuſmodi: illæ ſi opus eſt, ſic ſcribi conſueverunt, $\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$ & $\frac{3}{4}\,\frac{2}{5}$, nempe lineola in priori parte omiſſa; vel ſic etiam $\frac{1}{2}$ ex $\frac{1}{4}$ & $\frac{3}{4}$ ex $\frac{2}{5}$ majoris perſpicuitatis gratia: Sed & ſic ſcribi nonnunquam poſſunt $\frac{0\frac{1}{2}}{4}$ &c. Mallem ego ſic ſcribere $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{4}$, & $\frac{3}{4}$ in $\frac{2}{5}$, vel $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ & $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$; hoc eſt,

ſemiſſis

ſemiſſis in quadrantem ductum, & tres quadrantes in duos quintantes ducti; Eſt enim Quadrantis dimidium, nihil aliud quam quadrans per ſemiſſem multiplicatus; & duorum quintantum quadrantes tres, idem valent ac quintantes duo in tres quadrantes ducti: ut poſtea, cùm de multiplicatione dicendum erit, patebit.

Sciendum autem eſt, in Fractione propriè dicta, Numeratorem Denominatore ſemper minorem eſſe; quia proprie dicta Fractio, eſt quid unitate minus. *Fractio Propria.*

Si quando vero numerator Denominatore major ſit, vel illi æqualis; dicitur illa *Fractio impropria*, ſive improprie dicta. Si nempe Numerator & Denominator ſint æquales, idem valent atq. unitas; Nam $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, duo ſemiſſes, ſeu tres trientes, quatuorve quadrantes, tantundem ſunt atque unum integrum. Si vero numerator Denominatore major ſit, aliquid unitate majus innuitur; nempe vel plures unitates; vel unitas una pluresvè cum fractione annexâ: ſic $\frac{4}{2}$ quatuor ſemiſſes, idem valent ad duo integra; $\frac{4}{3}$ quatuor trientes, idem ac $1\frac{1}{3}$ unum integrum uno triente auctum; ſic $\frac{5}{2}$ eſt $2\frac{1}{2}$; $\frac{8}{3}$ eſt $2\frac{2}{3}$. Et ſic in ſimilibus. *Fractio impropria.*

Quod autem de fractionibus ſive propriis ſive impropriis, vulgaribus figuris numeralibus deſcriptis, dictum eſt; pariter intelligendum eſt ubi alia quævis ſymbola, ſeu poteſtatum characteres, figurarum vice ponuntur. Sic $\frac{A}{2}$ eſt $\frac{1}{2}$ A, ſemiſſis quantitatis A; & $\frac{A}{E}$ innuit quantitatem A per quantitatem E diviſam; & $\frac{\mathcal{R}}{2}$ eſt radicis ſemis; $\frac{\mathcal{Z}}{3}$ quadrati triens; $\frac{3}{\mathcal{R}}$ numerus ternarius per radicem diviſus; ſic $\frac{2\mathcal{Z} + 3\mathcal{R}}{2\mathcal{R}}$ vel $\frac{1\mathcal{Z} + \frac{3}{2}\mathcal{R}}{\mathcal{R}}$ vel $\frac{2\mathcal{R} + 3}{2}$ vel $1\mathcal{R} + \frac{3}{2}$ vel $1\mathcal{R} + 1\frac{1}{2}$; Ita $\frac{Aq}{E} + \frac{Bq}{E}$ eſt aggregatum ex A q & B q diviſum per E. Atq; ita in ſimilibus. Verum hæc multo melius percipientur, poſtquam Diviſionis naturam expoſuimus; Fractio enim eſt quaſi Diviſionis indicium; innuit nempe Numeratorem per Denominato-

rem dividendum eſſe. Interim hæc de Fractionum Notatione hîc loci dixiſſe ſufficiat.

Adeoque totum illud notationis negotium expedivimus; eáq; omnia quæ ſub *Numerationis* nomine Arithmetici Practici vulgo comprehendunt; quæ numeros apte ſcribendo & ſcriptos interpretando præcipuè verſatur. Monendum autem eſt *Numerationis* vocabulum aliter hic loci ab Arithmeticis Practicis uſurpari, quàm ubi ſuprà Arithmeticam diximus ſcientiam benè *Numerandi*: Illic enim *Numerare*, eſt in univerſum Proprietates & uſum numerorum interpretari & exercere; hîc aut, per numerationem, ſpeciatim intelligunt, ſimpliciora Arithmeticæ rudimenta, de Numerorum compoſitione, Notatione, aliiſq; quaſi Prolegomenis ad commodam Numerorum tractationem præreqUiſitis.

Atq; hæc quidem omnia quaſi Præmiſſarum loco ſunt habenda, ad eas quæ ſequuntur Operationes Arithmeticas, puta Additionem, Subductionem, Multiplcationem, Diviſionem, aliaſq; quæ ex hiſce componuntur operationes. Hucuſq; enim quæ tradidimus, potius ad placitum poſita ſunt, quam demonſtrata; docentq; quid tibi volunt Arithmetici per eas quas expoſuimus Appellationes & Characterum diſpoſitiones, quas ad libitum ſibi aſſumpſerunt Arithmetici quo melius ſequentes operationes perficere valeant. Et eo quidem loco ſunt habenda quo definitiones & Terminorum explicationes à quibus rerum Mathematicarum ſcriptores ordiri ſolent. Vel, ſi cum Logicis loqui libeat, Objectum ſcientiæ expoſuimus; ſequitur ut ipſius Affectiones inquiramus & demonſtremus.

CAP. XIII.

Additio, quid? Axiomata aliquot, ſive communes notiones. Additionis ſumma ſeu aggregatum. Additionis praxis, in numeris ſimplicibus. Additionis & Subductionis tabella; Ejuſq; demonſtratio. Additionis praxis in numeris compoſitis: ejuſq; demonſtratio. Operationis compendium. Additionis praxis in fractionibus decimalibus. Additionis praxis in variis Denominationibus.

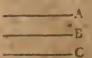
POſt abſolutam, in ſuperioribus, Numerorum *Notationem*, ad eorum Additionem accedendum eſt.

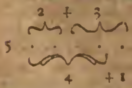
Eſt

Eſt autem *Additio, Numerorum plurium in unam Summam collectio.* *Additio quid?*
Vel Addere eſt, *Datis numeris quotlibet, unum [illegible] illis omnibus ſimul ſumptis æqualem invenire.* Aut etiam, ſi lubeat, quàm ad ſolos numeros, Additionis appellationem extendere, erit Additio, *Quantitatum plurium Homogenearum in unum Aggregatum collectio.* Nam revera eadem omnino eſt *Additionis* notio, ſive in Continua ſive in Diſcreta quantitate.

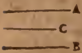
Quò melius autem in ſequentibus procedamus, ſciendum eſt, in Arithmetica, perinde ac in Geometria reliquiſq; diſciplinis omnibus, Principia quædam per ſe nota neceſſario concedenda eſſe, unde alia probentur; quæ tamen Principia talia ſunt ut ea nemo ſanæ mentis negare, aut quidem de iis (modo ſenſum verborum intelligat) dubitare poſſit. Hujuſmodi ſunt *Axiomata* illa, ſeu *Communes notiones*, quæ Elementis Euclidéis præmittuntur; Quorum pleraq; non magis Geometriæ quam Arithmeticæ conveniunt; Neq; ab Euclide proponuntur quaſi Solis Magnitudinibus congruant, ſed quæ quibuſvis quantitatibus, prout opus erit, applicari poſſint. Ego ex illis ea ſeligam quæ præſenti negotio conveniunt, ſuntq; hæc quæ ſequuntur. *Axiomata, ſive communes notationes.*

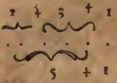
1. *Quæ eidem ſunt æqualia, ſunt & inter ſe æqualia.* Ut ſi tam linea A, quam linea C, ſit æqualis lineæ B; erunt ipſæ A C lineæ æquales inter ſe. Atq; de hoc nemo merito dubitare poteſt, ſenſu verborum ſemel intellecto: Cùm enim, vi vocis, Æqualia ea ſint quorum quantitas eſt eadem, ſeu, quorum hoc tantundem eſt atq; illud: ſitq; quantitas tam lineæ A, quam lineæ C, ea quæ eſt lineæ B; erit linearum A & C eadem quantitas, (ea nempe utriuſq; quæ eſt lineæ B,) ipſæq; igitur æquales. Similiter in numeris, ſi $2 + 3 = 5 = 4 + 1$ erit $2 + 3 = 4 + 1$, hoc eſt, ſi tam aggregatum $2 + 3$ quam aggregatum $4 + 1$ æquetur numero 5, erunt ipſa aggregata $2 + 3$ & $4 + 1$ inter ſe æqualia; eorum enim quantitas eſt eadem: ea nempe utriuſq; quæ eſt numeri quinarii. Atq; idem omnino obtinet in Superficiebus, Solidis, Angulis, Ponderibus, rebuſq; aliis omnibus quæ quovis modo vel menſurantur vel numerantur.



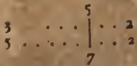


2. *Si æqualibus æqualia addantur, tota ſunt æqualia.* Ut ſi A = B erit A + C = B + C; hoc eſt, ſi æqualibus rectis A B addatur vel eadem vel æquales quantitates C, erit aggregatum A + C, æquale aggregato B + C. Sic ſi 2 + 3 = 5 erit 2 + 3 + 1 = 5 + 1. Neque de hujus propoſitionis veritate quiſpiam ſanus dubitare poterit magis quam de veritate præcedentis; cum utraque dependeat ex eadem Æqualitatis notione.





3. *Si ab æqualibus æqualia ſubducantur, reliqua ſunt æqualia.* Puta ſi A = B erit A − C = B − C: vel ſi A + C = B + C erit A = B. Sic ſi 2 + 3 = 5 erit 2 + 3 − 1 = 5 − 1, aut ſi 2 + 3 + 1 = 5 + 1, erit 2 + 3 = 5. Eſtque hujus propoſitionis veritas ſatis evidens; aut, ſiquis aſſenſum negaret, cogi poterit ex præcedente. Suntque hæc tria axiomata, præſertim in Æquationibus Analyticis, perpetui uſus. Sed & quæ ſequuntur non minus ſunt indubitata.



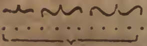
4. *Si inæqualibus æqualia addantur, tota ſunt inæqualia.*

5. *Si inæqualibus æqualia auferantur, reliqua ſunt inæqualia.* Sunt autem hæc duo duarum præcedentium conſectaria; atque exinde vel oſtendi vel ſaltem cogi poſſent.

6. *Quæ ejuſdem ſunt duplicia ſunt inter ſe æqualia.* Sequitur hoc ex ſecundo; dum 2 A nihil aliud ſunt quam A + A.

7. *Quæ ejuſdem ſunt dimidia, ſunt æqualia inter ſe.* Hoc ex præcedente ſi opus ſit, cogi poteſt. Sed & hæc duo axiomata pariter etiam valent in triplis, quadruplis, &c item in trientibus, quadrantibus &c, atq; in duplis, & dimidiis.

8. *Totum eſt majus ſua parte.* Addo.



9. *Totum æquatur partibus ſuis omnibus ſimul ſumptis.* Cum enim ſit ſuarum partium omnium aggregatum, nemo dubitare poterit quin ipſum tantundem ſit atque illæ omnes ſimul ſumptæ.

Hæc autem omnia & ſiqua ſunt ſimilia, adeo ſunt per ſe perſpicua, ut nulli dubitationi ſint obnoxia; quique hujuſmodi quid

quid negat, non ſperandum eſt ut ullis argumentis teneri velit. Reliqua Euclidis *ἀξιώματα* & *αἰτήματα* pure Geometrica ſunt, adeóq; non hujus loci. Ex his autem quæ jam tradidimus, ea quæ deinceps ſequentur, tam de Additione quàm reliquis operationibus Arithmeticis, demonſtranda erunt.

Additionis ſumma ſive aggregatum.

Additionis nota, quæ nunc dierum paſſim obtinet, eſt +. Adeóque ſi quantitates A B ſimul ſint addendæ, aggregatum eſt A + B; ſic ſi 2 & 3 ſint ſimul addendæ, aggregatum eſt 2 + 3. Hæc enim + additionis ſive affirmationis nota, indicat 3 vel B numerum ſeu quantitatem cui præfigitur, præcedenti 2 vel A additam ſeu adjunctam eſſe, vel (ſi libet) addendam vel adjungendam.

Additionis Praxis.

Verùm illud ulterius quærit practicus Arithmeticus, annon (verbi gratia) illud aggregatum 2 + 3 poſſit alia forma notari quæ tantundem valeat atq; interim magis ſit commoda, ſuumq; valorem melius intellectui repræſentet: adeoq; cum ſit 2 + 3 = 5, loco aggregati 2 + 3 ſubſtituit unicum numerum 5 qui aggregato illi æqualis eſt, & tantundem valet. Atq; in hoc totum verſatur Arithmetici practici negotium (non in Additione ſolummodo, ſed in aliis operationibus Arithmeticis, quod ſemel monuiſſe ſufficit) ut quantitates utcunq; propoſitas ſeu quæſitas commodiſſima forma deſcribere poſſit, atq; intellectui exhibere. Atq; hoc quo pacto in Additione præſtari poſſit, primùm quidem in notis Figuris numeralibus, deinde etiam in aliis Speciebus (ut loquuntur) ſive Symbolis, jam traditurus ſum.

Numeri autem addendi, ſunt vel ſimplices ſive monadici, quales ſunt 1, 2, 3, reliquiq; decade minores, qui unica figura ſcribi ſolent; vel compoſiti, quales ſunt 10, 11, 13, 20, 234, aliiq; in infinitum, qui conjunctis characteribus ſcribuntur. (illud enim per *numerum compoſitum* hic loci intelligo, quamvis illud aliàs alio ſenſu occurrere poſſit.) Vulgo, qui uno charactere ſcribuntur, *Digiti* appellari ſolent; qui circello ſeu ciphra terminantur *Articuli*; reliqui, *Compoſiti*.

In numeris ſimplicibus;

Simplicium numerorum additionem quod attinet, ea natura potius vel exercitatione, quàm præceptis, eſt diſcenda: Puta *Unum Uni* additum conſtituere *Duo*; item *Duo* & *Tria* conjuncta valere *Quinq;*: & ſic in reliquis. Atq; hæc ſunt adeo pueris nota, ut non ſit opus ea fuſius tradere. Si quis tamen

poſtulet

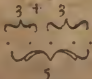
poſtulet ut (pro more) omnia demonſtrentur: aut etiam ſiquis de majorum additione dubitare poſſit: Subjecta tabella ſimplicium omnium additionem exhibebit.

Tabella Additionis & Subductionis.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Si enim numerorum addendorum alter ſumatur in ſummitate ſeriei erectæ, alter in principio ſeriei tranſverſæ, communis ſerierum concurſus oſtendet eorum aggregatum. Exempli gratia ſi ſumatur in vertice 2, ad latus 3, communis concurſus exhibet 5, qui æqualis eſt aggregato 2 + 3.

Si quis deniq; veritatem hujus tabellæ demonſtrandam poſtulet; illud hoc modo fiet. Verbi gratia. $2 + 3 = 5$ ſic demonſtratur. Ponuntur primum duo puncta, & deinde tria, quæ omnia ſi numerentur repetientur quinque. Vel ſic. Quoniam notum eſt ex ipſa numerorum procreatione (quàm Cap. V. tradidimus) quòd ſit $1 + 1 = 2$. $2 + 1 = 3$. $3 + 1 = 4$. $4 + 1 = 5$. $5 + 1 = 6$. $6 + 1 = 7$. $7 + 1 = 8$. $8 + 1 = 9$ $9 + 1 = 10$. $10 + 1 = 11$. &c. Erunt etiam (per axiomata ſuperius in hoc capite tradita) $2 + 3 = 1 + 1 + 3 = 1 + 4 = 5$. Ergo



$2 + 3$

$2+3=5$. Vel $2+3=2+2+1=2+1+1+1=3+1+1=4+1=5$. Atq; eodem modo tota tabella demonſtrari poteſt.

Si quis autem Tabellam illam abbreviandam cupiat, poterit illa quidem fieri fere duplo minor. Cum enim ſit, verbi gratiâ $4+3=3+4$, ſufficiat horum ſummam ſemel apponi, eo modo quo hic oſtenditur: ubi duorum numerorum addendorum major ſemper in fronte tabellæ, minor ad latus quæratur, aggregatum in area.

Additionis Tabella Contractior.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	2	4	5	6	7	8	9	10	11
		3	6	7	8	9	10	11	12
			4	8	9	10	11	12	13
				5	10	11	12	13	14
					6	12	13	14	15
						7	14	15	16
							8	16	17
								9	18

In numerorum compoſitorum additione major eſt difficultas, quæ tamen tota ex ſimplicium additione dependet. Hoc autem quo commodius fiat, numeri addendi ita ſcribendi ſunt ut unus alteri directè ſubſit, ita nempe ut Monades unius Monadibus alterius ſubſint, & decades decadibus, reliquiq; loci inferioris iiſdem reſpective ſuperioris locis ſubſcribantur: quod faciendum eſt ſive duo ſive plures quotvis numeri addendi ſint: atq; deinde, ducta ſubtus lineola, aggregatum monadum monadibus ſubſcribendum, decadum decadibus, centuriarum centuriis, atq; ſic deinceps. Exſempli gratia. Addantur $25634+63152$. Numeris igitur rite ſcriptis, & lineolâ *In Numeris compoſitis,*

M

25634	103605
63152	430120
88786	315032
	848757

là ductâ; in columnâ ſeu columellâ monadum, pro 4 + 2 ſubſcribo 6: in columellâ decadum pro 3 + 5 ſubſcribo 8: quia ſcilicet (per tabellam præcedentem) $4 + 2 = 6$. $3 + 5 = 8$. atq; eodem modo in reliquis columellis reperio $6 + 1 = 7$. $5 + 3 = 8$, $2 + 6 = 8$. adeoq; cum ſubſcripta ſummula cujuſq; ſeriei, ejuſdem ſeriei particulis æquetur; (puta 6 monades = 4+2 monadibus, 8 decades = 3 + 5 decadibus, 7 centuriæ = 6 + 1 centuriis &c.) erunt omnium ſummulæ ſimul ſumptæ (debita locorum ratione habita) 88786, omnium particulis ſimul ſumptis æquales. Atq; eodem modo $103605 + 430120 + 315032 = 848757$.

Non raro autem accidit, particularium ſerierum ſummulas tantas eſſe, ut unica figura ſuæ ſeriei ſubſcribi non poſſint, (quoties nempe ſummula numerum novenarium excedit) quo caſu, ultima ſummulæ figuræ ſuo loco ſubſcribenda erit, reliqua autem loco proximè ſuperiori, (aut, ſi plures ſint, proximis quot opus eſt locis,) adeoq; ſingulæ (ſi libet) ſummulæ diſtinctis lineis ſcribi poſſunt; ut in exſemplis ſubjectis primo & ſecundo; vel etiam contractius, ut in tertio & quarto; illud autem ſemper cavendum, nequa figura debito loco extrudatur, ſed duæ potius eidem ſeriei ſubſcribendæ ſunt: illæ autem ſummulæ, in unam deinde ſummam (eodem artificio) collectæ, numerorum addendorum ſummam integram, ſive aggregatam exhibent. Non autem omnino refert ſive a dextra ſive a ſiniſtra operatio ordiatur: Neq; etiam refert quis addendorum numerus ſupremus ſit, quis ſecundus, &c. (modo illud ſemper caveatur ut monades monadibus, decades decadibus, &c. directè ſubſint, ut vitetur confuſio locorum,) Additio enim non addendorum ordinem inquirit, ſed aggregatum. Patet hoc ex ſubjectis exſemplis, ubi eadem ſumma, diverſo tamen ordine, emerget.

98697	87998	95588	67590
87998	98697	98697	87998
95588	67590	87998	98697
67590	95588	67590	95588
23	32 milliũ decad.	327553.	22323
35	27 millia.	2232	32755
25	25 centuriæ.		
27	35 decades.	349873	349873
32	23 monades.		
349873	349873		

In his omnibus exſemplis, ſummula monadum (ſive infimæ ſeriei) eſt 23; ſubſcripta igitur ſuo loco figurâ 3 (pro tribus unitatibus) reliqua figura 2 loco proxime aſſcendente ſcribenda, quam ſive 20 unitates ſive 2 decades ſignificare dicamus, perinde eſt. Sic ſummula decadum eſt 35; ſubſcripta igitur 5 in decadum ſerie, reliqua 3 ſcribenda eſt in ſerie proximè aſſcendente, ut 30 decades, ſeu (quod idem eſt) 3 centurias ſignificet. Et pariter in reliquis. Omnes autem ſummulæ collectæ, exhibent 349873 ſummam integram.

Totius proceſſus demonſtratio dependit ex illo axiomate (ſæpius applicato) *ſi æqualia æqualibus addantur tota ſunt æqualia.* Puta ſi pro tota monadum ſerie ſubſtituantur monades $23 = 7 + 8 + 8 + 0$, tantundem exhibetur; deinde ſi pro decadum ſerie ſubſtituantur decades $35 = 9 + 9 + 8 + 9$, tantundem adhuc exhibetur; item ſi in reliquis ſeriebus ſubſtituantur $25 = 6 + 9 + 5 + 5$, & $27 = 8 + 7 + 5 + 7$, & $32 = 9 + 8 + 9 + 6$, tantundem adhuc exhibetur; adeoq; ſummulæ inventæ æquantur numeris propoſitis: & (eadem ratione) ſummularum ſumma æquabitur ipſis propoſitis numeris. *Additionis demonſtratio.*

Hic autem proceſſus (quẽ perſpicuitatis gratia diſtinctè proponendũ duximus ut operationis ratio perſpiciatur) poteſt aliquantulum (præſertim exercitatis) abbreviari, ſi nempe (a gradibus infimis ſemper incipiendo) cum gradus unius ſummula inventa eſt, ultima ipſius figura ſtatim ſuo loco ſubſcribatur, & reliqua (ſi qua ſit) memoriæ reſervetur (aut ſi libet, du- *Operationis compendium.*

 duabus

duabus lineolis, ne memoria excidat, interpoſita) ſequenti ſtatim ſeriei annumeretur. Hoc pacto.

986 97	98697
955 88	95388
879 98	87998
675 90	67590
349873	22 32
	349873

Quoniam, in ſerie monadum, eſt $7+8=15$. $15+8=23$ $23+0=23$. ſubſcriptâ figurâ 3, reliqua 2 (memoriâ reſervata, vel lineolis interſcripta) ſtatim ſequenti ſeriei adjungitur hoc modo: $2+9=11$. $11+8=19$. $19+9=28$. $28+9=37$; ſubſcripta figura 7, reliqua 3 transferatur in ſequentem ſeriem ſic, $3+6=9$. $9+5=14$. $14+9=23$ $23+5=28$. ſubſcripta 8, transferatur 2; adeoq; $2+8=10$. $10+5=15$. $15+7=22$. $22+7=29$ ſubſcripta 9, transferatur 2, 3 eritq; $2+9=11$. $11+9=20$. $20+8=28$. $28+6=34$: Subſcribatur 4, & in ſequente ſerie (quia nihil ulterius addendum reſtat) 3. eritque ſumma totalis ut prius, 349873.

Cur autem figuras ſequenti ſeriei annumerandas, non memoria tantum reſervari, ſed & duabus lineolis interſcribi poſſe dixerim; ratio eſt, quia non raro expedit in grandioribus numeris, præſertim tyronibus & parum exercitatis, illud ſic fieri; eo ſcilicet fine, ut, ſiquando operatio de errore ſuſpecta ſit, cujuſvis ſeriei ſummula commode poſſit ſeorſim examinari, errorque ſiquis ſit, facilius detegi; quod quidem non adeo commode peragi poterit, ſi, peracta operatione, nullum veſtigium remaneat numeri ab aliâ ſerie illuc tranſlati, ſed plurium ſerierum operatio iteranda erit ut unius error detegatur.

Additio Fractionum Decimalium. Si quando numeri addendi fractiones decimales (ut loquuntur) annexas habeant, ſeu (quod idem eſt) gradus aliquot infra unitatē deſcendentes, operatio eodem omnino modo peragenda eſt, quo in numeris integris ſive abſolutis, & iiſdem principiis demonſtranda: Illud autem caute proſpiciendum eſt, ne gradus confundantur: Adeoq; non ſemper ultima figura unius numeri ultimæ alterius eſt ſubſcribenda, ſed graduum ratio ſic habenda eſt, ut monades monadibus, decades decadibus, &c. in eadem ſerie ſubſcribantur; adeoq; linea ſeparatrix (ſive illud quod ſeparatricis munus obit) in omnibus numeris apte conveniat ut in exſemplo adjuncto videre eſt: nempe

17

17.25
3.5
0.005
16.
36.755

17.25 + 3.5 + 0.005 + 16 = 36.755. Neq; ulla hic nova difficultas occurrit.

Si quantitates addendæ ex pluribus conſtent Denominationibus (ut loquuntur) prout in addendis Monetis, Ponderibus, Menſuris, Motibus, &c contingere ſolet: curandum, ut quoties inferioris alicujus Denominationis ſummula eouſq; excreſcit ut unitatem proxime ſuperioris denominationis vel æquet vel excedat, (aut etiam duas aut plures unitates,) ſubſcribendus eſt ſuo loco exceſſus (ſiquis ſit, vel ſi nullus ſit, ciphra) & reliquum ſuperiori ſeriei adjungendum eſt. Illud igitur curandum eſt, ut ſciatur quot unitates Denominationis inferioris unitatem ſuperioris Denominationis adæquent. *Additio plurium Denominationum.*

lib.	ſ.	d.
07.	19.	04.
16.	08.	06.
08.	13.	07.
2	1	
33.	01.	05.

Exſempli gratia. In addendis monetis Anglicanis; 12 Denarii conſtituunt unum Solidum; & 20 Solidi unam Libram Anglicam (*Sterling* vocant) Ideoq; in exſemplo appoſito cum numerus denariorum ſit 17 = 12 + 5, in Denariorum loco ſubſcribo 5; &, pro reliquis 12, adjungo 1 ſolidum proximæ ſeriei: Deinde, cum ſumma ſolidorum (ſimul cum 1 transmiſſo) ſit 41 = 40 + 1; ſub ſerie ſolidorum appono 1, &, pro reliquis 40 adjungo 2 libras proximæ ſeriei: Deniq; librarum ſummulam (cum 2 tranſmiſſis) reperio 33. Adeoq, omnium addendorum ſumma reperitur 33 libræ, 1 ſolidus, & 5 denarii.

ſig	grad.	′	″
1.	3.	16.	30
0.	12.	23.	15
2.	5.	47.	45
4.	23.	51.	00
1	2	1	
8.	15.	18.	30

Eodem modo in Fractionibus Aſtronomicis (ut vocantur) addendis procedendum eſt: Ubi diviſo (verbi gratiâ) Zodiaco in 12 ſigna, & quolibet ſigno in 30 gradus, quolibet gradu in 60 minuta prima, & quolibet horum in 60 ſecunda, & ſic deinceps; Pro 60 ſecundis, ſubſtituendum 1 minutum primum; pro 60 primis, 1 gradum; pro 30 gradibus, 1 ſignum. Ut in appoſito exſemplo videre eſt.

Atq; eodem prorſus modo in aliis ejuſmodi Additionibus procedendum erit, ubi denominationum pluralitas occurrit, Nec quicquam intereſt diſcriminis, niſi quod nunc plures nunc

pauciores unitates in gradu inferiori, adæquent Unitatem gradus proxime ſuperioris. Adeo ut non ſit opus exſempla plura ſubjicere.

Additionis praxis in ſpeciebus (ut loquuntur) ſive ſymbolis, & in poteſtatibus Algebricis, inferius, poſt explicatam Numerorum ſubductionem, tradetur.

CAP. XIV.

Subductio Additioni contraria. Subductio quid? Subductionis praxis in Numeris ſimplicibus: In numeris Compoſitis. Praxeos demonſtratio. Praxis in partibus decimalibus: in variis Denominationibus. Subductio majoris ex minore, impoſſibilis. Quantitates negativæ ſeu Ablatitiæ; non abſurde ſupponuntur; quid innuant. Subductio majoris ex minore, quatenus ſupponitur præſtanda.

Subductio Additioni contraria.

POſt Additionis traditionem, ad ſubductionem deveniendum eſt; quæ Additioni contraria eſt: Ut enim Additio Numerum numero, vel ſaltem Quantitatem quantitati, adjungit; ſubductio è contrà Numerum numero, vel Quantitatem quantitati, aufert: Adeoq; quod Additio componit id ſubductio diſſolvit: In praxi Additionis, datis partibus inveſtigatur Totum; in praxi ſubductionis, Dato Toto cum parte una, quæritur Reſiduum ſeu pars reliqua.

Subductio quid?

Eſt igitur *Subducere, Numerum a numero, vel potius Quantitatem a quantitate, auferendo, Reſiduum exhibere.* Subductionis autem ſive Ablationis nota, hæc eſſe ſolet $-$. Adeoq; ſi ex 5 auferamus 3, reſtabit $5-3$. Si ex quantitate A auferatur quantitas B, manebit $A-B$. Illud autem Arithmetici practici, in praxi ſubductionis, munus eſt, ut Reſiduum quam fieri poteſt commode notis exprimat, ejuſq; valorem intellectui exhibeat. Quod quo pacto fieri poteſt nunc tradituri ſumus

In numerorum ſubductione, numeri duo dantur, quorum alter ab altero auferendus eſt, & tertius quæritur Numerum illud a quo alter eſt auferendus, *Numerum Minuendum* appello; auferendum

auferendum vero *Minutorem*; tertium autem quem quærimus, *Reſiduum* voco. Sic ſi ex numero quinario auferendus ſit ternarius 3; Numerus Minuendus eſt 5, Minutor 3, qui reſtat autem $5 - 3 = 2$ Reſiduus eſt. Vel univerſim (quoniam alias etiam quantitates ſubducendas eſſe non raro accidit) dici poſſunt quantitas *Minuenda*, quantitas *Minuens*, & quantitas *Reſidua*, vel *Totum*, *Ablatum*, *Reſiduum*.

Numerorum ſimplicium ſubductionem nemo ſupponitur ignorare, ſed vel natura vel uſu quotidiano didiciſſe; ut ſi ex 5 auferantur 3, reſtare 2. Aut ſaltem, ſi illud docere ſit neceſſe; poſitis tot punctis quot eſt numerus minuendus, puta 5, ſi tot deleantur, quot eſt numerus minuens ſeu auferendus, puta 3, reſtare deprehendemus 2. Vel denique ex tabellâ quam ſupra poſuimus, illud depromi poteſt. Si nempe numerus minuens vel aufe-

Subductionis praxis in numeris ſimplicibus.

. . . . .

Tabella Additionis & Subductionis.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

rendus in ſummitate ſumatur, puta 3, atq; inferius in eadem columnâ quæratur numerus minuendus, puta 5, habebitur ad ſiniſtram numerus reſiduus 2. Atq; eodem modo in aliis ſimplicium ſubductionibus peragendum erit. Demonſtratio ſatis patet ex iis quæ de Additione ſupra diximus.

Subductionis praxis in numeris compoſitis. Ubi autem numerorum compoſitorum unus ab altero eſt auferendus (vel quidem ſimplex a compoſito qui numerum 18 excedit) Minutorem ſolemus Minuendo ita ſubſcribere, ut ſinguli inferioris numeri gradus iiſdem ſuperioris gradibus directe ſubſint, (puta Unitates unitatibus, Decades decadibus, Centuriæ centuriis &c.) Deinde a dextra inchoando, ſingulis figuris ſeu notis numeri ſubducendi, ab ejuſdem gradûs notâ in numero minuendo, ſigillatim ſubductis, particulares numeros reſiduos ſuis locis ſubſcribimus, quorum omnium aggregatum eſt totius ſubductionis peracta Reſiduum. Sic ſi ex 1755898, ſubducendus ſi numerus 650467; numeris his ita ſcriptis & minutoris loci primus, ſecundus, tertius, &c (a dextra ſive gradu infimo inchoando) iiſdem numeri Minuendi locis ſubſint: primò, ex 8 unitatibus, ſubductis unitatibus 7, manet unitas 1, (nam $8-7=1$) ſubſcribenda igitur (infra lineolam ductam) nota 1 deinde ex decadibus 9, ſubductis 6, manent decades 3, (nam $9-6=3$) ſubſcribenda igitur decadum loco nota 3: &, eâdem ratione, centuriarum loco, ſubſcribenda 4, quia $8-4=4$: & ſic deinceps $5-0=5$: $5-5=0$: $7-6=1$: deniq; cum ex 1 in loco ſupremo nulla nota ſubducenda reſtat, ſubſcribenda 1; nempe $1-0=1$. Adeoq; totus Reſiduus eſt $1105431=1755898-650467$.

1755898	*Minuendus*
650 467	*Minutor*
1105431	*Reſiduus*

Vel etiam Reſiduus ſuperne notari poteſt, deletis ſucceſſive notis tam Minuendi quam Minutoris. Sic quia $8-7=1$, deletis 8 & 7 repono 1: item quia $9-6=3$, deletis 9 & 6 repono 3: ſic pro $8-4$, repono 4: & quia $5-0=5$, figuram 5 intactam relinquo: pro $5-5$, repono 0; pro $7-6$, repono 1, deniq; 1 (quia nihil inſuper inde ſubducendum eſt) intactam relinquo; Reſiduus eſt idem qui prius, 1105431. Ut in exemplo appoſito videre eſt.

1 0 5 4 3 1
1 7 5 5 8 9 8
6 5 0 4 6 7

Quoties autem contingit notam aliquam numeri ſubducendi nota ſibi ſupra poſita majorem eſſe; augenda eſt nota ſuprapoſita mutuata 1 ex loco proxime ſuperiori, quæ in loco præſenti valebit 10, adeoq; ſat grandem numerum efficiet ut inde nota ſubſcripta auferri poſſit: adeóq; nota minutoris in loco

```
730582
 51368
------
11   1
------
679214
```

loco ſequente ſupponenda eſt unitate minor jam facta quam prius erat; vel (quod tantundem valet) nota inde auferenda ſupponenda erit unitate aucta: Unitas autem illa mutuata (ſi libet) poteſt duabus lineolis (memoriæ gratia) interponi. Sic ſi ex 730582 auferendus ſit numerus 51368; numeris rite ſcriptis, ex unitatibus 2 auferendæ occurrunt 8, quod cum fieri non poſſit, mutuatâ ex ſequentibus 1 decade (quæ valet 10 unitates,) fiunt unitates 12, unde ſubductis 8, reſtant 4.

Deinde in loco ſequente, ex decadibus 8, ſubductis $7 = 1 + 6$ (nam una jam inde deſumpta in unitates reſoluta priori loco annumerata eſt, & 6 inſuper jam occurruunt ſubducendæ) reſtat 1: tum e millibus 5, ſubductis 3, reſtant 2: deinde in gradu ſequente, ſubducto 1, ex $10 = 10 + 0$ (mutuatis nempe 10, ut fieri poſſit ſubductio) reſtant 9: item ſubductis $6 = 1 + 5$ (propter 1 jam ſubductum, & 5 jam ſubducenda) ex $13 = 10 + 3$ (mutuatis nempe 10 ut fieri poſſit ſubductio) reſtant 7: & denique $7 - 1$ (propter 1 inde jam mutuatum) $= 6$. Adeoq; totus numerus reſiduus eſt $679214 = 730582 - 51368$.

Atque jam ratio patet, cur, in ſubductionis praxi, a dextra ſive gradu infimo inchoandum eſſe dixi: Ut nempe numerorum ex gradu ſuperiori ad inferiorem transferendorum (ut fieri poſſit ſubductio) ratio habeatur, quod non adeò commode fieri poteſt ſi a ſiniſtra praxin ordiamur.

Si tamen libeat a ſiniſtra inchoare, poteſt etiam illud fieri, duplici ſaltem modo. Poſſumus enim Reſiduum vel Superius ſcribere vel Inferius, deletis ſucceſſivè notis numeri Minuendi (atq; etiam, ſi libet, Minutoris) eorum loco Reſidui notis ſubſtitutis, quæ & ipſæ aliquoties etiam delendæ ſive emendandæ erunt. Ita ſi ex 735806 auferendus ſit numerus 650467: Scriptis ut prius numeris; a ſiniſtra ordiendo, ex 7 ſubductis 6 reſtat 1, (hoc eſt revera propter locorum rationem ex 700000 ſubductis 600000 reſtat 100000; ſeu ex 7 millium centuriis ſubductis 6 millium centuriis reſtat 1 millium centuria;) deletis igitur 7 & 6, eorum loco

```
  3 3
1 8 4 4 9 .  Reſiduus.
7 3 5 8 0 6  Minuendus.
6 5 0 4 6 7  Minutor.
```

ſuperne ſcribatur 1 (= 7 — 6 : deinde ſubductis 5 ex 13 (quoniam ex 3 ſubduci non poſſunt) reſtant 8 = 13 — 5 ; deletis igitur 13 & 5, ſcribatur ſuperne 8 : tum quia 5 — 0 = 5, figuram 5 intactam relinquo (vel, ſi placeat, ipſa deleta aliam figuram 5 ſuperne collocare licebit) tum, quia 8 — 4 = 4, deletis 8 & 4 ſuperne pono 4 : deinde ſubductis 6 ex 40 (quoniã ex 0 fieri non poteſt) reſtant 34, deletis itaq; 6 & 40, ſuperne ſcribo 34 : deniq; 46 — 7 = 39, deletis igitur 7 & 46 repono ſuperne 39. Adeoq; numerus Reſiduus ſupernè repertus eſt 85339 = 735806 — 650467.

Vel etiam reſiduus inferne notari poteſt, hoc modo.

7 3 5 8 0 6	*Minuendus.*
6 5 0 4 6 7	*Minutor.*
1 8 5 4 4 9	*Reſiduus*
0 3 3	

Praxeos demonſtratio. Totius proceſſus demonſtratio (ſive a ſiniſtra dextra ordiamur) ſive dexra noto illo axiomate, *Totum æquatur partibus omnibus ſimul ſumptis*; adeoq; ſubductio omnium *particularum* æquivalet ſubductioni *totius* ſubducendi.

Subductio Partium Decimalium. Si fractiones decimales ſint integris numeris adjuncti, operatio nihilominus eodem procedit modo: id tamen ſemper cavendum eſt, ut quilibet gradus numeri inferioris pari gradu numeri ſuperioris ſubſit. Exſemplum hoc eſto.

7 0 3 . 8 6 5
2 . 7 1 3 6
7 0 1 . 1 5 1 4

Subductionis praxis in variis Denominationibus Si ſubductio inſtituenda ſit in quantitatibus plurium (ut loquuntur) Denominationum: eadem tamen eſt proceſſus ratio quæ prius. Illud tantum curandum erit, ut quoties ex claſſe ſeu ſerie ſuperiori (majoris ſcilicet denominationis) mutuanda eſt Unitas pro illâ in ſerie inferiori (ſive denominationis proxime minoris) tot numerentur unitates quot ſerierum ad invicem ratio poſtulat. Sic in ſubductione Monetæ Anglicanæ, pro 1 libra ſubſtituendi erunt 20 ſolidi, pro 1 ſolido 12 denarii. In Fractionibus Aſtronomicis pro 1 ſigno, reponendi erunt 30 gradus, pro 1 gradu, 60 minuta prima ; pro 1 minuto

lib.	*ſ.*	*d.*	*ſig.*	*gr.*	*'*	*''*
4 .	3 .	5 .	8 .	15 .	3 .	10 .
2 .	17 .	6 .	3 .	5 .	18 .	11 .
1	1			1	1	
1 .	5 .	11 .	5 .	9 .	44 .	59 .

nuto primo, 60 ſecunda &c. ut in exſemplis adjunctis videre eſt.

Denique ſi quando plures fuerint numeri ſubducendi, vel ex uno aliquo propoſito vel ex pluribus ſimul ſumptis; priuſquam ſubductio inſtituatur, tam numeri ſubducendi colligendi ſunt in unâ ſummam ſeu aggregatum, quam numeri illi ex quibus ſunt ſubducendi & tum demum, ex aggregato hoc, ſubducendum erit aggregatum illud, ut Reſiduum habeatur. (Atq; idem omnino faciendum erit non modo in Numerorum ſed & in aliarum quarumlibet quantitatum ſubductione.) Ut in exſemplo appoſito videre licet. *Subductionis praxis ubi varii numeri ſunt ſubducendi.*

5369		
9572	23301	*Minuendus.*
8360		
3961		
5603	10775	*Minutor.*
1211		
	12526	*Reſiduum.*

Vel etiam ubi plures numeri, vel ex uno, vel ex plurium aggregato ſunt ſubducendi; poſſunt plures ſubductiones ſucceſſive fieri hoc modo.

$$\begin{array}{r} 23301 \\ -3961 \\ \hline 19340 \\ -5603 \\ \hline 13737 \\ -1211 \\ \hline 12526 \end{array}$$

In omni autem Subductione actualiter præſtanda, notandũ eſt, Quantitatem ſubducendam minorem eſſe debere (ſaltẽ non majorẽ) quantitate illa ex quâ eſt ſubducenda: Impoſſibile enim eſt ut quantitas major ex minore deſumi poſſit, (cum pars ſuo toto major eſſe nequeat:) Adeoq; ſiquando illud præſtandum proponatur, Propoſitum eſt impoſſibile. Verbi gratia, Impoſſibile eſt ut ex 5 ſubducantur 8, cùm numerus hic ſit illo major. *Subductio Majoris ex Minore, impoſſibilis.*

Nihilominùs, quanquam hoc ſit reapſe impoſſibile; non raro tamen apud Arithmeticos, præſertim Algebriſtas, tanquam eſſet poſſibile præſtari jubetur: Supponunt enim (præter reales quantitates) quantitates quaſdam imaginarias, quæ minores ſint quã nihil, quas quantitates Negativas, ſive Ablatitias appellant: Et prout (diſtinctionis gratia, ubi opus eſt,) quantitatibus veris (quas poſitivas vel affirmativas appellant) notam hanc + Additionis ſeu Affirmationis vel Poſitionis indicium præfigunt; ita quantitatibus imaginariis, negativis, ſive ablatitiis, præfigunt notam hanc —, Subductionis vel Ablationis *Quantitates Negativæ;*

ſive Negationis indicium. Adeoq; ſi ex 5 auferenda ſint 8, manere dicunt -3, hoc eſt, quantitatem quæ ſit, numero ternario, minor quam nihil.

Non abſurde ſupponuntur. Hujuſmodi autem (quæ ſupponuntur) quantitates Negativæ, quanquam videri poſſint non ſine abſurdo ſupponi, ſuos tamen habent uſus eximios, neq; ſine magno commodo ab Arithmeticis (Geometris item, aliiſq; Mathematicis) introducuntur: ut ſuo loco aliquando patebit. Hic autem ſufficiet oſtendere eam ſuppoſitionem nihil abſurdi ſupponere. Dum enim dicunt $5 - 8 = -3$: idem eſt ac ſi dicerent, *Qui ſupponit 8 ex 5 demi, ſupponit ille aliquid ternario numero minus quam nihil*; (qui enim ſupponit 8, hoc eſt $5+3$, ex 5 ſubduci, ſupponit ille totum quinarium ſublatum eſſe atq; inſuper 3 plus quam totum, adeoq; reſtare tanto minus quam nihil.) Atq; hoc quidem non magis incommode dicitur, quam hoc, *Qui ſupponit Hircocervum, ſupponit ille animal quoddam ex Hirco & Cervo conflatum*; quæ propoſitio vere enunciari poteſt quanquam neq; *Hircocervus*, neq; *Animal ita conflatum* exiſtat, aut quidem exiſtere poſſit: Poteſt enim Propoſitio vera eſſe, quamvis neq; Prædicatum neq; ſubjectum actu exiſtat, aut quidem ſit poſſibile. Ita quamvis neq; ſit poſſibilis quantitas -3, neq; $5 - 8$, tamen verum eſt has quantitates (ſuppoſititias licet) æquales eſſe, atq; qui alteram ſupponit reliquam etiam ſupponere. Et quidem qui dicit $5 - 8 = -3$, non modo dicit ſubductionem illam $5 - 8$ impoſſibilem eſſe, ſed oſtendit menſuram impoſſibilitatis; nempe, numerum 8 tantò majorem eſſe quam ut poſſit ex numero 5 ſubduci quantus eſt numerus 3.

Subductio Majoris ex minore, quatenus præſtanda ſupponitur. Quando autem hujuſmodi ſubductio requiritur, (nempe ut major ex minore auferatur,) illa utcunq; ſic præſtanda eſt; operatione ſcilicet præſcriptæ contraria. Numerus qui ut Minuendus proponitur ſubducendus eſt ex eo qui proponitur ut Minutor, & Reliquo præponenda eſt nota negationis. Ut ubi requiritur ſubductio numeri 8 ex numero 5; ſubductis contra 5 ex 8, reſiduo 3 præponenda eſt nota $-$: Adeoq; ut $+8 - 5 = +3$; ſic $+5 - 8 = -3$. Atq; eadem ratione, erit $546 - 987 = -441$: Nam ſubuctis 6 ex 7 reſtat 1; ſubductis 4 ex 8 reſtant 4; ſubductis 5 ex 9 reſtant 4; & (quia operatio peracta eſt imperatæ contraria) præfigenda eſt nota $-$.

$$\begin{array}{r} +546 \\ -987 \\ \hline -441 \end{array}$$

Atq; hæc de Subductionis Numeroſæ praxi dicta ſufficiant. De praxi tam Additionis, quam Subductionis Specioſæ ſive Symbolicæ, proxime docendum eſt.

CAP. XV.

Additio & Subductio Algebrica & Specioſa. Utriuſq; Regulæ & Praxis.

IN additione & ſubductione Algebrica, vel Specioſa, (de quibus jam dicendum eſt,) ſive veterum notis Coſſicis ſive Recentiorum Speciebus ſeu Symbolis perficiantur, (de quibus Cap. XI. diximus,) duo potiſſimum conſideranda occurrunt; nempe, præter ipſas Species ſeu quantitatum Notas, *Signorum* etiam (uti vocari ſolent) habenda eſt ratio: *Additio & ſubductio algebrica ſeu ſpecioſa.*

Sunt autem Signa ea (quæ nempe Additioni & Subductioni inſerviunt) hæc duo, + & —. Quorum illud quidem + *Affirmativum* eſt, ſive *Poſitivum*, & notat quantitatem cui præfigitur affirmari ſive adeſſe; (quod quidem ubiq; intelligendum eſt ubi nullum ſignum præfigitur:) Hoc autem — Negativum ſeu Ablativum, denotans eam cui præfigitur quantitatem negari, ſive deeſſe; & ſymbola vel ſpecies ſic inſignita non tam quantitatem, quam quantitatis abſentiam ſeu defectum indicant. *Signa + & — quid indicant.*

Et propterea Species quæcunq; ſeu Symbolum quodvis, cui ſignum — negativum præfigitur, ſemper interpretandum eſt ſenſu contrario iſti de qua quæritur quantitati, ejuſmodi ſymbolo vel abſoluto, vel (quod tantundem valet) ſigno affirmativo inſignitæ. Verbi gratia, Si de Lucro quæratur, quod nota B vel + B denotetur, erit — B (ſenſu contrario interpretandum) tantundem Damni. Sic, ſi C vel + C indicet exceſſum; — C indicabit defectum. Item, ſi *a* vel + *a* ſit augmentum, erit — *a* decrementum. Si 2 vel + 2 ſolem tot gradibus ſupra Horizontem elevatum indicet; — 2 eundem denotabit totidem ſub Horizonte gradibus depreſſum. Et contra. Et quidem univerſaliter quicquid ſit illud quantitatis quod ſigno Affirmativo

deſignatur, ejuſdem contrarium ſigno Negativo deſignari intelligendum eſt. Puta

Si ſignum Affirmativum indicet, *Affirmationem, poſitionem, augmentum, lucrum, acceſſum, aſcenſum, ſupra, ultra, plus, gravius, calidius, adjici, elevari, &c*

Signum negativum indicabit, *Negationem, ablationem, decrementum, damnum, receſſum, deſcenſum, infra, citra, minus, levius, frigidius, auferri, deprimi, &c.*

Et contra, ubi hæc ſigno affirmativo, illa ſigno negativo intelligenda erunt.

His intellectis, de ipſa Additionis & Subductionis praxi agendum; ubi hæ obſervandæ ſunt regulæ.

De Speciebus, regula. Si vel in Additione vel in Subductione plures occurrant ſpecies ſeu ſymbola, quantitates illæ quæ iiſdem Symbolis deſignantur ſunt invicem vel addendæ vel ſubducendæ (prout res poſtulaverit,) ut earum vel ſumma vel differentia intelligatur, ſeorſim notanda: quæ vero diſtinctis ſymbolis ſive ſpeciebus deſignantur, non ita invicem comparandæ ſed ſigillatim conſiderandæ & notandæ. Cauſa eſt, quia dum diſtinctis ſymbolis denotantur, quorum ad invicem ratio vel ignoratur, vel ſaltem nondum conſideratur, non poſſunt ſine confuſione conjungi. Puta ſi 2 ſolidi & 1 denarius, addendi ſint, non dicendum eſt ſummam eſſe 3; ſed 2 ſolidi & 1 denarius.

Ubi autem ſymbolorum utut diſtinctorum ratio ad invicem innoteſcit & actu conſideratur, poſſumus, interpretando, etiam diverſa ſymbola in unum colligere; nempe pro quantitate eorum altero deſignanda ipſi æqualem ſubſtituendo quæ ſymbolo altero indicetur mutatis interim mutandis prout ſymbolorum ratio adinvicem poſtulat. Ut, ſi $1\frac{1}{2}$ ſolidis, addendi ſint 6 denarii, dicimus fieri 2 ſolidi; quia nempe, ubi innoteſcit unum ſolidum tantundem valere atq; 12 denarios, & proinde $\frac{1}{2}$ ſol. $=$ 6 den. poſſumus pro 6 denariis ſubſtituere, ſemiſſem ſolidi; & deinde $1\frac{1}{2}$ ſol. + 6 den. hoc eſt, $1\frac{1}{2}$ ſol. + $\frac{1}{2}$ ſol. erunt 2 ſolidi. Et ſimiliter in aliis. Atque hoc quidem indifferenter ſive in Additione ſive in Subductione intelligendum eſt.

De ſignis + & −, Regulæ. De ſignis autem + & −, aliæ Additioni aliæ Subductioni inſerviunt regulæ. Quarum quæ Additioni inſerviunt hæ ſunt.

In Additione 1 *In Quantitatibus addendis, ſi ſigna ſint ſimilia, ſubſcribenda eſt*

quantitatum

quantitatum ſumma cum communi ſigno. Puta pro + 2 + 3 ponendum +5; quia utraq; quantitas ponenda intelligitur. Item, pro − 2 − 3 ponendum − 5; quia utraq; auferri intelligitur.

2. *Si ſint autem ſigna* Diſſimilia, *ſubſcribenda, eſt quantitatum* Differentiæ, *cum ſigno majoris quantitatis.* Puta pro + 3 − 2 ponendum + 1; quia nempe ubi intelligitur, apponi tria, & deinde illorum duo auferri, unicum eorum adjectum manet: item pro − 3 + 2 ponendum − 1; quia nempe uno plus auferetur quam quod reſtituitur. Et ſimiliter in alis.

Oughtredus utramq; regulam ſic breviter conjungit, *Additio ſpecioſa conjungit omnes magnitudines datas, ſervatis ſignis.*

His intellectis, praxis, non erit difficilis. Exſemplum eſto,

Addenda { + 3 𝒞 + 1 ℨ − 2 ℞ + 3 / − 1 𝒞 + 2 ℨ − 3 ℞ − 4 } vel + 3 C + 1 Q − 2 R + 3 / − 1 C + 2 Q − 3 R − 4

Aggregatum + 2 𝒞 + 3 ℨ − 5 ℞ − 1 | + 2 C + 3 Q − 5 R − 1

vel 3 Ac + 1 Aq − 2 A + 3 / − Ac + 2 Aq − 3 A − 4 / 2 Ac + 3 Aq − 5 A − 1

vel 3 aaa + aa − 2 a + 3 / − aaa + 2 aa − 3 a − 4 / 2 aaa + 3 aa − 5 a − 1

vel $3a^3 + a^2 - 2a + 3$ / $-a^3 + 2a^2 - 3a - 4$ / $2a^3 + 3a^2 - 5a - 1$

Nempe ſi addantur 3 𝒞, & − 1 𝒞 hoc eſt, ſi intelligantur apponi 3 Cubi, & (propter ſignũ − contrario ſenſu exponendũ) auferri 1 Cubus, tantundem eſt atq; ſi apponantur 2 Cubi, (quia 3 − 1 = 2.) ita ſi addantur + 1 ℨ & + 2 ℨ, cum utrumq; affirmetur, aggregatum eſt + 3 ℨ. Item − 2 ℞ & − 3 ℞, cum utrumq; negetur, erit − 5 ℞, (qui enim tollit 2 ℞, & tollit inſuper 3 ℞, tollit omnino 5 ℞ quia 2 + 3 = 5.) deniq; + 3 & − 4, ſunt 1; nempe uno plus tollitur quam apponitur. Et propterea aggregatum duorum additorum (ex ſingulis ſummulis collectum) eſt + 2 𝒞 + 3 ℨ − 5 ℞ − 1.

Sic in exſemplis ſequentibus, ſi addantur A + B − C, & − 2 B + 2 C − D & A − C + E, (quæcunq; demum ſint quantitates ſymbolis illis A, B, C, &c. deſignatæ) agregatum omnium erit 2 A − B − D + E. Et pariter in reliquis.

A +

$$\begin{array}{llll} A+B-C & & & 5b^4-2b^3-b^2+4b \\ -2B+2C-D & & & +b^3+b-3 \\ A\;.\;-C+E & & & -b^4-5b^3-b^2+4 \\ \hline 2A-B-D+E & & & 4b^4-6b^3-2b^2+5b+1 \end{array}$$

Verbigratia; ſi ſupponamus A, B, C, D, E, ſignificare 1, 2, 3, 4, 5. Item b, b^2, b^3, b^4, ſignificare 3, 9, 27, 81. tantundem valebunt iſta atq; hæc.

$$\begin{array}{ll} 1+2-3 = 0 & 405-54-9+12 = 354 \\ -4+6-4 = -2 & +27+3-3 = 27 \\ 1-2+5 = 3 & -81-135-9+4 = -221 \\ \hline 2-2\pm0-4+5 = 1 & 324-162-18+15+1 = 160 \end{array}$$

In ſubductione hæ obſervandæ ſunt Regulæ.

In Subductione. 1. *Si ſigna ſint Diſſimilia ſubſcribenda eſt quantitatum ſumma, cum ſigno ſuperioris, nempe quantitatis minuendæ ſeu illius unde facienda eſt ſubductio.* Puta ſi ex − 3 auferamus + 2, reſiduum erit − 5. Nempe ſi ſupponantur jam deeſſe 3, & ulterius auferantur 2, tandem deerunt 5 = 3 + 2. Item ſi ex + 3 auferantur − 2, reſiduum erit + 5. Nempe ſi jam adſint 3 & inſuper tollatur, (hoc eſt, ſuppleatur) defectus duorum, ſive reſtituantur 2, jam tandem aderunt 5 = 3 + 2.

2. *Si ſigna ſint ſimilia, ſubſcribenda eſt quantitatum Differentia; cum ſigno communi, ubi quantitas auferenda minor eſt; ſed cum ſigno cum contrario, ubi quantitas auferenda eſt major.* Putà, ſi ex + 3 auferantur + 2, manebit + 1, quia 3 − 2 = 1; Si vero ex + 3 auferantur + 4, manebit − 1, quia 3 − 4 = − 1, ſupponitur nempe 1 deeſſe. Item ſi ex − 3 auferamus − 2, manebit − 1; quia nempe ſi intelligantur deeſſe 3, & auferantur − 2 ſive ſuppleatur defectus duorum, hoc eſt, ſi reſtituantur 2, tandem deerit non niſi 1: Si vero ex − 3 auferamus − 4, manebit + 1; nempe ubi deerant 3, ſi reſtituantur 4, aderit 1. Et pariter in aliis.

Oughtredus utramq; conjunctim ſic effert, *Subductio ſpecioſa conjungit utramque magnitudinem datam, mutatis omnibus ſignis quantitatis ſubducendæ.*

His

His explicatis exſempla ſequentia non difficulter percipientur.

$$\begin{array}{lrrrrl} \text{Ex} & +3\mathcal{C} & -2\mathfrak{z} & +3\mathcal{R} & -5 & \\ \text{aufer.} & +2\mathcal{C} & -1\mathfrak{z} & -2\mathcal{R} & +3 & \\ \hline \text{reſtat.} & +1\mathcal{C} & -1\mathfrak{z} & +5\mathcal{R} & -8 & \end{array} \quad \text{vel} \quad \begin{array}{rrrr} 3C & -2Q & +3R & -5 \\ 2C & -1Q & -2R & +3 \\ \hline 1C & -1Q & +5R & -8 \end{array}$$

$$\text{vel} \begin{array}{rrrr} 3Ac & -2Aq & +3A & -5 \\ 2Ac & -Aq & -2A & +3 \\ \hline Ac & -Aq & +5A & -8 \end{array} \quad \begin{array}{rrrr} 3a^3 & -2a^2 & +3a & -5 \\ 2a^3 & -a^2 & -2a & +3 \\ \hline a^3 & -a^2 & +5a & -8 \end{array} \quad \begin{array}{rrrr} 3aaa & -2aa & +3a & -5 \\ 2aaa & -aa & -2a & +3 \\ \hline aaa & -aa & +5a & -8 \end{array}$$

Nempe, ſi ex 3 $\mathcal{C}$ auferantur 2 $\mathcal{C}$, manebit 1 $\mathcal{C}$; quia $3-2=1$. Item, ſi ex $-2\mathfrak{z}$ auferamus $-1\mathfrak{z}$, manebit $-1\mathfrak{z}$; quoniam, ſi ubi deerunt quadrata 2, auferatur vel ſuppleatur defectus unius, hoc eſt, reſtituatur 1, deerit adhuc quadratum unum ſive $-\mathfrak{z}$. Item, ſi ex 3 R auferamus -2 R ſuperſunt $+5$ R; nempe ſi ubi adſunt 3 radices, reſtituantur adhuc 2 radices, aderunt omnino 5 radices. Deniq; ſi ex -5 auferantur $+3$ reſiduum erit -8: nempe cum jam deſint 5, ſi adhuc auferantur 3, deerunt omnino 8. Si igitur reſidua iſtæc omnia particularia in unum colligantur, erit illud $1\mathcal{C} - 1\mathfrak{z} + 5\mathcal{R} - 8$.

Similiter in exſemplis ſubſequentibus. Si ex $A + 2B - 3C + D$, auferantur, $2B - 2D + E$, manebit $A - 3C + 3D - E$. Et pariter in aliis.

$$\begin{array}{rrrrr} A & +2B & -3C & +D & \\ & +2B & & -2D & +E \\ \hline A & & -3C & +3D & -E \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} 3a^3 & +3a^2 & -2a & -2 \\ 2a^3 & +3a^2 & +2a & -10 \\ \hline +a^3 & & -4a & +8 \end{array}$$

Quod ſi ſupponamus A, B, C, D, E, ſignificare 1, 2, 3, 4, 5. Et a, a^2, a^3, ſignificare 2, 4, 8. tantundem valebunt illa atq; hæc.

$$\begin{array}{rrrrrl} 1 & +4 & -9 & +4 & & = 0 \\ & +4 & & -8 & +5 & = +1 \\ \hline 1 & \pm 0 & -9 & +12 & -5 & = -1 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrl} 24 & +12 & -4 & -2 & = 30 \\ 16 & +12 & +4 & -10 & = 22 \\ \hline 8 & -0 & -8 & +8 & = 8 \end{array}$$

Atq; hoc quidem, de Additione & Subductione Algebricâ & Specioſa, dicta ſufficiant.

Quod autem ſuperius de Additione monuimus, illud etiam de utriſq; Additione & Subductione (ſive Numeroſis ſive ſpecioſis) intelligendum eſt; Nempe *Quando plures quantitates ſunt continuè vel addendæ vel ſubducendæ, vel partim addendæ partim ſubducendæ, perinde eſt quo ordine inſtituantur operationes, modo omnes continuè peragantur.* Non enim de ordine ſeu ſitu quantitatum quæritur ſed de earum magnitudine; (nempe quantum illud ſit quod emergit, quocunq; tandem ordine diſponantur.) Nempe $6+3-4=6-4+3=3+6-4=3-4+6=-4+6+3=-4+3+6=5$. Item $A+B-C=B+A-C=A-C+B=B-C+A=-C+A+B=-C+B+A$. Et ſimiliter in aliis.

CAP. XVI.

Additionis & Subductionis, per contrarias operationes, probatio. Objectionibus Rami reſpondetur. Quæſtiunculæ aliquot familiares ſolvuntur. Probatio novenaria. Utut lubrica ſit, non tamen contemnenda. Quomodo reddi poteſt certa.

POſt traditam Additionis & Subductionis praxin; annectendum videtur aliquid de utriuſq; Probatione ſive Examine. Cum enim in Arithmetices praxi, tyronibus præſertim & parum exercitatis, error calculi facillime poſſit irrepere: ſolent hic Arithmeticæ Practicæ Magiſtri methodos tradere operationem jam peractam examinandi, quo melius perſpectum ſit numquis error ſubſit. Quam ego rem in hunc locum diſtuli, quia Additionis & Subductionis examinationem ſimul tradendam eſſe duxerim; partim quod eadem ferè ſit utriuſq; methodus; partim etiam quod neutra ſeorſim tam commodè tradi poſſit, cum altera alterius probationem præſtet.

Examinatio ſive Probatio Additionis. Additionem peractam ſolenne eſt per Subductionem (operationem ipſi contrariam) examinare. Cum enim duo numeri ſimul additi ſunt, ſi ex ſumma ſubducatur eorum alterutra, reſtabit

reſtabit reliqua. Ut ſi $2 + 3 = 5$; erunt $5 - 2 = 3$, & $5 - 3 = 2$. Hoc eſt, ſi 2 & 3 addita conſtituant 5; tum, ſi ex 5 auferantur 2, manebunt 3; ſi auferãtur 3 manebunt 2. Atq; idem patebit, ſi in tot punctis res peragatur. Si enim puncta bina & terna conſtituant quina; deletis 3 manebunt 2; vel deletis 2 manebunt 3. Demonſtratio dependet ex illo axiomate, *Si æqualia æqualibus auferantur, reliqua erunt æqualia.*

+2	2
+3	3
5	5
−2	−3
3	2

Ideoq;	ſi ſint	3 + 2 =	5
	deletis utrinq;	3	3
	manebunt	2	2

Si igitur, ubi ex Additionis ſumma additorum alterum auferatur, quod reſtat æquatur additorum reliquo, operatio rite peracta eſt; ſi autem Reſiduum ſubductionis, reliquo addendorum non congruat; indicium eſt erroris. Atq; idem in grandioribus numeris accidit. Ut in appoſito exemplo.

378569	addendi.
482586	
861155	Summa.
482586	Subducendus.
378569	Reſiduus.

Si autem plures numeri addantur; Subductionis opus ſæpius erit iterandum. Ut in exemplo appoſito.

38925	addendi.
19634	
82703	
98516	
239778	Summa.
38925	Subducendus.
200853	Reſiduus.
19634	Subducendus.
181219	Reſiduus.
82703	Subducendus.
98516	Reſiduus.

Verum cum hoc pacto examinandi labor evadat ipſâ primaria operatione major: Satius fortaſſe videbitur ipſam potius Additionis operationem repetere: præſertim ſi ordine retrogrado vel aliquo alio modo inverſo procedatur: verbi gratia, Si prius ſingulas ſeries addendo a nota ſuprema deorſum proceſſimus (ut in exemplo ultimo, $5 + 4 = 9$. $9 + 3 = 12$. $12 + 6 = 18$) in repetita operatione ab infima nota incipientes procedamus ſurſum, (ut $6 + 3 = 9$. $9 + 4 = 13$. $13 + 5 = 18$,) ut eo minus ſit periculi in eundem

 errorem,

errorem, ſi quis prius commiſſus fuerit, denuo incidendi.

Quod autem de Additionis probatione in addendis numeris abſolutis dictum eſt; pariter etiam in additione Algebrica & Specioſa locum habet; ut & in addendis quantitatibus plurium denominationum. Nam & hic eadem omnino ratio obtinet quæ ſuperius, ut non ſit opus alia demonſtratione. Exempla ſunto.

	lib.	*unc.*	*drach.*	*ſcrup.*	*gr.*		
Adde	13	9	5	1	18	2Q + 1R + 3	Additio.
	2	6	2	2	6	3Q − 2R − 1	
Summa	16	4	0	1	4	5Q − 1R + 2	
Subduc.	2	6	2	2	6	3Q − 2R − 1	Subduct.
Reſtat.	13	9	5	1	18	2Q + 1R + 3	

Additio	A + 3B − C + 2D	$b^3 + 3b^2 - 5b - 1$	addit.
	3A + 2C − D	$2b^3 - b^2 + 4b + 6$	
	4A + 3B + C + D	$3b^3 + 2b^2 - b + 5$	
Subdu.	3A + 2C − D	$2b^3 - b^2 + 4b + 6$	ſubduc.
	A + 3B − C + 2D	$b^3 + 3b^2 - 5b - 1$	

Probatio Subductionis

In Subductionis probatione, eâdem fere methodo incedendum eſt, qua in probatione additionis: ſed vice verſa. Ut enim ſubducendo examinatur additio, ita addendo examinanda eſt ſubductio. Nempe, ſi quantitas ablata & Reſidua ſimul addita conſtituant quantitatem primo propoſitam (unde nempe altera auferenda erat) indicium eſt operationem ritè proceſſiſſe; ſin ſecùs, erratum eſt. Nam *Ablatum & Reſiduum ſimul æquantur Integro* (quippe Totum ſuis Partibus ſimul ſumptis;) ideoq; *ſi Reſiduo reſtituatur Ablatum, redibit Integrum.* Exſempli gratia. Si ex numero quinario, auferatur binarius, & ternarius ſupereſſe dicatur, patet operationem probe peractam eſſe, quia numeri binarius & ternarius (ablatus & reſiduus) ſimul additi conſtituunt quinarium. Quod itidem in totidem punctis oſtendetur; nam ſi punctorum quinq; deletis duobus, tria dicantur ſupereſſe; verum illud eſſe liquet, quoniam ſi tribus illis reſiduis reſtituantur duo

5	5 − 2 = 3
2	5 = 3 + 2
3	∴
2	: · | · · ·
5	

Exa five 4/

ablata,

ablata, redibit punctorum numerus quinarius primo poſitus. Vel denique ſi ſint $5 - 2 = 3$, additis utrinq; 2, aggregata erunt æqualia $5 = 3 + 2$; & contra ſi æqualibus $5 = 3 + 2$, auferantur æqualia puta 2 manebunt æqualia $5 - 2 = 3$.

$$\left.\begin{array}{r} 5 - 2 = 3 \\ 2 = 2 \\ \hline 5 \quad = 3 + 2 \end{array}\right\} \text{adde.}$$

Atque idem prorſus, iiſdem de cauſis, in numeris majoribus non minus valebit; ut & in ſubductionibus Algebricis & ſpecioſis ſive ſymbolicis; aut etiam in Quantitatibus plurium denominationum. Ubiq; enim & univerſaliter obtinebit illud, *Sublatum & Reſiduum æquantur Toti*. Exſempla aliquot ſubjecimus.

$$\left.\begin{array}{r} 3 + 2 = 5 \\ 2 = 2 \\ \hline 3 \quad = 5 - 2 \end{array}\right\} \text{ſubduct.}$$

Ex.	3 𝒸 + 2 ℨ − 1 𝓇	5 Ac − 4 Aq + A − 1
tolle	1 𝒸 − 1 ℨ + 3 𝓇	3 Ac + 2 Aq − 2 A + 3
Reſid.	2 𝒸 4 3 ℨ − 4 𝓇	2 Ac − 6 Aq + 3 A − 4
Sūma	3 𝒸 + 2 ℨ − 1 𝓇	5 Ac − 4 Aq + A − 1

	dies.	horæ.	minuta.
2 A − 3 B + C	45.	12.	56.
A + B − C	13.	18.	7.
A − 4 B + 2 C	31.	18.	49.
2 A − 3 B + C	45.	12.	56.

Atq; hactenus quidem oſtendiſſe ſufficiat mutuam tam Additionis quam ſubductionis, examen ſive probationem per operationem contrariam.

Non ignoro interim Ramum, & poſt illum alios, cenſores forte plus ſatis rigidos, hujuſmodi Additionis & Subductionis mutuas ſive demonſtrationes ſive probationes rejicere; non quidem ut falſas aut fallaces, ſed ut ſuperfluas: quippe cum veritas operationis ſive in addendo ſive in ſubducendo ex ipſo progreſſu ſatis appareat, (ſi nempe rite procedat uti regulis docetur,) ideoque demonſtrationem aliunde fruſtra petendam eſſe. *Objectio Rami.*

P 3 Ego

Solutio. Ego autem rationem illam Rami vix commode applicatam arbitror, aut rei, quæ jam agitur, rite accommodatam. Vix enim quiſquam (uti credo) eſt, qui conceſſa firmitate regulæ, & exſempli pariter cum illa regulâ conformitate, dubitabit adhuc de veritate operationis; (ſiquis enim ejuſmodi reperiatur, fateor illum ſub Rami cenſura meritò cadere, ut qui, conceſſis præmiſſis, ipſaque ſyllogiſmi formâ, de concluſione interim dubitat:) Verum. conceſſâ Regulæ certitudine, de præſentis operationis cũ datâ regulâ conformitate, merito fortaſſe nonnunquam dubitabitur; hujuſmodi autem dubitationes his probationibus tollendas docent. Cum autem doceat Ramus hæcce dubia ſiqua ſint tollenda eſſe repetendo totã operationẽ peractam, eamq; ad regulam exigendo: quanquam non negem rem ita peractam ſatis feliciter ſuccedere poſſe, tamen (pace tanti viri) facilius eundem errorem calculi recurrere poſſe judico eodem opere iterato, quã opere aliquantùm variato: (quod & facile conceſſuros arbitror qui vel leviter calculo exercitati ſunt;) adeoq; melius per operationem contrariam, quam eandem repetendo, examen faciendum.

Sed & alia me movet ratio cur nolui reciprocas has examinationes ſive probationes exterminare; Nempe quod, hoc pacto exercitati, utriuſq; operationis, Additionis ſcilicet & ſubductionis comparatas vires perſentiſcent tyrones Arithmetici: nimirum hanc reſolvere quod illa componit. Eſt enim Additio iſtius quaſi γένεσις, cujus ſubductio eſt ἀνάλυσις. Ea vero quæ συνθετικῶς conſtruuntur, ἀναλυτικῶς examinare, nec Arithmeticum dedecet, nec Geometram.

Iiſdem item quæ jam tradidimus principiis ſolvuntur hujuſmodi quæſtiones (quibus ſe exercere tyrones non incommode poterunt)

4	addicio	7
3		4
7		11
4	ſubductio	7
3		4

Quis Numerus ille, unde ſi demantur 4, reſtabunt 3? Additis nempe 4 & 3 (ſublato & reſiduo) prodibunt 7, numerus quæſitus. Item *A quo numero tollenda 7, ut reſtant 4?* Additis ſcilicet 7 & 4 prodibunt 11; hoc. eſt, numerus ablatus & numerus reſiduus ſimul additi dabunt numerum minuendum.

Ita

2436 } additio.
1563 }
3999 }
2436 } ſubductio.
1563 }

Ita in numeris grandioribus; *Qui, ære alieno obſtrictus, jam ſolvit libras* 2436, *& etiamnum debet libras* 1563, *quanto primitus debito obſtingebatur?* Seu (quod perinde eſt) a quo numero tollenda ſunt 2436, ut reſtent 1563? Additis numeris 2436, & 1563 prodibit quæſitus 3999. Hos autem numeros ita repertos eos ipſos eſſe qui quærebantur, inde liquet, quod, ſi ſuductiones fiant prout quæſtiones propoſitæ poſtulant, numeri reſidui iidem erunt quos quæſtiones poſtulabant. ut patet.

Contrà vero, ſi quæratur *Quis numerus ille ſit cui ſi addantur 6 prodibunt* 10? Ex additionis ſumma 10, auferatur numerorum additorum alter (cognitus) 6, & prodibit reliquus (quæſitus) 4. Item *cui numero addenda ſunt* 356 *ut fiant* 783? ſubductione facta, prodibunt 427. Hos autem ſic inventos numeros eos ipſos eſſe qui quærebantur, patebit, ſi additiones juxta quæſtionum præſcriptum peragantur, prodibunt enim ſummæ indicatæ.

10 } ſubductio { 783
6 } { 356
4 } additio { 427
10 } { 783

Eodem modo ſi quæratur *Quis numerus ſit qui, a quinario, binario differt?* Quoniam differentia poteſt eſſe, vel in exceſſu vel in defectu; patet ejuſmodi numeros duos eſſe, majorem nempe & minorem: illum addendo, hunc ſubducendo inveniemus. Eſt enim ſeptenarius binario major, & ternarius binario minor, quam eſt quinarius. Sic 3758 eſt differentia numeri 5371 a duobus numeris nempe 9129 majore, & 1613 minore, quorum ille addendo, hic ſubducendo inveſtigatur.

5 } additio { 5371
2 } { 3758
7 } { 9129

5 } ſubd. { 5371
2 } { 3758
3 } { 1613

Poſſunt autem hæc omnia etiam per *Regulam algebræ* (ut loquuntur) vel Analiticen, aut Arithmeticam ſpecioſam pariter oſtendi. Verbi gratia. Si quæratur *Cui numero addenda*

7,

7, *ut fiant* 20? Numerus quæſitus dicatur 1 ℨ; ergo 1 ℨ + 7 = 20; auferantur utrinq; 7; & reſtat 1 ℨ = 13, numerus quæſitus. Ita, *A quo numero auferendo* 325 *ut reſtent* 243? Numerus quæſitus dicatur A; erit ergo A − 325 = 243: Et (additis utrinque 325) A = 568. Item *Quis numerus eſt cujus differentia a* 261, *eſt* 141? Numerus quæſitus dicatur E; ergo erit 261 ± 141 = E = {402. 120.} numerus quæſitus. Et ſimiliter in aliis.

1 ℨ + 7 = 20 7 = 7 1 ℨ = 13	ſubductio
A − 325 = 243 325 = 325 A = 568	additio.

ſumma	402 = E	
	261	
	141	
Reſidua	120 = E	

Siquis autem inquirat verbi gratia, *Quinam addendi ſint numeri, ut ſumma ſit* 7; vel *Quinam ex quibus ſubducendi, ut reſtent* 7; Hujuſmodi quæſtiones eſſent planæ ludicræ & nugaces; cum ex datis propoſitis in quæſtione nihil certi elicitur; quippe modis innumeris reſponderi poterit. Puta 1+6, 2+5, 3+4, 1+2+4, 1+2+3+1, 5+1+1, 8 − 1, 10 − 3, 20 − 13, 5+6− 4, 12 − 3 − 2, &c. Nam ex ſolo Aggregato, vel Reſiduo, de particulis additis aut ſubductis nil certi conſtabit.

Subductionis alia probatio. Notandum autem & hic eſt, aliam eſſe conſimilem ſubductionis probationem, eidem prorſus fundamento innixam. Nempe (in operatione legitime peracta) *Si numerus reſiduus a numero primum poſito auferatur reſtabit numerus prius ablatus.* Puta ſi ex 583 auferendo 291 deprehendero primum 312. Quod an recte probaturus, ex 583 (numero propoſito) ſubduco 312 (reſiduum inventum,) ut videam num ſic proveniet 291 numerus prius ablatus: invenio autem jam reſiduum eſſe non illum ſed 271, ipſo minorem; unde deprehendo errorem calculi alicubi irrepſiſſe

583 291 312	ſubductio mendoſa	583 312 271
583 291 292	ſubductio emendata	583 292 291

cepiſſe; quem repetito oppere in decadum ſerie commiſſum, intelligo, dum decadas 31 pro 29 poſuerim; & verum reſiduum eſſe 292. Fundamentum hujus probationis hoc eſt, quoniam cum ablatus & reſiduus æquentur toti, utrovis eorum ſublato reliquis manebit. Adeoq; ubi toti 583 æquentur duo ſimul 291 & 292, ſicut ſublato 291 manebit 292, ita ſublato numero 292 manere neceſſe eſt alterum 291.

Supereſt adhuc alius tam Additionem quàm Subductionem probandi ſive examinandi modus; quam *probationem Novenariam* appellant. Eaq; ſic inſtituitur. *Probatio Novenaria.*

In Additione, Numerorum addendorum ſingulis figuris indiſcriminatim, nulla locorum conſideratione habita, ſimul additis; & 9 quoties fieri poteſt abjectis, reſiduum numero novenario minus obſervetur: atq; idem etiam in additorum ſumma fiat. Quo facto, ſi duo iſta reſidua ſint invicem æqualia, operationem illam ritè peractam eſſe conjicimus; ſin ſecùs, certùm eſt alicubi errorem incidiſſe. Sic in appoſito exſemplo: *In Additione.*

3, 5, 8, ſimul addita conſtituunt 16, unde abjectis 9 reſtant 7, (ſeu, quod eodem reſidet, 1 + 6 = 7;) huic numero 7 addantur inſuper 1, & 2, ut fiant 10, unde demptis 9 reſtat 1: huic additis 3 & 5 fiunt 9, quæ abiiciantur; tum 6, 1, & 3, ſunt 10, unde abjectis 9 reſtat 1; hoc reſiduum ſeorſim (memoriæ cauſa) notetur.

```
   3581
   2350
   6013
  -----
  11944        1 X 1
```

Deinde & in ſumma id ipſum faciendum eſt; ubi $1 + 1 + 9 = 11$. Et $11 - 9 = 2$. tum $2 + 4 + 4 = 10$. deniq; $10 - 9 = 1$. Quod etiam reſiduum ſeorſim noto. Cum reſidua (poſt 9 quoties fieri poteſt abjecta) ſint æqualia (utrobiq; 1) conjicio operationem illam rite peractam eſſe. Si autem reſidua iſta fuiſſent inæqualia, certum eſſet errorem alicubi admiſſum eſſe.

Quo fundamento nititur hæc probatio, neſcio an quiſquam tradiderit; ego certe non memini me uſpiam legiſſe. Verùm, uti in aliis ſoleo, ita hic mihi incumbere judico operationis fundamentum tradere, ut inde diſcant qui velint non rem tantum, ſed & rei rationem; præſertim cùm in diſciplinis Mathematicis non ſit adeo congruum ἀναποδείκτως effata pronunciare. Fundamentum igitur iſtius operationis (ſive unde primitus originem ſumpſerit, ſive ſaltem unde demonſtrari *Quo fundamento nititur*

rpoſſit,) hoc eſt. Cum numerorum loci aſcendant (uti ſuperius traditum eſt) proportione decupla, pro ſingulis decadibus inferius gradus ponenda ſunt (in gradu ſuperiori) totidem unitates: at idem omnino eſt a 10 abjicere 9, atq; pro 10 ſubſtituere 1: & eadem ratione, pro 11 ſubſtituere 2 (nempe pro 10 unam, pro 1 alteram unitatem) atq; ab 11 abjicere 9. Et ſic in cæteris. Atq; hinc fit, ut ubi poſthabita locorum diſtinctione ſinguli characteres indiſcriminatim conſiderantur, decem & unum eodem omnino charactere notantur, hoc ſcilicet 1 utrumq; Atq; hinc factum eſt quod 10 & 1 perinde habentur, hoc eſt, ex ſingulis decadibus ejiciuntur novem.

Quam ſit lubrica. Non diffiteor tamen probationem hanc lubricam eſſe. Quamquam enim reſiduorum diſſenſus certum ſit erroris indicium, non tamen eorum conſenſus certum eſt indicium veritatis. Nam, verbi gratia, in exemplo præcedente, ſive dicamus additionis ſummam eſſe 11944 (quod verum eſt) ſive 19144, ſive 11044, ſive 11080; ſive deniq; (ne plures memorem) 10000, utcunq; poſt novenariorum quoties fieri poteſt abjectionem remanebit 1; adeoq; probatio iſta errorem non detegeret. Non eſt igitur cur huic probationi nimium fidamus, quaſi, ubi illa nullum detegit operatio plane eſſet erroris immunis.

Non tamen rejicienda. Neq; tamen ſuadeo ut penitus rejiciatur hæc examinandi methodus; quia non ita magno labore peragitur, & errorem nihilominus non raro detegit, (licet non ſemper,) imò rariſſimè fallit: Niſi enim quis data operâ illud agat, ut numeros falſos pro veris ſubſtituat, & ſponte erret, vix unquam tam felici ſucceſſu (ſeu potius infelici) errabitur, quin ſe prodet error. Cum enim vel mediocriter cauti vix pluſquam una aut altera unitate (in eâdem ſerie) peccent; non autem latere poſſit error, niſi vel multiplex ſit (ita ut unus alterum celet) vel novem præciſè unitatibus (aut forſan 18, 27, &c.) in eadem ſerie erratum fuerit; rariſſimo certè caſu eveniet, ut error, ſiquis ſit, lateat, & vel lubricam hanc probationem effugiat.

Quomodo fieri poteſt certa. Sed addo, probationem hanc tanta cautione (neq; labore interim multùm aucto) adhiberi poſſe, ut non minus certa ſit & infallibilis, quam alii probandi modi. Ut autem hoc fiat, operæ precium erit decadas in ſuperiores ordines tranſmiſſas continuo notare (ut ſupra oſtendimus) intra duas lineolas: Atq;

examiـ

examinare deinde ſingulas ſeorſim ſeries, puta unitatum, decadum, centuriarum, &c. Quo facto, ſi quoties ex omnibus ejuſdem ſerieì numeris ſimul additis abjiciantur 9, toties præciſe ex ejuſdem ſeriei ſummula abjici etiam poſſit, cum eodem utrobiq; reſiduo, certum eſt indicium operationem illam neutiquam mendoſam eſſe. Exſemplum eſto operatio appoſita. Ubi in unitatum ſerie occurrunt numeri 6,8,7,6,9. in quibus addendis, poſtquam 9 quater abjecta ſunt, nihil ſupereſt, (nempe 6 + 8 = 14. 14 − 9 = 5. 5 + 7 = 12. 12 − 9 = 3. 3 + 6 = 9. 9 − 9 = 0. 0 + 9 = 9. 9 − 9 = 0.) ſed & in

97896
89978
59867
78756
88779
4433
415276

36. (ejuſdem ſeriei ſummulâ) 9 præciſe quater continentur, ſine ullo reſiduo. In ſequenti decadum ſerie; in addendis 9,7,6, 5, 7, 3, poſtquam quater abjecta ſunt 9, reſtat 1 : ſed & ita in 37. In ſerie centuriarum 8,9,8,7,7,3, cum 9 quater ejecta ſunt, 6 ſuperſunt : atq; ita in 42. In ſerie millium, tam in addendis 7,9,9,8,8,4, quam in ſummula 45, cum 9 quinquies abjiciuntur nihil ſupereſt. In ſerie deniq; ſuprema, tam in particulis 9,8,5,7,8,4, quam in earum ſummula 41, abjectis 9 quater ſuperſunt 5. Certum eſt igitur & ſingularum ſerierum ſummulas, & omnium etiam aggregatum, vera eſſe, adeoq; totam operationem ritè proceſſiſſe. Nec ſecus eveniet in aliis ejuſmodi additionibus probandis. Hac autem ſi incedamus viâ, non novenarius magis quam quilibet alius numerus adhiberi poſſit: ut patet. Quod monuiſſe ſufficiat.

Subductionis probatio novenaria.

In novenaria Subductionis probatione, eâdem omnino eſt incedendum via, quam in Additionis probatione oſtendimus: cum hoc ſolo diſcrimine, nempe quod in Additione numeri addendi cum ſumma conferuntur; in ſubductione, ablatus & reſiduus (ſimul ſumpti) conferuntur cum numero minuendo. Ratio eſt, quoniam ut in Additione, ſumma eſt quid integrum cujus partes ſunt numeri addendi; ſic in ſubductione numerus minuendus rationem habet Totius, cujus partes ſunt ablatus & reſiduus. Exſemplum eſto illud quod apponitur. Ubi in figuris numeri minuendi ſimul indiſcriminatim addendis, nempe 7,3,9,8,1, abjectis 9 quoties fieri poteſt, re-

tiarum aliquid delectationis perſentiſcant, & diſcant interim ſimiliter eadem ubi opus eſt in uſum proferre: Non ingratum fore judicavi hujuſmodi ſpecimen in re chronologica exhibere.

A Mundo Condito ad Diluvii initium, numerantur an: 1656. Annos autem qui ibi numerantur completas eſſe, patet ex vita Methuſalæ, juxta illam quam habemus computationem Gen. 5. cujus ultimus annus concurrit cum anno Mundi 1656, uti illa computatione liquet. A diluvio autem inchoato ad Arphaxad natum numerat Helvicus annos 2, atq; inde ad Tharam annos 220, inde autem ad Abrahamum natum, annos 70, quem annorum numerum colligit ex ea ſupputatione quæ habetur, Gen. cap. 11. Inde autem ad Promiſſionem datam (cujus mentio facta eſt Gen. 12.) numerat annos 75. propter Gen. cap. 12. v. 4. ſaltem annos completos 74. Hinc autem ad Exitum ex Ægypto numerat annos 430. juxta quod habetur Galat. 3. ver. 17. & Exod. 12. ver. 41. Ab exitu autem ad Templum Salomonis numerat itidem annos 480. Inde autem ad Chriſtum natum numerat annos completos 1015. Unde etiam ad initium Æræ Chriſtianæ vulgaris ſive Dionyſianæ annos adhuc 2 elapſos autumat. Atq; inde ad annum præſentem completū numeramus 1655. Adeoq;, numeris omnibus ſimul additis, fuerunt juxta Chronologiam Helvici (qui in pleriſq; cum Calviſio & Scaligero conſentit) ab Orbe condito ad annum præſentem (incluſive) anni 5604, uti ex calculo adjuncto patet.

De Annis Mundi:

A Mundo Condito,	Anni.
Ad Diluvium.	1656
Inde ad Arphaxad.	2
Inde ad Tharam.	220
Inde ad Abrahamum.	70
Inde ad Promiſſionem.	74
Inde ad Exitum ex Ægypto.	430
Inde ad Templum.	480
Inde ad Chriſtum natum	1015
Inde ad Æram Dionyſ.	2
Inde ad annum præſentem.	1655
Millia	3 .
Centuriæ	22 .
Decades	38
Unitates	24
Summa	5604

Verum, ni fallor, calculus ille Helvici eſt aliquot in locis emendandus, ut cum veritate hyſtoricâ melius conſentiat. Ego

pauca tantum, circa Abrahami præſertim tempora, leviter attingam, exercitii gratia; (non enim exſpectandum eſt ut totam Chronologiam in tranſitu emendandam ſuſcipiam.)

De Nativitate Arphaxadi. Incepit diluvium (uti ex *Gen. cap.* 5. conſtat) anno mundi completo 1656, currente vero 1657. (menſe ſecundo) Annos enim qui *Gen. cap.* 5. numerantur completos eſſe, patet ex vita Methuſalæ, quæ ſi ſecus eſſet, ultra diluvii initium proroganda eſſet; incidit enim ejuſdem annus ultimus in annum mundi 1656. Adeoq; iſte menſis ſecundus in quo incipit, eſt anni mundi 1657 currentis & anni vitæ Noachi 601 currentis. Duravit autem diluvium per annum integrum, & quod excurrit, adeoq; finitum eſt poſt annum Mundi completum 1657, ſive anno mundi currente 1658. Deinde natus dicitur Arphaxad *biennio poſt diluvium Gen. cap.* 11. *v.* 10. cujus nativitatem incidiſſe putat Helvicus (aliiq; fere omnes) anno mundi completo 1658, hoc eſt, biennio poſt diluvium inchoatum. Quod ſi *biennio poſt diluvium* intelligatur de biennio poſt diluvium finitum, tum naſci dicendus erit Arphaxad anno mundi 1659 completo, ſive anno 1660 currente; nempe uno anno ſerius quam vult Helvicus. Fateor interim voces illas *biennium poſt diluvium*, quanquam prima fronte potius diluvii finem quam initium ſpectare videantur, non tamen neceſſario eo trahendas eſſe; præſertim cum phraſis eadem aliter interpretanda videtur *Gen. cap.* 9. *v.* 28. *vixit autem Noachus poſt diluvium annos* 350; nempe, *poſt diluvium inchoatum*; ut patet ex collatis *Gen. cap.* 7 *v.* 6. & *cap.* 9. *v.* 28, 29. Adeoq; ſi de Arphaxad, *biennio poſt diluvium* nato, biennium illud rectius a diluvii initio inchoandum, quam ab ipſius fine judicaverint Viri docti, ego non repugno; quanquam etiam non deſint qui & alterum ſenſerint.

De Nativitate Abrahami. Deinde, poſt natum Arphaxad, ad Tharam uſq;, tranſierunt (ut conſtat ex *Gen. cap.* 11.) anni 220. Tharam vero 70 annos natum reputat ille (cum Euſebio & Scaligero) cum genuerit Abrahamum; quia nempe dictum eſt, *Gen. cap.* 11. *v.* 26. *Vixit Tharah 70 annos & genuit Abrahamum, Nachorem, & Haranem.* At vero non inde certo concludimus *Abrahamum* (quamvis primo nominatum) aut natu maximum fuiſſe, aut eo anno natum, ſed eorum ſaltem alterum tunc fuiſſe natum. Et quidem Haranem, licet ordine ultimum, aliunde colligimus fuiſſe natu primum, utpote cujus duæ filiæ Milcah & Iſcah

quam

(quam eandem & Saram dictam eſſe colligitur ex comparatis *Gen.cap.* 11.*v.* 29,30. *cap.* 20.*v.* 12. quam etiam eodem ſenſu ſororem vocat *Abraqamus* quo & Lotem fratrem, *Gen.c.* 13 *v*,8.*&* c. 14.*v.* 12,14.(unde etiam videtur Harani atq; Abrahamo licet eundem patrem Tharam, non tamen eandem fuiſſet matrem;) Nachori & Abrahamo nuptæ fuerint; & quidem Sarah ſive Iſca nonniſi 10 annis Abrahamo natu minor, ut patet *Gen.cap.* 17.*v.*17. Quot autem annos natus Thara Abrahamum genuerit, ſic colligimus. Thara ex Ure Chaldæorum cum Abrahamo profectus Harane (ſive Charris) mortuus eſt natus annos 205, *Gen.c.*11.*v.* 31,32. Unde mortuo Thara deceſſit Abrahamus tunc annos natus 75, *Gen.c.*12.*v.*4. Si igitur Abrahami annus 75 coincidat cum Tharæ anno 205 (aut ſaltem hunc annum non præceſſerit,) fuit Thara ſaltem annorum 130 quum Abrahamum genuerit: adeoq; 60 annis integris ſerius quam vult Helvicus &c. Qui plura hac de re quærit, videre poterit, totam hanc quæſtionem ſatis prolixe agitatam apud D. *Gualterum Rauleigh* Equitem Anglum, in ipſius *Hiſtoria mundi*, Anglice editâ.

Tum demum ſupponit Helvicus (ut & *Euſebius*, *Scaliger*, *Calviſius &c.*) Abrahamo 75 annos nato promiſſionem factam eſſe, tot enim annos natus dicitur Abrahamus quū Charris exceſſerit *Gen.c.*12.*v.*4. At vero non ab *Abrahami* deceſſu ex Charane reputanda eſt Epocha promiſſionis datæ, ſed altius omnino repetenda eſt dum adhuc eſſet Ure Chaldæorum, ut liquet ex Actor. *cap.*7.*v.*2.3. priuſquam Charanem omnino advenerat. Adeoque & promiſſionis recenſio *Gen.cap.*12.*v.*1,2,3. facta, quamquam in ordine hiſtoriæ poſterior ſit, quam profectionis prius memoratæ *cap.* 11.*v.*31. tamen ordine temporis promiſſio illa hæc profeſſionē præceſſit; eaq ὑστερολογία juſtū rerū ordinē turbare non debet, cum ſit tantū ἀ[illegible]ολογία profectionis prius per prolepſin memoratæ. Abrahamum vero poſtquā Ure Chaldæorum exceſſerat Charane aliquamdiu commoratum fuiſſe ſatis innui videtur in ipſa hiſtoria, quæ recenſetur *Gen.* c.12 præſertim *v.* 5. quanto autem tempore iſtic permanſerit, non ῥητῶς ibidem affirmatur, ſed ex circumſtantiis colligitur. fuiſſe per ſpacium circiter quinq; annorum ſaltem a promiſſione data in Ure Chaldæorum, ad Abrahami ex Charris deceſſum annos elapſos eſſe quinque. Quod confirmatur ex

De Promiſſione facta.

collatis

mittatur adjectitius ille ad Arphaxadi natales annus) annum 5660.

Priuſquam autem rem hanc dimittam, prout annum mundi addendo inveſtigavi, libet etiam tempus, quo Iſraelitæ Ægypto permanſerint, ſubducendo inquirere. *De Iſraelitarum mora in Ægypto.*

Præmittendum autem, verba illa Exod. cap. 12. ver. 40. ומושב בני ישראל אשר ישבו במצרים שלשים שנה וארבע מאות שנה. *Et incolatus Iſraelitarum* (ſive, *filiorum Iſrael,*) *qui commorati ſunt in Ægypto, fuit quadringentorum & triginta annorum:* &c. caute interpretanda eſſe. Non enim id volunt, quod Iſraelis poſteri per totos 430 annos in Ægypto permanſerint: ſed quod Familia iſta, (ex Abrahamo nempe ejuſq; poſteris conſtans, quam Deus ex aliis omnibus ſibi ſpeciali modo ſelegerat;) quæ nunc paſſim *Iſraelitarum,* ſive *filiorum Iſrael,* nomine celebratur, (quæq; jam aliquandiu in Ægypto fuerant inquilini, & duram ſervierant ſervitutem;) ex quo primum patriam ſuam Dei juſſu reliquerunt, inquilini erant (in aliena terra) per annos 430. *Exactis autem annis illis 430, eodem ipſo die egreſſi ſunt, &c.*

Cum igitur conſtet, totam eorum peregrinationem, (ab Abrahami prima profectione ex Ure Chaldæorum, ad Iſraelitarum exitum ex Ægypto computandam,) fuiſſe annorum 430. Quærendum reſtat quot ex illis annis ante Jacobi deſcenſum in Ægyptum tranſierant; ut conſtet quantam moram ipſius familia in Ægypto fecerint.

Dicimus igitur, A promiſſione data ad natum Iſaacum elapſos eſſe annos 30, (uti ex jam dictis patet:) Iſaacus autem annos 40 natus duxit Rebeccam; ex qua poſt annos adhuc alios 20, ſuſcepit Jacobum, uti patet *Gen. cap.* 25. *v.* 20, 26. Jacobus autem natus annos 130 cum familia ſua in Ægyptum deſcendit, ut patet *Gen. cap.* 47. *v.* 9. Quibus omnibus ex annis 430 ſubductis reſidui ſunt anni 210 quibus in Ægypto commorati ſunt. Neq; tamen toto hoc tempore in ſervitutem redacti ſunt; ſed quamdiu vel Joſephus ipſe vixit (nempe per annos adhuc 71) aut etiam ipſius σύγχρονοι qui ipſum noverant, (quibus fortaſſe anni adhuc circiter 30 concedendi,) proſpere vixerunt; uti patet *Exod. cap.* 1. *v* 6, 7, 8. adeoq; ſuperſunt anni circiter 110 intra quos *De duræ ſervitutis initio.*

430
30
40
20
130
220
210

 duram

duram illam ſervitutem perpeſſi ſunt: num autem per totum hoc annorum 110 ſpacium malè habiti ſint non certum eſt, (quia de præciſo initio iſtius malæ tractationis non conſtat) at per eorum longe majorem partem duraſſe perpeſſiones liquido conſtat: Nam Moſes annos 80 compleverat quando coram Pharaone comparuit eorum dimiſſionem poſtulans, ut dictum eſt *Exod.cap.7.ver.7.* qui tamen ipſe natus eſt poſt inceptam illam ſervitutem, & quidē flagrante perſecutione, ut liquet *Exod.2.* Non igitur ſtatim ab ipſo initio ſervitutis, nam multa prius tentata ſunt priuſquam eo deventum eſt. Nempe primo durâ ſervitute conati ſunt Ægyptii Iſraelitarum animos domare, experturi num hac ratione eorum forte numerus minui poſſit, ut liquet *Exod.1.v.* 10.&c. Cum vero hoc neutiquam ex animo ſucceſſit, quin adhuc etiam auctis oneribus eo magis multiplicati ſint: Obſtetricibus clam ut (videtur) in mandatis datum eſt ut filios eorum in ipſo partu ſtrangularent, filiabus interim ſalvis: adeoq; ſecreta fraude, parentibus interim ipſis vix advertentibus, & nihil forſan mali ſuſpicantibus, filios etiam ab ipſo partu eriperent. Hoc autem ipſis obſtetricibus clanculum in mandatis datum, & quidem clam perpetrandum eſſe, ideo præſertim ſuſpicor (licet illud totidem verbis non affirmetur) quoniam ſi aperte vellent, & palam profeſſi, infanticidium illud aggredi, potuiſſet aliis quibuſvis rex illud in mandatis dediſſe non minus quam obſtetricibus, & forte melius cum mulieri tale quid aggredienti facile poſſit vel viribus reſiſti; quid quod & ea quam poſtea in ipſarum defenſionem obtendunt excuſatio, nullius eſſet momenti; ſive enim priuſquam ſive poſtquam ipſæ venerint naſceretur infans, quid hoc impedire poſſet, ne, ſi illud palam profiteri vellent, ipſum ſtrangulent; aut, ſi vi fuerint impeditæ ne illud faciunt, hanc ipſam vim potius cauſatæ eſſent cur regis mandato minus fuiſſent obſequentes. Videtur igitur infanticidium illud, quod palam profiteri puderet, obſtetricum curæ cōmiſſum eſſe, ut quæ clanculum nec obſervatæ nec quidem ſuſpectæ illud ſecretò poſſent in ipſo partu aſſequi. Illæ vero inhumanum illud facinus deteſtatæ, cum non auſæ eſſent regis mandato palam contraire, aut diſertis verbis renunciare, tamen rem diſſimulandam putarunt, quod & fecerunt, infantes etiam maſculos in vivis conſervantes. Cauſatæ interim (fortaſſis) ſe ſatis fide-

liter

liter quantum in ipſis erat negotium illud curaſſe, & quidem infantium non paucos reapſe mortuos eſſe (vix enim credibile eſt, etiam Hebræorum fæminas nunquam feciſſe abortum, aut infantes nunquam in partu periiſſe;) quod ſuæ deberi curæ credi poſſit; verum quod illud non ſemper fiat ipſis non dandũ eſſe vitio, cum Hæbreæ mulieres vegetæ ſint, & quidem ipſis Ægyptiis multo vegetiores (quod & ipſum non eſt improbabile, ſed certum potius putandum; cum partim dura earum ſervitus etiam huc facere poſſit, nemo enim neſcit laboratrices mulieres mollibus & delicatulis vegetiores eſſe, & quidẽ in ipſo partu minus non raro vel difficultatis vel periculi ſubire; partim etiã divinæ benedictioni inſigni id debeatur,) adeo quidẽ ut obſtetricis ope vix indigeant, & non raro antequam ipſa advocari poſſit peperiſſent, unde deeſſet opportunitas etiam maxime volentibus illud quod a rege in mandatis acceperant exſequendi. Atque hanc poſteriorẽ accuſationis etiã partẽ eas obtendiſſe, ſatis conſtat, cum illud diſertis verbis affirmetur, & quidem vix dubitandum eſt quin & reliquam obtenderint. Quam quidem excuſationem, quamvis non ſola cauſa fuerit (uti liquet ex elogio quod ipſis largitur Deus) non tamen plane fictam arbitror, aut eas hac in re, quantum ego video, mendacii reas; quod tamen non paucos video, quaſi in cõfeſſo eſſet, non plane quidẽ approbantes, ſed ſaltẽ temperare ſatagentes. Cum vero neq; hoc ſecundũ conſiliũ ſucceſſum quẽ voluit obtinuerit, quin Hebræorũ numerus adhuc creverit, tum tandẽ re non diutius diſſimulata, quod prius clandeſtinâ fraude & perfidia rex aggreſſus erat, palam atq; ex profeſſo denunciat, publico edicto toti populo imperans ut Hebræorum infantes maſculi mergantur flumine, ſolis femellis ſalvis, quantum autem temporis inſumpſerit, duobus illis prioribus experimentis, (quæ certe aliquot annorum moram poſtulabant priuſquam conſtare poſſet quem eſſent exitum habitura, non conſtat. At certe tertium illud facinus jam erat ſuſceptum, & (uti videtur) aliquandiu obtinuerat (licet quamdiu non conſtat) priuſquam natus eſt Moſes. Unde certũ eſt non primo ſtatim initio durioris iſtius ſervitutis, ſed poſt annos potius aliquammultos natus dicendus eſt. Et propterea probabili ſatis conjectura judicare poſſumus per centũ plus minus annos rigidã illam duraſſe ſervitutem; ſaltem vix pauciores quam 90 aut plures quam 110.

Numerus deſcendentium in Ægyptum.

Quamvis autem, uti dictum eſt, durioris iſtius ſervitutis duratio non ita accurate determinari poſſit, attamen (ut ſuperius oſtenſum eſt,) tota Iſraelitarum in Ægypto mora, ex quo Jacobus cum ipſius familia in Ægyptum deſcendit, ſatis conſtat; nempe annorum 210. In hoc autem 210 annorum ſpacio (quod mirum eſt dictu) 70 perſonæ tam ſtupendo augmento in tam immenſum numerum creverunt ut omnem fere exſpectationem ſuperet *Septuaginta perſonæ*, inquam. Tantus enim erat totus Iſraelitarum numerus cum Jacobus in Ægyptum deſcendit, computatis interim tam ipſo Jacobo, quam Joſepho ejuſque liberis qui jam in Ægypto prius erant: prout viritim nominantur *Gen.cap.*46. Nempe ex liberis Leæ recenſentur nominatim 34, quorum cum duo (Er & Onan) jam antea mortui fuerint, (ut dictum eſt v. 12.) reliqui 32 cum ipſo Jacobo, ſunt 33, quem numerum habemus v.15. Tum ex liberis Zilphæ recenſentur nominatim 16. (ut v.19.) Ex liberis Rachelis, inter quos Joſephus ejuſq; duo filii, numerantur 14 (ut v.22.) Ex liberis deniq; Bilhæ, 7, (ut *v.*25.) Adeoq; totus omnium numerus, puta Jacobus ejuſq; poſteri ex eo nati quotquot tunc in vivis erant, ſunt (33 + 16 + 14 + 7 =) 70, ut dictum eſt v. 27. atq; iterum Exod.c.1.*v.*5. Deut. cap.10.v.22. Non ignoro quidem LXX Interpretes in locis illis habere ἑβδομήκοντα πέντε, ſed manifeſto, ut videtur, errore. Quem tamen lapſum ſequutus eſt Stephanus in ipſius oratione ad populum uti illam habemus Act. 7.v.15. Cum enim res eſſet levioris momenti, ipſiq; tunc temporis incubuerit ſumma brevitate uti, ſatius ipſi videbatur in re hiſtorica, (obiter tantum attingenda,) juxta receptam apud eos verſionem (quæ paſſim obtinuit) eandem repetere, quam ad importunã emendationem (quæ ad rem præſentẽ vix quicquã conferret) in illis temporis anguſtiis citra neceſſitatem divertere: Lucæ vero, qui hanc ipſius orationẽ, ſive potius ipſius ſummam recenſet neutiquam incubuit narrationem illam (ſiquid inibi erratum eſſet) emendare, ſed ſatis ſuas egiſſe partes cenſendus eſt ſi orationem illam prout habebatur fideliter recenſuerit. Neq; enim exſpectandum eſt, ut, quotieſcunq; in N. T. textus aliquis ex V. T. citatur, (juxta eam quæ tunc obtinuit verſionem,) ſinguli verſionis apices, re quæ præ manibus erat omiſſa, critice diſcutiantur. Satis eſt, ſi quem citant textus, quatenus ad præſens negotium applicatur, cum authentico

authentico textu Hebraico quoad ſenſum conveniat; quanquam fortaſſis in nonnullis apicibus non tam accurate ſuas partes egiſſent qui citantur interpretes. Quâ de re videantur, ſi libet commentatores in locum.

In quam immenſam autem 70 illæ perſonæ multitudinem eruperint intra 210 annorum ſpacium, ſatis liquet ex ea quam habemus populi Iſraelitici recenſione, quando Ægypto exierunt. Nam Numeror. cap. 1. v. 46. Iſraelitis tributim computatis, reperti ſunt 603550 viri adulti, ad bellandum idonei, qui annum ætatis viceſimum compleverant; præter decrepitos ſenes, mulieres item, & infantes ſive etiam adoleſcentes, (quippe qui annum viceſimum nondum compleverant,) tota interim tribu Levi non numerata. Si vero numerus juniorum, qui nondum 20 annos nati, ſimul cum ſenibus ad bellandum ineptis, bellatorum numerum æquâſſe putemus (quod non iniquum eſt poſtulatum, cum ejuſmodi ni fallor, proportio in aliis etiam gentibus ſoleat occurrere; vix enim ſolet adultorum numerus, numerum ſimul puerorum, adoleſcentium, & ſenum, ſuperare,) atq; horum numerus reliquis adjiciatur; reperietur numerus 1207100. His inſuper ſi adjiciatur totius numeri pars decima, pro tribu Levi, (quæ in priori catalogo recenſita non eſt,) exſurgit omnium maſculorum numerus 1327810 circiter. Deniq; ſi fæminas judicemus maribus non fuiſſe pauciores, (quæ forte & multo plures eſſe poſſent, partim quod viri ſinguli non raro plures habuerint uxores, partim etiam quod eorum miranda multiplicatio & incrementum id ipſum ſuadeat, præſertim cum certum ſit ex infantibus maſculis non paucos flumine fuiſſe ſubmerſos,) earumq; numerus numero marium adjungatur, emerget numerus omnium 2655620. Nempe *bis millena millia, ſexcenta quinquaginta & quinque millia, cum ſexcentis & viginti*; ſeu potius juxta ſtilum veterum Romanorum, (qui centenea millia ſolebant numerare,) *vicies & ſexies centena millia, quinquaginta inſuper & quinque millia, cum ſexcentis adhuc & viginti.* Cumq; hi omnes ſint ſimul ſuperſtites, ſi illis ulterius annumerentur omnes qui interea temporis demortui fuerint, numerus in immenſum eſſet ampliandus.

603550
603550
1207100
120710
1327810
1327810
2655620

 Hos

Hos autem omnes ex 70 (uti dictum eſt) perſonis intra 210 (aut ad ſummum 211) annorum ſpacium deſcendiſſe, tam incredibile prope, & ſtupendum plane eſt incrementum, ut nulla iſtius vel probabilis cauſa aſſignari poſſit, præter inſignem illam benedictionem Abrahamo divinitus promiſſam, Gen. cap. 15. v. 5. *Intuere verſus cœlum, & numera ſtellas ejus, ſi poſſis eas numerare; nempe ſic, inquit, erit ſemen tuum.* Quod & mirifice ad impletum eſt: Quicquid enim ſit de arenulis ad maris littora poſitis, certe numerum ſtellarum, quas Abrahamus in firmamento ſimul intueri poſſet, longe ſuperat ipſius poſterorum multitudo. Cum enim numerus ſtellarum, quas facile notare poteſt oculus intuentis, ultra unum mille non multum excedat, (numerari ſiquidem ſolent 1022, in tabulis Aſtronomicis,) quarum etiaam non niſi pars media, uno ſcilicet hemiſphærio contentæ, ſimul intuendæ patent; unius Jacobi poſteri (Iſmaelis interim & Eſavi poſteris, utut numeroſis, ne quidem nominatis, nec qui à Ketura deſcenderunt,) qui uno atq; eodem hoc tempore vixerunt (omiſſis interim iis qui vel antea fuerant demortui, vel etiam per omnia deinceps ſecula naſcituri) numerum illum plus quam bis millies ſuperavit.

Non diſſimulandum interim eſt, hanc ſupputationem ſupra memoratam, non immediate poſt exitum ex Ægypto factam fuiſſe, ſed poſt integrum annum, ineunte ſcilicet anno ſecundo, (die primo menſis ſecundi) uti conſtat *Num.* cap. 1. v. 1. Verum hoc non adeo magni momenti eſſe judico, cum eorum numerum eo anno non admodum auctum fuiſſe cenſendum erit; partim propter inſignem illam cladem quam interim paſſi ſunt, (Exod. cap. 32. *v.* 28, & 35.) ob vitulum aureum; partim etiam quod eundem circiter numerum habemus Exod. c. 12. v. 37. licet non accurate ſupputatum; dicitur enim ibidem Ægypto eadem nocte exiiſſe, ex Iſraelitis, viros adultos circiter 600000; numerantur autem (ut diximus) anno ſequenti præciſe, 603550.

Atq; hæc quidem obiter dixiſſe ſufficiat, quo anſam arriperem Additionis atq; Subductionis praxin in exercitium revocandi.

CAP.

CAP. XVIII.

De multiplicatione, Quid ſit. Quid, multiplicandus, multiplicator, Factus. Quid multiplum, Pars, Partes, Aliquota pars, Aliquanta pars. Multiplicatio ſenſu ſtricto, & ſenſu laxo ſumpta. Non ſemper numerum auget. Multiplicatio eſt multiplex additio. Multiplicandus aut Multiplicator, utervis ex Factoribus dici poteſt. Multiplicationis praxis: in numeris ſimplicibus; in numeris compoſitis; in partibus decimalibus. De Indice numeri Facti.

POſt abſolutam in Prioribus Numerorum Additionem & Subductionem, eorundem *Multiplicationem* tradendam aggredior.

Eſt autem Multiplicare, *Numerum invenire, qui numerum datam toties contineat quoties requiritur.* Sive *Numerum invenire quæ datam rationem (ſive proportionem) habeat ad numerum datum.* Puta, ſi quæratur numerus qui ſit numeri cujuſvis dati *duplus, triplus, quadruplus, decuplus, vigecuplus, centuplus, millecuplus,* aut quavis alia ratione ſeu proportione datum numerum ſuperet: vel (quod perinde eſt) qui numerum datum *bis, ter, quater, decies, vicies, centies, Millies,* aut quotieſcunq; contineat: Multiplicatio docet quæſitum numerum invenire. Vel etiam (ſi ulterius libeat quam ad ſolos numeros multiplicationis vocem extendere) *multiplicare* eſt, *datam quantitatem in data ratione augere*, ſive *Quantitatem deſcribere, quæ datam toties contineat, quoties requiritur:* aut etiam univerſalius *Datæ alicui quantitati aliam in data ratione exhibere.* *Multiplicatio quid?*

Numerus datus ille, cui in data proportione quæritur alius, (puta cujus duplus, triplus, quadruplus, &c. quæritur,) dicitur *Multiplicandus*, πολλαπλασιαζόμενος. *Multiplicandus.*

Numerus ille qui datam proportionem exprimit, (puta qui dicit quotuplus futurus ſit quæſitus numeri dati, ſive quoties, aut quot vicibus illum continere debeat,) πολλαπλασιάζων dicitur, hoc eſt *Multiplicans* ſive *Multiplicator.* *Multiplicator.*

Numerus deniq; quæſitus dicitur γινόμενος, numerus *Factus*, ſive multiplicatione *Productus.* *Factus.*

Multiplicationis autem *Signum,* ſive *Nota,* ſive *Character*, hoc *Multiplicationis ſignum.*

eſto

eſto ×. Nempe ut 10 + 2 Additionem innuit, ſive numerum denarium binario auctum; & 10 — 2 Ablationem, ſive Subductionem, nempe numerum denarium binario mulctatum, ſive diminutum; ſic 10 × 2 ſignificet numerum denarium binario multiplicatū ſive bis poſitū. Si itaq; quæratur numerus qui numerū denariū *bis* in ſe contineat, hoc eſt, qui ſit denarii *duplus*, ſeu qui duplâ proportione denarium ſuperet: numerus Denarius dicetur *Multiplicandus*; numerus *Binarius* (qui datam proportionem exprimit) dicetur *Multiplicator*; numerus deniq; quæſitus (puta vicenarius) qui numerum denarium bis continet, *Factus* dicetur, ſeu *Productus*. Hoc eſt, ſi ſit 10 × 2 = 20, erit 10 Multiplicandus, 2 Multiplicator, & 20 Factus, ſeu Productus.

His appellationibus intellectis, non erit difficile aliorum quas afferunt Multiplicationis definitiones intelligere; quales ſunt hæ quæ ſequuntur.

Multiplicare, eſt *numerum invenire, qui toties contineat Multiplicandum, quoties Multiplicans continet Unitatem.*

Item, Multiplicare, eſt *numerum invenire qui eâdem ſit ratione ad Multiplicandum quâ Multiplicans ad Unitatem.*

Has autem definitiones, aliaſq; ejuſmodi, licet non ut falſas rejiciam, cùm revera rem prout eſt exprimant; vix tamen uſq; adeo accommodas autumo. Cum enim Definitio ſit definiti explicatio, debet ea per notiora procedere. Quid autem ſit numerus *Multiplicandus, Multiplicans*, & *Multiplicatione factus*, non minus eſt ignotum quàm quid ſit ipſum *Multiplicare*. Qua etiam de cauſa non admittendam cenſui (in definitione noſtra poſteriori) ipſam *rationis* ſive *proportionis* vocem, niſi & ipſam ſimul explicuiſſem; utpote quam nondum in præcedentibus ex profeſſo expoſueram.

Fateor interim ipſum Euclidem multiplicationem ſic explicuiſſe, 15 d 7. Ἀριθμὸς ἀριθμὸν πολλαπλασιάζειν λέγεται, ὅταν ὅσαι εἰσὶν ἐν αὐτῷ μονάδες, τοσαυτάκις συντεθῇ ὁ πολλαπλασιαζόμενος, καὶ γένηταί τις. *Numerus numerum multiplicare dicitur, quando quot ſunt in ipſo unitates, toties componitur* (numerus) *qui multiplicatur, atq; (ita) factus aliquis emergit.* Verum hîc (ſi rite attendatur Euclidis ſcopus) non tam *Multiplicationem* definit, aut docet quid ſit Multiplicare; ſed exponit quid ſibi velit apud illum phraſis illa cum dicitur *numerus numerum multiplicare* (cujus quidem voces ſingulæ ſupponuntur prius fuiſſe cognitæ;) atq; hoc quidem

quidem poſtquam expoſuiſſet quid ſit *ratio*, & ſpeciatim quid ſit πολλαπλάσιον ſeu *multiplum*, adeoq; & quid ſignificet πολλαπλασιάζειν notum eſſet.

At meum eſt, non tam aliorum definitiones reprehendere, quam res ipſas explicare: adeoq; mihi ſufficit ſi vel ex eorum vel ex meis verbis res eadem quam & ego & illi volunt percipiatur: neq; enim mihi lubitum eſt de verbis litem movere, ubi de re convenit, licet interim & verborum delectum adhibendum eſſe non diffiteor.

Multiplicatio ſtricte ſumpta, quomodo intelligenda.

Notandum autem eſt, ubi in explicatione definitionis noſtræ dictum eſt, quod numerus multiplicatione quæſitus, ſive etiam inventus, (*Factus* nempe) numerum datum (quem *Multiplicandum* diximus,) *bis, ter, &c. contineat*, vel in data ratione *ſuperet*: non hoc temere dictum eſt: Quoniam in primaria vocis notione illud tantum intelligitur. Atq; hoc quidem ipſa voce ſatis innuitur, nam *Multiplicare* ſive πολλαπλασιάζειν, eſt numerum dati *multiplum* ſeu πολλαπλασίονα invenire. Quid autem ſit πολλαπλάσιον ſeu *multiplum*, ut & e contra, quid ſit μέρος ſive *pars*, (ſeu, ut vulgo dicimus, *aliquota pars*,) definit Euclides 1 & 2 *d d* 5. Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους, τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον. Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος. *Pars eſt magnitudo magnitudinis, minor majoris, quando minor metitur majorem: Multiplex autem eſt major minoris quando minor metitur majorem.* uti Commandinus & Clavius exponunt. Vel (aliquanto forſan explicatius, neq; minus κατὰ τὸ ῥητόν,) *Magnitudo minor Magnitudinis majoris Pars eſt* (aliquota) *quando majorem metitur*, (menſurat, ſeu potius permetitur, permenſurat, nempe quando aliquoties ſumpta majori fiet accuratè æqualis.) *Major autem minoris Multiplex eſt quando a minori* (ſic) *menſuratur.* (Quod autem de Magnitudinibus hîc dicitur, id ipſum totidem verbis de Numeris habetur, 3 & 5 *d d* 7. Et quidem de quantitate qualibet perinde intelligi debet.) Nempe *Partis* vox non de qualibet totius particula ſeu membro dicitur, (uti cum ax. 9. dicitur *Totum eſſe majus ſua parte*,) ſed definitâ ſive determinata ſignificatione reſtringitur ad ejuſmodi partem, quæ nunc dici ſolet *aliquota pars* (puta *pars tertia, pars quarta, pars centeſima*, &c.) quæ nempe aliquoties ſumpta toti fiet æqualis: ſi autem non poterit ita aliquoties repetita toti fieri æqualis (ſed ſemper vel major, vel minor,) non ipſius μέρος, ſeu *pars* (aliquota) dicetur, dicetur

Quid ſit Pars & Multiplum.

(hoc ſenſu,) ſed potius *partes μέρη*, uti dicitur 4 d 7, *μέρη* 5 *ὅταν μὴ καταμετρῇ* (quā tamen definitionem de magnitudinibus non interpoſuit *lib.*5. quoniam hoc de illis univerſaliter enunciari non poſſet; fieri enim poteſt ut magnitudo minor majoris neq; *pars* ſit, neq; *partes*, quoties nempe toti eſt incommenſurabilis: quod cum de numeris, proprie dictis, nimirum integris, de quibus ſolis hic agit Euclides, contingere non poſſit, ut qui ſint omnes cōmenſurabiles, cum ſaltem unitas eas omnes metiatur, neceſſe eſt ut numerus minor ſit majoris vel *pars*, vel *partes*, hoc eſt partis aliquotæ aliquoties repetitæ aggregatum) Sic verbi gratia, 2 eſt numeri 6 aliquota *pars* (puta triens, ſive pars tertia,) quia $2+2+2=6$, hoc eſt numerus 2 ter repetitus æquatur numero 6; ſed numerus idem 2 numeri 5 *pars* (aliquota) non eſt, quia ſi bis (aut rarius) ponatur eſt minor quam 5, ſi autem ter (aut ſæpius) major erit quam 5 nam $2+2=4$ minor quam 5; $2+2+2=6$ major quam 5; adeoq; numerus 2 numeri 5 non *pars* (aliquota) dicetur, ſed *partes*, *puta* $\frac{2}{5}$ ſeu *duæ quintæ*; vel etiam, uti jam loqui *ſolemus*, *aliquanta pars* dici poteſt, ſed non *aliquota pars*. Et ſimiliter de *Multiplici* ſive *multiplo* judicandum erit. Cum enim pars & multiplum ſint relata, ex uno cognito cognoſcetur reliquum: eſt enim Pars, multipli pars; & Multiplum, eſt partis multiplum; quod propterea partem aliquoties præciſe continere debet, puta bis, ter, quater, aut ſæpius.

Multiplicatio laxiori ſenſu accepta. Quoties igitur multiplicatio per unitatem, aut numeros fractos, aut etiam ſurdos, puta per 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\sqrt{3}$. &c. occurrit *Multiplicationis* vox latiori ſenſu intelligenda erit, & *καταχρηστικῶς*· neq; alio ſenſu illud dici poteſt quam quo 1, aut etiam $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\sqrt{3}$, &c. numeri aut multitudines dici poſſunt.

Qui enim quantitatem quamlibet per unum multiplicat, hoc eſt, ſemel (præciſe) ponit; non proprie multiplicare dicendus eſt, ſeu multoties ponere, ſed eandem ſimpliciter quantitatem retinet; neq; quod hac multiplicatione producitur eſt proprie expoſitæ quantitatis Multiplum, ſed potius ea ipſa; (niſi & Æquale, eo ſenſu Multiplum eſſe dicatur, quo Unum ſupra contendimus eſſe Numerum; quod ſi dicatur, ego non repugno.) Atq; hinc eſt quod dici ſolet, *Unitatem neq; multiplicare neq; dividere*; quia nempe ſive multiplicemus ſive dividamus per unum, quantitas ea multiplicatione aut diviſione non mutatur, ſed eadem quæ prius manet: non minus quam in Additione

tione aut Subductione, ciphra ſeu o, nihil mutat. Nam ut $2 + 0 = 2$, & $2 - 0 = 2$, ſic $2 \times 1 = 2$, & $\frac{2}{1} = 2$. Eſtq; potius multiplicationis aut diviſionis negatio, quam multiplicatio aut diviſio.

Qui autem, per, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. multiplicare ſupponitur, non tam revera multiplicare dicendus eſt quam dividere (ut deinceps melius patebit, ubi Diviſionis naturam expoſuerimus,) nam ſicut qui multiplicat per 2, 3, 4, &c. datæ quantitatis quærit duplum, triplum, quadruplum, &c. ſive expoſitam quantitatam bis, ter, quater, &c. ponit: ſic qui per, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. multiplicat, non niſi datæ ſemiſſem, trientem, quadrantem, &c. quærit; neq; ipſam quantitatem, nedum ipſius multiplum, ſed ipſius ſaltem ſemiſſem, trientem, quadrantem, &c. hoc eſt revera dividere per 2,3,4, &c. Adeoq; ut qui quantitatem negativam ſupponitur Addere, (puta qui numero 4 adjungit -2,) reapſe Tollit; (minuit enim, non auget; eſt enim $4 - 2$, minus quam 4; & tantundem eſt atq; tollere 2:) ita qui per $\frac{1}{2}$ (aut áliam quamlibet aliquotam partem) ſupponitur Multiplicare, reapſe Dividit; tantundem enim eſt atq; per 2 dividere. Ut enim Additioni Subductio, ſic Multiplicationi Diviſio eſt contraria.

Tandem; qui per $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$, &c. multiplicare ſupponitur, partim multiplicat partim dividit; nempe multiplicat per 2,3,&c. (numeratores,) & per 5, 4, &c. (denominatores) dividit: Sicut qui addere ſupponitur $4 - 2$, partim addit, partim aufert; nempe addit 4 & aufert 2. Ut & qui multiplicare ſupponitur per $\sqrt{3}$, duo facit, nempe multiplicat per 3, & radicem quadraticam educit. Verum hæc omnia rectius percipientur ubi de numeris Fractis, & Surdis deinceps dictum fuerit: at interim hæc expedit ſubinnuiſſe, ut intelligatur quid per *Multiplicationem* ſtrictiſſimo ſenſu ſumptam, & quid ſenſu laxiori intelligi debeat. Ut autem Multiplicationis nomen, ſic & Definitio noſtra utriq; ut opus eſt accommodari poteſt.

Non ſemper auget numerum.

Et propterea Multiplicatiore, laxione ſenſu ſumpta, non ſemper augetur numerus, aut multiplum producitur, (quanquam illud vi vocis perhiberi videatur, impoſito nempe nomine a famoſiori ſignificato.) Cum enim, in multiplicatione, ſupponitur numerus Multiplicandus toties poni, quoties innuit Multiplicator; ſive (quod tantundem valet) nume-

rus multiplicatione Factus toties contineat Multiplicandum quoties Multiplicator continet Unitatem: Prout Multiplicator major ſit aut minor quam Unitas, aut etiam ipſi æqualis; ita numerus Productus ſive factus major eſt aut minor quam multiplicandus, aut ipſi æqualis. Nam qui quantitatem præciſe ſemel ponit (hoc eſt, multiplicat per 1,) eandem neq; auget neq; minuit; qui autem pluſquam ſemel ponit (ubi nempe multiplicator eſt major quam 1,) ille auget; qui autem minus quam ſemel ponit (ſive qui multiplicat per quid minus quam 1) ille ſic multiplicando minuit.

Multiplicatio eſt multiplex Additio.

Patet autem, ex jam traditis, Multiplicationem (ſaltem ſtricte ſumptam) vix aliud eſſe quam multiplicem additionem, ſive additionis compendium. Idem enim eſt triplicare aut per 3 multiplicare, atq; quantitatem ter apponere; adeoq; Factum iſtius multiplicationis tantundem erit, atq; hujus additionis Aggregatum; & ſimiliter in aliis. Puta $2 \times 2 = 2 + 2$. $2 \times 3 = 2 + 2 + 2$. $2 \times 4 = 2 + 2 + 2 + 2$. &c. ut patet. Ubi etiam obiter notetur, numerum binarium ſive ſui adjectione, ſive in ſeipſum multiplicatione, tantundem augere; nempe $2 + 2 = 2 \times 2$: quod in ſolo numero binario contingit.

Multiplicandus aut Multiplicator, utervis ex Factoribus dici poteſt.

Porro, in numerorum multiplicatione, uti ex dictis item patet, duos numeros notos eſſe, ſive datos, cōſtat, nempe *multiplicandum* & *multiplicantem* (ſive multiplicatorem;) tertium quæſitum eſſe, quem *Factum* ſive *Productum* diximus. Sciendum tamen eſt, perinde omnino eſſe ſive hunc ſive illum ex datis multiplicandum aut multiplicantem dicamus; idem enim omnino prodibit Factus, utervis datorum dicatur multiplicandus. Tantundem enim eſt ſive velimus Quatuor Ter ponenda, ſive Tria Quater, utrobiq; enim exſurgunt Duodecim. Hoc eſt $4 \times 3 = 3 \times 4$. Et ſimiliter in aliis. Quod quidem totidem punctis, eo quem hic videas ordine poſitis, ſatis demonſtrari poterit: ſive enim ſeriebus tranſverſis numeremus ter quatuor, ſive ſeriebus erectis quater tria, idem tamen erit utrovis modo punctorum omnium numerus, ut patet. Atq; hoc ipſum Euclides oſtendit 16 e 7. Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάζοντες ἀλλήλους ποιῶσί τινας, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν ἴσοι ἀλλήλοις ἔσονται.

. . . .
. . . .
. . . .

Sidus

Si duo numeri ſe mutuo multiplicantes aliquos effecerint, numeri ſic facti, erunt inter ſe æquales. Hoc eſt, ſi numerus A multiplicet B, ut fiat B × A; & vice verſa numerus B multiplicet A, ut fiat A × B; numeri ſic facti, erunt invicem æquales, nempe B × A = A × B. Cujus ulteriorem demonſtrationem, ſi noſtra non ſufficiat, videat cui libet apud Euclidem loco citato.

Quum igitur Arithmeticæ practicæ magiſtri non raro docent ex numeris datis, Majorem dicendum eſſe multiplicandum, & præponendum eſſe: minorem vero Multiplicantem, & ſubſcribendum eſſe: non tamen illud putandum eſt aut ſemper aut neceſſario faciendum eſſe, ſed prout ſibi commodius putaverit calculator: quamvis enim nonnunquam expedire videatur, nulla tamen neceſſitate imperatur.

Denique monendum inſuper eſt, duos illos numeros datos, quos *Multiplicandum* & *Multiplicantem* diximus, non raro apud Arithmeticos uno nomine *Factores* dici, ſicut qui multiplicatione producitur dicitur *Factus*. Item Factores illi *invicem duci* ſive *Multiplicari* dicuntur. Idem enim omnino eſt *numerum in numerum ducere*, atq; *numerum per numerum multiplicare*. Item numerus multiplicatione productus ſive factus, nō raro dicitur *Rectangulum*, vel *Planum*, vel etiā *numerus planus*; Metaphora nēpe ex Geometricis ducta, ubi ex ductu longitudinis in latitudinē habetur planum ſive area Rectanguli vel Parallelogrammi.

Atq; hactenus multiplicationis naturam ſatis videar expoſuiſſe, ſeu quid ſit Multiplicatio: ſupereſt ut ipſius etiam Praxin oſtendam, ſive quomodo ſit multiplicandum.

Monendum autem & hic eſt de multiplicatione, quod de Additione & Subductione ſupra monuimus; eam nempe vel in numeris ſimplicibus (unius tantum figuræ) vel in numeris Compoſitis (figurarum plurium) exerceri. *Multiplicationis praxis.*

Quod ad numerorum ſimplicium multiplicationem attinet, ea vel ex memoria petenda eſt, vel ex Additionis principiis repetenda, uſq; dum uſus & exercitatio eam familiarem reddiderint. Ita ſiquis neſciat quot ſint ter tria, vel ſepties octo; poterit ille tres numeros ternarios, vel ſeptem octonarios ſimul addere; & pariter in aliis. Sunt enim, ut jam oſtendimus $3+3+3=3\times3$, & $8+8+8+8+8+8+8=8\times7$. Et ſic in cæteris. *Simplicium numerorum multiplicatio.*

Ne autem ejuſmodi additiones ſæpius ſint a tyronibus repetendæ, Tabellam quandam ſolent huic rei accommodatam

compingere, unde ſingulas ſimplicium numerorum multiplicationes velut ex promptuario petere licet, qualem hic ſubjecimus. Cujus quidem Tabellæ demonſtratio quoad ſingulos iſtius numeros, ex Additionis fundamentis petenda eſt, ut modo oſtendimus.

Tabella Multiplicationis & Diviſionis.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

In hac Tabella, numerorum invicem multiplicandorum altero in ſummitate ſeriei erectæ, altero in principio ſeriei tranſverſæ, reperto; locus ille in area tabellæ qui utriq; ſeriei communis eſt numerum exhibet ex eorum multiplicatione factum. Puta ſi quæratur, quis numerus factus erit ex ductu 8 in 7; (ſeu multiplicatione 8 per 7:) in fronte tabellæ quæratur 8, & ad latus 7, (vel contra, numerus hic in fronte, ille ad latus,) & in communi ſerierum concurſu habebitur $56 = 8 \times 7$. & ſimiliter in aliis quibuſcunq; .

Cum autem, uti ſuperius oſtendimus, perinde ſit utrumvis ex Factoribus *Multiplicandum* dicamus, idem enim utrovis modo prodibit; puta $8 \times 7 = 7 \times 8 = 56$. adeoq; perinde etiam ſit utrumvis in fronte quæramus: poterit tabella ipſa in formam duplo fere minorem redigi, uti hic videtur. Ubi duorum numerorum invicem ducendorum major ſemper in fronte, minor ad latus quærendus ſit; & in utriuſq; ſeriei concurſu habebitur, ut prius, numerus factus.

Tabella

Tabella Contractior.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
	3	9	12	15	18	21	24	27
		4	16	20	24	28	32	36
			5	25	30	35	40	45
				6	36	42	48	54
					7	49	56	63
						8	64	72
							9	81

Numerorum compoſitorum multiplicatio.

Ubi autem de ſimplicium numerorum multiplicatione conſtat, non erit difficilis ad compoſitorum multiplicationem progreſſus, ut quæ ex ſimplicium multiplicatione ſæpius iteratâ tota dependet; uti inductione patebit.

Ubi multiplicator eſt numerus ſimplex.

Sit igitur numerus 3421 duplandus, ſive per numerum 2 multiplicandus. Numero igitur multiplicando 3421, ſubſcribatur Multiplicans 2, & (ducta lineola) cuilibet figuræ numeri multiplicandi, ſubſcribatur ipſius duplum (quia nempe multiplicator eſt 2) eodem ſemper gradu cum illo cujus eſt duplum. Ita nempe duplum unius unitatis ſunt unitates duæ; duplum duarum decadum ſunt decades quatuor; duplum quatuor centuriarum ſunt centuriæ octo; duplum trium millium ſunt millia ſex: qui quidem numeri in unam ſummam collecti, nempe 6842, ſunt totius numeri multiplicandi 3421 duplum. Cum enim omnes partes ſimul æquentur toti; erunt etiam omnes partes bis ſumptæ, æquales toti bis ſumpto; hoc eſt, duplum partium omnium æquabitur duplo totius. Quæ quidem demonſtratio (mutatis mutandis) de triplo, quadruplo, quintuplo, aut quovis alio multiplo pariter valebit.

$$\begin{array}{r} 3421 \\ 2 \\ \hline 6842 \end{array}$$

Si vero, in hujuſmodi proceſſu numerus cujuſvis loci ſeu gradus novenarium excedat, adeoq; non ſit unicâ figurâ exprimendus;

mendus; ultima iſtius figura ſuo loco ponenda eſt, ſuperiori interim in locum proxime aſcendentem protruſâ, cum figuræ iſtius locis deinceps numerandâ. Exſempli gratia, ſi numerus idem 3421 per 8 multiplicandus ſit, ſingulæ figuræ numeri multiplicandi octuplandæ ſunt; earumq; octupla ſuis quæq; locis ſubſcribenda, & in unam deinde ſummam (habito locorum reſpectu) colligenda. Nempe Unitas 1 octuplata dat unitates 8, decades 2 octuplatæ dat decades 16, centuriæ 4 octuplatæ ſunt centuriæ 32, & 3 millia octuplata ſunt 24 millia. Quibus in unam ſummam Additione collectis, emergit totius numeri multiplicandi octuplum 27368 = 3421 × 8. ut patet.

```
 3421
    8
-----
    8
   16
  32
 24
-----
27368
```

Poſſunt autem illa particularia ſingulorum locorum multipla, vel totidem diſtinctis lineis collocari, ut modo; vel potius in duas omnino lineas cogi ad hanc formam. Dummodo enim illud utrobiq; curetur, ut quælibet figura debito ſuo loco ſeu gradu collocetur, perinde eſt ſive illud duabus ſive pluribus lineis fiat; eadem ſiquidem additionis ſumma emerget.

```
 3421
    8
-----
 3108
2426
-----
27368
```

Verum & adhuc, ad commodius operationis compendium, poterit iſthæc additionis ſumma etiam currente multiplicationis opere colligi, (quamvis, perſpicuitatis gratia, diſtincte potius utramq; operationem prima vice exponendam putaverim:) Nempe quoties figura quævis in ſuperiorem locum ſit transferenda, ea memoria retineatur, uſq; dum nota quicum addenda ſit innoteſcat, ut utriuſq; loco earum aggregatum ſcribatur. Ita, in ſuperiori exſemplo, poſtquam in unitatum loco ponatur 8 (nempe figuræ 1 octuplum:) ſequuntur 16 decades (nempe duarum octuplum) quarum 6 decadum loco repoſitis, pro reliquis decem reſervo 1 centuriam: deinde 4 centuriarum octuplum ſunt centuriæ 32, quibus adjungenda eſt 1 (nuper reſervata) ut fiant centuriæ 33; quarum 3 centuriarum ſede poſitis, pro reliquis centuriis 30 reſervo 3 millia. His autem 3 millibus, ſi adjungantur millia 24, (nempe octuplum 3 millium in numero multiplicando repertorum,) emergunt

millia

millia 27, ſuis locis ponenda. ut in exēplo appoſito. Adeoq; ſatis declaratum eſt quomodo in multiplicandis etiam numeris compoſitis procedendum eſt, ſi modo multiplicator ſit numerus ſimplex, una figurâ ſcribendus.

```
 3421
    8
-----
27368
```

Si vero non modo numerus multiplicandus, ſed & Multiplicator ſit numerus compoſitus, duabus aut pluribus figuris ſcribendus; eadem quæ prius operatio toties repetenda erit, quot ſunt Multiplicatoris ſive numeri multiplicantis figuræ; numeriq; ſic inventi (debita locorum ratione habitâ) in unam ſummam additione colligendi. Exſempli gratia, ſi numerus idem 3421 per 28 multiplicandus ſit: poſtquam ſubſcripſerim totius octuplum (modo ſuperius tradito inventum) 27368; ſubſcribendum eſt inſuper ejuſdem duplum, ſeu potius vigecuplum. Nempe ipſius duplum (ut ſupra docetur inventum) 6842, ſi ciphram adjectam habeat (puta 68420) ſive, quod tantundem valet, uno gradu aſſcendendo promoveatur, (ita nempe ut ipſius figura ultima ponatur loco decadum, penultima loco centuriarum &c.) habebitur iſtius dupli decuplum, (quælibet nempe figura uno gradu promota decuplum iſtius valoris habet quem prius obtinebat,) hoc eſt, expoſiti numeri vigecuplum. Si itaq; octuplum & vigecuplum ſimul addantur, habebitur viginti-octuplum. ut patet. Nempe $95788 = 3421 \times 28$. Similiter in aliis faciendum erit quotcunq; demum in multiplicatore figuræ reperiantur.

Ubi multiplicator eſt numerus compoſitus.

```
  3421
    28
------
 27368
 6842
------
 95788
```

Ita ſiquis quærat, *Quot horas contineat annus integer?* Cum notum ſit diem quemlibet horas continere 24, erit numerus horarum viginti-quadruplus numeri dierum. Adeoq; cum Annus integer contineat dies 365, atq; inſuper 6 horas, ſi dierum numerus 365 multiplicetur per 24, habebitur numerus horarum quæ in diebus integris unius anni continentur, $8760 = 365 \times 24$. quibus ſi addantur reliquæ 6 horæ, erit omnium numerus $365 \times 24 + 6 = 8760 + 6 = 8766$. tot igitur horæ in uno anno integro continentur.

```
 365
  24
----
1460
730
----
8760
   6
----
8766
```

Si quis inſuper quærat *Quot horæ fuerint elapſæ a nato Chriſto ad finem annorum inde ſubſequentium Mille ſexcentorum quinquaginta & ſex.* Si ducatur vel 8766 numerus horarum unius anni in 1656 numerum annorum; vel (quod eodem recidit) numerus annorũ 1656, in 8766 numerum horarum cujuſq; anni, habebitur numerus horarum omnium 14516496 = 8766 × 1656 = 1656 × 8766, ut in operationibus appoſitis patet.

8766	1656
1656	8766
52596	9936
43830	9936
52596	11592
8766	13248
14516496	14516496

De Ciphris Multiplicatori intermiſtis.

Siquando numeris invicem multiplicandis, ſaltem multiplicatori, Ciphræ immiſceantur; quanquam ipſæ ex ſe nihil ſignificent, inſerviunt tamen locis ſupplendis, adeoq; aliarum figurarum valorem augendo, & propterea neutiquam ſunt negligendæ. Exſempli gratia, ſi numerus 2361 ducendus ſit in 20104. Subſcripto primum multiplicandi quadruplo 9444; cum deinde occurrat in multiplicatore ciphra, ſi illa in totum multiplicandum ducatur prodibit adhuc nihil (nam nullies 1 eſt nihil, item nullies 6 eſt nihil, & ſic in reliquis,) adeoq; nullies 2361 erit 0000. Deinde 2361 × 1 = 2361. item 2361 × 0 = 0000. Deniq; 2361 × 2 = 4772. His igitur omnibus, eo quo hic locantur modo diſpoſitis, in unam ſummam collectis, habebitur numerus 47465544 = 2361 × 20104. Ubi notandum eſt duas ciphrarum ſeries, utut ex ſe nihil ſignificent, tamen cum multiplicorum particularium quodlibet uno ſemper ad ſiniſtram loco ultra quàm præcedens protruditur, ciphrarum ſeries illud faciunt ut reliquæ ſuis ſingulæ ſedibus collocentur.

2361
20104
9444
0000
2361
0000
4722
47465544

Cum autem illud ſolum præſtent interpoſitæ ciphrarum ſeries, ut reliquæ debitas ſuas ſeries occupent, neq; ulterius ex ſeſe quicquam valoris habeant; poſſunt quidem illæ non incommode penitus omitti, modo interim caveatur ut reliquæ ſeries ſignificativæ eaſdem ſedes occupent acſi ipſæ (non-ſignificantes)

cantes) adeſſent: ut in eodem exſemplo hic repetito (omiſſis tantum ſeriebus ciphrarum, reliquiſq; ſuas ſedes retinentibus) videre eſt. Idem enim & hic & illic numerus Factus prodit.

```
     2361
    20104
    -----
     9444
   2361
  4722
 --------
 47465544
```

Ut autem ſuus cuiq; locus rite aſſignetur, curandum eſt ut hæc oſervetur regula; nempe, ut *cujuſlibet particularis multipli ultima figura eodem gradu collocetur cum ſuo reſpective multiplicatore*, (reliquis proximos continue locos occupantibus.) Ut in eodem exſemplo, multiplicandi (2361) quadruplum 9444, ultimam ipſius figuram habet in Unitatum loco poſitum, quia ipſius multiplicator 4, totidem unitates indicat. Item ejuſdem multiplicandi ſimplum 2361, ultimam figuram in centuriarum loco poſitam habet, quoniam ipſius multiplicator 1, unam centuriam indicat. Deniq; ejuſdem duplum 4722, ultimam ſuam figuram habet in deciesmillium loco, quoniam ipſius multiplicator 2, duas millium decades ſignificat. Et ſimiliter in aliis quibuſvis multiplicationibus faciendum erit. Atq; hoc quidem ſi curetur, ciphrarum ſeries quotlibet (ſiquando multiplicatori ciphræ immiſceantur) penitus omitti poſſunt.

Deniq, , *ſi e Factoribus* (ſive numeris invicem multiplicandis) *vel alter vel uterq, in ciphris* (ſive una ſive pluribus) *terminetur; ſepoſitis illis ciphris finalibus, peragatur tota multiplicatio acſi finales non adeſſent; & numero tandem ita producto tot ſubjungantur ciphræ quot erant illæ omnes ſepoſitæ*. De ciphris finalibus. Ita ſi numerus 4085100 ducendus ſit in numerum 230040; ſepoſitis tribus ciphris finalibus (multiplicandi nempe duabus & multiplicatoris unâ) habebitur $939736404 = 40851 \times 23004$; cui numero Facto ſi reſtituantur tres illæ ciphræ ſepoſitæ, prodibit $939736404000 = 4085100 \times 230040$. Et pariter in aliis.

```
    40851  00
    23004  0
  ----------
    163404
  122553
 81702
 ------------
 939736404000
```

Ratio operationis ſatis eſt evidens. Si enim, verbi gratia, 300 per 20 multiplicare oporteat; &, ſepoſitis ciphris, ducantur 3 in 2 habebitur $6 = 3 \times 2$. Et, reſtitutis ciphris,

6000 = 300 × 20. Nam, ſi bis 3, ſint 6; erunt bis 30 decies 6, hoc eſt, 60; & bis 300 decies 60, hoc eſt, 600; & deniq; ſi bis 300 ſint 600, erunt vicies 300 (ſive bis decies 300) decies 600, hoc eſt, 6000. Quælibet enim adjecta ciphra numerum cui adjicitur decuplum facit. Et pariter in aliis ejuſmodi multiplicationibus quibuſcunq;.

300
20
6000

Atq; hinc liquet, tantundem prorſus valere ſive 2 ducantur in 3000, ſive 20 in 300, ſive 200 in 30, ſive deniq; 2000 in 3; quippe in ſingulis emergit numerus 6000. ut patet. Et pariter in ſimilibus.

3000	300	30	3
2	20	200	2000
6000	6000	6000	6000

Atq; hactenus quidem de numeris integris invicem multiplicandis dixiſſe ſufficiat.

Partium decimalium multiplicatio.

Siquando numeris integris annecti contigerit partes aliquot decimales, ſive (quod idem eſt) loci aliquot infra unitatis locum deſcendentes, eadem omnino erit operationis methodus atq; in numeris integris: cum hoc ſolo diſcrimine, quòd poſtquam numerus productus eodem plane modo invenitur acſi eſſent numeri omnino integri, tandem tot loci in numero facto lineâ ſeparatrici ſunt abſcindendi, ut partes decimales, quot erant in utroq; ſimul Factore ſic abſciſſi.

Exſempli gratia, Si numerus 365|25 ducendus eſſet in 3|5. Poſtquam (quaſi eſſent plane integri) invenerim productum 1278375 = 36525 × 35; tandem, quia in factoribus video tres locos partium decimalium (duos nempe in multiplicando, & unum in multiplicatore,) tres ultimas producti figuras linea ſeparatrice abſcindo ut partes decimales: adeoq; habeo 1278|375 = 365|25 × 3|5.

365|25
3|5
182,625
1095,75
1278|375

Atq; idem in aliis partium decimalium multiplicationibus obſervandum erit.

Ratio hujus operationis hæc eſt. Quoniam, ut numerus quilibet, adjectione ciphræ in fine, decuplo augetur; promotâ nempe qualibet figura in locum proxime ſuperiorem, ut quæ prius unitates ſignificabat, jã ſignificet decades, & ſic de reliquis: ita

ita figuræ finalis abſciſſione linea ſeparatrice, numerus decuplo minuitur; detruſa nempe figura qualibet in locum proxime inferiorē, ut quæ prius decades ſignificabat, jam ſignificet unitates, & ſic de reliquis. Puta, ſi numero 35 adjiciatur ciphra, fiet 350 decuplo major; ſin ab eodem 35 abſcindatur lineâ ſeparatrice figura ultima, erit 3|5 decuplo minor. Et ſimiliter judicandum erit ubi duæ, tres, aut plures adjiciuntur ciphræ, aut totidem abſcindantur loci decimales; nempe numerus centuplo, millecuplo, &c. adjectione augetur, vel ablatione minuitur. Adeoq; in exſemplo propoſito cum 365|25 ſit centuplo minor quam 36525, erit etiam 365|25 × 35 centuplo minor quam 36525 × 35; cumq; etiam 3|5 ſit decuplo minor quam 35, erit 365|25 × 3|5 decuplo minor quam 365|25 × 35, adeoque decies-centuplo, hoc eſt millecuplo, minor quam 36525 × 35. Cum igitur ſit 1278375 = 36525 × 25, abſcindendæ ſunt lineâ ſeparatrice tres ultimæ figuræ ut numerus fiat millecuplo minor, nempe 1278|375 = 365|25 × 3|5; adeoq; figura 8 quæ prius ſignificabat tot millia, jam ſignificat non niſi totidem Unitates, & ſic de reliquis.

Atq; hæc etiam ſufficiant de partibus decimalibus multiplicandis.

Tandem & hanc libet (ex Oughtredo) regulam generalem proponere, quæ in ſuos aſſignando numeris multiplicatione factis locos, ſive in numeris integris, ſive etiam partibus decimalibus, dirigat. *De Indice numeri facti.* Cum ſuos cuiq; locó indices aſſignavimus, ita nempe ut Unitatis locus indicem habeat 0 (ut qui neq; aſcendit neq; deſcendit) loci autem ſupra illum aſſcendentes primus, ſecundus, tertius, &c. indices habeant affirmativos, 1, 2, 3. &c. & contra loci deſcendentes primus, ſecundus, tertius, &c. indices habeant negativos −1, −2, −3, &c. *Index cujuſq; particularis Facti in multiplicatione, æquatur indicibus utriuſq; Factoris ſimul ſumptis.* Exſempligratia, ſi multiplicandus ſit numerus 32|1 in 5|24. Multiplico primum 4 in 1 (quorum indices −2 & −1) & factus eſt 4 (= 1 × 4) ponendus loco tertio deſcendente, cujus index eſt −3, æqualis duobus −2 & −1. Tum 4 × 2 (quorum indices −2 & 0) factus eſt 8, loco ſecundo deſcendente ponendus, cujus index −2 = 2 + 0. Tum 4 × 3 (quorum indices −2 & +1) factus eſt 12, ponendus (nempe quoad ultimam ipſius figuram 2) loco deſcendente pri-

mo cujus index $-1 = -2+1$. Deinde 3×1 (quorum indices -1 & -1) factus 3, indicem habet $-2 = -1 -1$, ideoq; ponendus loco deſcendente ſecundo. Sic 3×2, factus 6, indicem habet $-1 = -1+0$, ponendus loco deſcendente primo. Et $3+3$, factus 9, cujus index $0 = -3+3$, ponendus loco Unitatum. Deniq; 5×1, factus 5, cujus index $-1 = 0-1$, ponendus loco deſcendente primo. Et 5×2, factus 10, indicem habet $0 = 0+0$, ideoq; ad locum unitatum referendus, nempe ipſius ultima figura 0 illic collocanda, & reliqua 1 in locum proximum transferenda. Et tandem $5+3$, factus eſt 15 (cui ſi addatur 1, figura huc tranſmiſſa, fit 16,) cujus index $1 = 0+1$, adeoq; ad locum primum aſſcendentem ſpectat. Quibus abſolutis, ſi additione colligantur in unam ſummam, & totius multiplicationis factus, 171|414, cujus index -3 (quoad ultimam ipſius figuram æſtimandus) æqualis duobus ſimul indicibus -2 & -1, nempe utriuſq; factoris 32|1 & 5|34. Et ſimiliter in aliis hujuſmodi multiplicationibus quibuſcunq;.

```
   1. 0. 1̄. 2̄.
   32|1
    5|34
  ----------
    1,284
    9,63
  160,5
  ----------
  171,414
```

Atq; hactenus de multiplicatione tam numerorum integrorum, quam partium decimalium. Multiplicatio Algebrica & Specioſa, ut & quantitatum ex variis denominationibus conſtantium, deinceps tradetur poſt Diviſionis traditionem; quam ſequente Capite aggredior.

CAP. XIX.

De Diviſione. Quid ſit Diviſio, Dividendus, Diviſor, Quotiens. Diviſio ſenſu ſtricto, & ſenſu lato, ſumpta. Non ſemper numerum diviſum minuit. Diviſio eſt multiplex ſubductio. Diviſionis praxis: per diviſorem ſimplicem; per diviſorem compoſitum. Diviſionis praxis in partibus decimalibus. De Indice Quotientis, ſive numeri orti.

EXpoſita in præcedentibus Multiplicationis tam natura quã praxi; ad *Diviſionem* explicandam accedendum eſt.

Eſt

Eſt autem Dividere, *Numerum quemvis datum in quotlibet æquales partes dirimere*; ſive *Numerum invenire, qui doceat quoties numerus quivis datus in dato quovis continetur*. Vel (ſi libet non ad ſolos numeros, ſed ad alias etiam Diviſiones vocem extendere) *Dividere*, eſt *datam quamlibet quantitatem in data ratione diminuere*; vel potius *Duarum ad invicem quantitatum homogenearum rationem invenire*. Nam ut Subductione quantitatum homogenearum *Differentiam*, ita Diviſione earundem *Rationem* inveſtigamus. *Diviſio, quid?*

Sed de Numerorum Diviſione præſertim agendum eſt, quò vocis illa ſignificatio primario refertur, ad alias autem non niſi analogicè applicatur.

In numerorum vero diviſione, duos habemus numeros datos, nempe *Dividendum* qui in partes aliquot æquales dirimendus eſt; & *Diviſorem* ſive Dividentem, qui numerum partium denotat in quas ſupponitur ille dirimendus: quibus datis, tertius quæritur, quem *Ortum* dicunt, ſive *Quotientem*, oſtendit enim quoties diviſor in dividendo continetur, ſive (quod eodem recidit) quoties ex illo auferri poteſt. *Dividendus, Diviſor, Quotiens.*

Sic ſi numerus 12 in 3 partes ſit dirimendus, numerus *Ortus* ſive *Quotiens* (puta 4) oſtendit unius trientis valorem: vel etiam oſtendit quoties *Diviſor* 3, in *Dividendo* 12, continetur. Ita ſi numerus 20 dividendus ſit per (diviſorem) 4, ſive partiendus ſit in 4 partes, vel ſi 4 dividat 20, vel deniq; ſi quæratur quoties in 20 contineatur 4, aut quoties inde auferri poſſit: Numerus ortus ſive quotiens, puta 5, oſtendit quanta ſit iſtius numeri pars quarta ſeu quadrans, hoc eſt, ſi ſupponatur numerus 20 in 4 æquales partes dividi, quanta ſit earum quælibet, nempe 5; vel quoties in 20 contineantur 4, aut quoties inde auferri poſſit, nempe quinquies.

Diviſionis autem operationem (ſive perfectam, ſive perficiendam, ſolemus ſic indicare $\frac{12}{3}$; quod notat numerum 12 per 3 diviſum vel dividendū; vel etiā 3)12(4; quod notat numerum 12 per 3 diviſum, ejuſq; quotientem eſſe 4. Et ſimiliter in aliis.

Quod vero tantundem ſit inquirere Quoties in 12 contineantur 3? atq; Quantus ſit numeri 12 pars tertia ſive triens? (& pariter in ſimilibus;) hac facili demonſtratione oſtendatur. Statuantur in totidem columnis, ſive ſeriebus erectis, tot punctorum triades ſive terniones, quot opus eſt ad complendum numerum 12, (puta 4;) quo facto, numerus colum-



columnarum ſimul oſtendit, quoties in 12 contineantur 3 (toties nempe quot ſunt ipſæ columnæ,) atq; etiam quot puncta ſunt in qualibet ſerie tranſverſa, hoc eſt, in quolibet totius numeri triente; (tot enim ſunt tranſverſæ ſeries quot ſunt cujuſlibet erectæ puncta, adeoq; quælibet ſeries tranſverſa eſt totius numeri triens;) tot autem ſunt cujuſlibet tranſverſæ puncta, quot eſt ſerierum erectarum numerus, cum harum quælibet tranſverſarum cuilibet unum ſubminiſtret punctum, ut patet.

Eſt autem Diviſio eodem fere modo Multiplicationi oppoſita quo Additioni Subductio. Ut enim quæ Additio componit Subductio reſolvit; ita quod Multiplicatione componitur, id reſolvitur Diviſione. Sic, ubi ex additis 3 & 4 fiunt 7; ſi ex 7 alterutrum auferas, alterum prodibit. Ita, ubi ex multiplicatis 3 in 4 fiunt 12; ſi 12 per alterutrum dividas alterum prodibit. Utrobiq; quod componendo ex ſuis componentibus conflatur, id reſolvendo in ſua componentia reſolvitur.

$$3 + 4 = 7 \qquad 3 \times 4 = 12$$
$$7 - 3 = 4 \qquad 3)\,12\,(4 \quad \tfrac{12}{3} = 4$$
$$7 - 4 = 3 \qquad 4)\,12\,(3 \quad \tfrac{12}{4} = 3$$

Nempe, quæ in Subductione ſunt Ablatum & Reſiduum, ea in Additione ſunt Integri Membra: & quæ in Diviſione ſunt Diviſor & Quotiens, ea in Multiplicatione ſunt Factores.

Græcè dici ſolet Μερισμὸς *diviſio*, & μερίζειν *dividere*. Apud Euclidem interim paſſim μέτρον, μετρεῖν, μετρούμενος, idem ſunt atq; *Diviſor, dividere, diviſus* ſive *dividendus*, & numerus καθ' ὃν μετρεῖται *quotiens* eſt. Sic 9 d 7 *Numerus pariter par* definitur ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος κατ' ἄρτιον ἀριθμόν. *Qui a numerò pari per parem menſuratur*, ſive *quem numerus par per parem metitur*; nempe, qui ita per Diviſorem parem dividi poteſt, ut & quotientem parem habeat.

Diviſio ſtricte ſumpta. Notandum autem eſt, apud Euclidem, non numerum quemvis alium quemlibet καταμετρεῖν *dividere* vel *metiri* poſſe; ſicut nec a quovis numero quilibet auferri poteſt, (puta major ex minore:) Cum enim ille de veris tantum numeris & propriè dictis (integros intellige) verba facit, qui ex Unitatibus componuntur; adeoq; Unitatem ſemper habet pro indiviſibili, quodq; eſt, in numeris, minimum quod ſit: non raro occurrit numerus qui in imperatas partes dividi non poteſt. Adeoq;

numerus

numerus ille ſolus alterum Dividere ſive Metiri apud Euclidem dicendus erit, qui eſt ipſius *aliquota pars*, ſeu qui aliquoties poſitus Dividendum æquet; quoties autem ponendum eſt ut æquet numerum dividendum, id diviſione quæritur. Verbi gratia, ſi dividatur numerus 12 per 3, ſive quæratur quoties ponendus numerus 3 ut æquet numerum 12, Quotiens erit 4; quia nempe numerus 3 quater poſitus æquabit numerum 12. At ſi proponatur numerus 10 per 3 dividendus; id quidem fieri non poteſt, cum hic illius non ſit aliquota pars, nec aliquoties repetitus ipſum æquabit; nam ter poſitus ($3\times3=9$) minor eſt, & quater poſitus $3\times4=12$) major eſt quam 10; atq; inter 3 & 4 non alius intercedit numerus, qui ſit Quotiens quæſitus. Atq; idem continget quotieſcunq; propoſitus Diviſor non eſt numeri Dividendi aliquota pars.

Atq; hoc quidem intereſt inter Arithmeticas operationes Syntheticas & Analyticas. Nempe, in Syntheticis, veris numeris datis verus ſemper numerus emerget; at non ita in Analyticis. Puta, in Additione $5+4=9$, $3+4=7$, &c. Et ſimiliter continget quicunq; ſint numeri dati addendi: At in ſubductione, quamquam illud aliquando contingit, ut $5-4=1$, &c; non tamen id ſemper, nam $3-4$ æquabitur nulli vero numero poſſibili, cũ majus ex minori auferri non poſſit; ſolemus tamen ejuſmodi ſuppoſititiam ſubductionem utcunq; innuere ad hanc formam $3-4$, vel etiam -1. Sic, in multiplicatione, propoſitis quibuſcunq; veris numeris invicem multiplicandis, verus ſemper emergit numerus, ut $4\times2=8$, $3\times6=18$, $5\times3=15$, &c. At in Diviſione, licet illud aliquando contingit, ut 2) 4 (2; non raro tamen ſecus accidit, ut ſi 3 per 6, aut 5 per 3, dividendi eſſent, ubi quotientes nullis veris numeris (integris) aſſignari poſſunt; ſolemus tamen & hic ſuppoſititios illos quotos utcunq; innuere ad hanc formam $\frac{3}{6}$ vel $\frac{1}{2}$, & $\frac{5}{3}$ vel $1\frac{2}{3}$, &c. Et ſimiliter in Poteſtatibus componendis & reſolvendis, contingit; dati enim cujuſq; veri numeri Quadratum, Cubus, &c. veris numeris exhibebitur; at non item dati cujuſq; numeri Radix quadratica, cubica, &c. veris numeris exhiberi poterit: ut ſuo loco patebit.

Verum ut multiplicatio, laxiori ſenſu ſumpta, non ad illam ſolummodo reſtringitur ubi Factus eſt numeri propoſiti Multiplus; ita nec Diviſio ita reſtringi ſolet ut Diviſor neceſſario ſit Dividendi aliquota pars; quamquam iſtiuſmodi & Multiplicationem *Diviſio laxiori ſenſu accepta.*

cationem & Diviſionem voces illæ primariâ & maxime propria ſua ſignificatione innuant. Et quo ſenſu numeri fracti pro numeris habentur eodem & pro Factoribus in Multiplicatione, & in Diviſione pro Diviſore vel Quotiente haberi poſſunt. Itaq; & hoc ſenſu, quilibet numerus (ſive integer ſive etiam fractus) numerum quemlibet dividere poterit.

Adeoq;, ut rem paucis comprehendam, cum ſenſu ſtrictiori ſumantur, *Multiplicatio quærit numeri dati multiplum; diviſio aliquotam partem*: cum ſenſu vero laxiori uſurpantur, dicenda potius eſt *Multiplicatio, quantitati aliam in data ratione exhibere*; ſive *quantitatem, quæ ad datam datam habeat rationem, inveſtigare: Diviſio* verò, *datis duabus quantitatibus homogeneis earum ad invicem rationem inveſtigare*. Neq; interim aliquem terreat, quod hoc laxiori ſenſu eadem operatio utrovis ad libitum nomine appellari poſſit, nam illud omnino concedendum eſt, cum perinde ſit omnino Multiplicare per 3, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, &c. atq; dividere per $\frac{1}{3}$, 2, $\frac{3}{2}$, &c. ut ſuo deinceps loco clarius patebit. Quod eò minus mirandum eſt, cum & idem in aliis oppoſitis operationibus contingat; utpote in Additione & Subductione, cùm perinde omnino eſt ſive addamus 2, −3, 4, &c. ſive ſubducamus −2, 3, −4, &c. ut ex ſupra dictis patet.

Diviſio non ſemper numerum minuit. Interim monendum eſt, quod, ut multiplicatione (laxiori ſenſu ſumptâ) non ſemper augetur quantitas multiplicata, ſed aliquando vel eadem manet vel etiam minuitur: ſic diviſione (laxiori item ſenſu ſumpta) non ſemper minuitur quantitas diviſa, ſed vel eadem manet vel etiam augetur. Nempe, quoties Diviſor eſt unitate major, Quotiens erit numero dividendo minor; quoties autem Diviſor eſt unitate minor, Quotiens erit numero dividendo major, ſi deniq; Diviſor ſit unitas, Quotiens numerô dividendo æqualis erit. Ratio manifeſta eſt. Cùm enim numerus Dividendus oſtendat quoties ipſe contineat unitatem; Quotiens autem, quoties idem dividendus contineat diviſorem: Si diviſor ſit unitate major, puta 2; manifeſtum eſt quotientem numero dividendo minorem eſſe, cum eodem numero dividendo pauciores continentur binarii (δυάδες) quam unitates: ſin diviſor ſit unitate minor, puta $\frac{1}{2}$; manifeſtum item eſt quotientem numero dividendo futurum majorē, cum numerus dividendus plures contineat ſemiſſes quam integras unitates: ſi deniq; Diviſor ſit unitas, quotiens erit numero dividendo

dendo æqualis; toties enim dividendus diviſorem continebit quoties continet unitatem.

Atq; huc ſpectat quod apud Arithmeticos paſſim occurrit, Dividendum toties continere Diviſorem, quoties Ortus ſeu Quotiens continet Unitatem; vel, eandem eſſe rationem Dividendi ad Diviſorem, quæ eſt Quotientis ad Unitatem: Item, Dividendum toties continere Quotientem, quoties Diviſor continet Unitatem; vel, eandem eſſe rationem Dividendi ad Quotientem, quæ eſt Diviſoris ad Unitatem. Nam & hoc ſciendum eſt (quod & ex prædictis ſatis patet,) ut in Multiplicatione perinde eſt utrumvis è Factoribus Multiplicandum ſive Multiplicatorem dicamus, adeo ut ſi hic dicatur Multiplicandus ille erit Multiplicator, & contrà; Sic in Diviſione de Diviſore & Quotiente contingit, qui alternatim ſedes mutabunt, ut ſi duorum componentium hic ſit diviſor erit ille Quotiens, & contra, ſi ille Diviſor hic quotiens erit. Puta, cum in multiplicatione 3 & 4 invicem ducti conſtituant 12; ſi 3 dicatur multiplicandus, erit 4 multiplicator; & contra, ſi 4 ſit multiplicandus, multiplicator erit 3. Si autem idem numerus 12, per 3 dividatur, quotiens erit 4; ſin diviſor ſit 4, quotiens erit 3. Et quidem in omni diviſione, ſi qui prius fuerat quotiens fiat Diviſor, qui fuerat Diviſor fiet Quotiens.

$3 \times 4 = 12$	3) 12 (4	$\frac{12}{3} = 4$
$4 \times 3 = 12$	4) 12 (3	$\frac{12}{4} = 3$

Deniq;, ut de Multiplicatione monuimus, nempe eam vix aliud eſſe quam multiplicem Additionem, ſive additionis compendium; ita & de Diviſione monendum, eam quippe vix aliud eſſe (ſaltem cum Diviſor eſt numerus integer) quam multiplicem ſubductionem, ſive ſubductionis compendium. Qui quærit enim, quoties numerus 12 contineat 3; idem facit ac qui quærit, quoties ex 12 ſubduci poſſint 3: Qui igitur continuâ ſubductione invenerit, quoties poſſint 3 ex 12 auferri, ita ut nihil reſtet; invenit etiam eâdem opera quoties 3 in 12 præciſe contineantur; quod ipſum eſt 12 per 3 dividere, ut ex prædictis liquet. Sic ſi ex 12 punctis appoſitis, 3 quoties fieri poſſit ſubducantur, patebit poſt quatuor ſubductiones nihil ſupereſſe. Quot autem ſubducta ſunt, tot prius aderant;

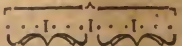
Diviſio eſt multiplex ſubductio.

...|...|...|...

 adeoq;

adeoq; cum nihil ſuperſit, manifeſtum eſt 3 in 12 præciſe quater contineri, (quod ipſum diviſione quæritur,) vel etiam trientem numeri 12 eſſe 4, (ut ſupra oſtenſum eſt;) nempe ſi 12 per 3 dividatur, quotiens erit 4.

Quiq; hæc ſatis intelligit, is genuina diviſionis fundamenta perſentiſcit. Cum enim infiniti prope laboris eſſet in diviſionibus majoribus tot ſubductiones ſigillatim peragere, quot numero dividendo grandiori penitus exhauriendo ſufficiant; excogitarunt Arithmeticæ practicæ magiſtri, laboris magni magnum compendium; nempe *pro multiplici Diviſoris ſubductione, ſubducunt diviſoris Multiplum;* quod eodem plane recidit. Sic in exſemplo præcedente, ubi numerus 12 per 3 dividendus proponitur; perinde eſt ſive ternionem (τριάδα) quater ſubducamus, ſive ternionis quadruplum, (quia $3+3+3+3=3\times 4$,) & utrumvis fiat nihil reſtabit.



Quod & ipſum fieret ſi ternarii duplum bis ſubducamus; aut etiam triplum ternarii ſemel & ſemel ipſum ternarium. nempe $3\times 3+3\times 1=3\times 2+3\times 2=3\times 4=3+3+3+3=12$.

Quo major autem fuerit numerus dividendus, & quotiens, eo magis patebit hujuſce compendii utilitas. Si 20 ſint per 2 dividenda; pro decem ſubductionibus numeri 2, ſubſtituenda eſt iſtius decupli ſubductio; nam $2\times 10=20$. Si 360 dividenda per 6; pro ſexaginta ſubductionibus numeri 6, ſemel ſubducendum erit ipſius ſexagecuplum. Et ſimiliter in aliis.

2)20(10

6)360(60

Diviſionis operatio.

Atq; hactenus quidem diviſionis naturam ſatis explicaſſe videar; ejuſq; cum Multiplicatione comparationem. Sequitur ipſius praxis exponenda.

Per diviſorem ſimplicem.

Si Diviſor ſimplex ſit, una figura ſcriptus, & dividendus item ſit diviſoris decuplo minor; ex ipſa memoria petenda eſt ſolutio; vel, ſi opus eſt; ex eâ quam ſupra exhibui Multiplicationis & Diviſionis Tabella. Nempe, reperto in Tabellæ ſummitate Diviſore, in eâdem columna quæratur numerus dividendus, vel ſaltem numerus qui illic occurrit Dividendo proxime minor, & habebitur ad latus numerus in quotiente ponendus. v.g. Si quæratur

quæratur quoties in 24 contineantur 3. Repertis in ſummo 3,

Tabella Multiplicationis & Diviſionis.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

3) 24 (8

3) 26 (8$\frac{2}{3}$

& infra 24, habebitur ad latus numerus 8, in quotiente ponendus: quippe in 24 octies præciſe continentur 3: nam $3 \times 8 = 24$. Unde patet numerum 3, numeri 24 eſſe partem aliquotam, nempe octavam. Si 26 per 3 dividenda ſint; in columna tertia (ubi in fronte 3,) & ſerie tranſverſa octavâ, reperiuntur, non 26, ſed 24, binario minor, & ad latus 8; quod indicium eſt Dividendum 26, continere diviſorem 3 octies, atq; inſuper 2: vel ex Dividendo 26, octies auferri poſſe diviſorem 3, atq; inſuper reſtare 2. Hoc reſiduum, cum ſubjecto ſibi diviſore, & interjecta lineolâ, invento quotienti 8 poſtpono, ut habeatur perfectus quotiens 8$\frac{2}{3}$. Quod etiam indicat numerum 3 numeri 26 aliquotam partem non eſſe, cum hic illum contineat pluſquam octies, & minus quam novies.

Si vero numerus Dividendus non ſit decuplo Diviſoris minor, gradatim procedendum eſt, & varia multipla ſucceſſivè ſubducenda; poſito primum Diviſore ſub dividendi gradu ſupremo, ſeu ad ſiniſtram primo, (ſaltem ſi diviſor non ſit major figura Dividendi eo gradu poſita,) & deinceps ſucceſſive in reliquos locos promoto, uſq, dum ad locum infimum tandem perveniatur; in ſingulis interim locis ſublato quoties fieri

poteſt Diviſore, ſeu, quod idem eſt, ſublato diviſoris multiplo quam fieri poteſt amplo, e numeris dividendi ſuprapoſitis, notato ubiq; ſiquod ſit reſiduo; numero item ſubductionum in quolibet gradu factarum, ſive multipli ſubducti denominatore, ſeorſim in Quotiente notato; quorum omnium, reſpectu ad ſuos gradus habito, collectio (reſiduo, ſiquid operatione perfecta ſuperſit lineolæ ut dictum eſt ſuprapoſito, cui ſubſcribatur ipſe Diviſor,) integrum quotientem conſtituet: ſicut & multiplorum omnium ſubductorum aggregatum, ſi illa videbitur colligere, (adjecto interim ſiquid in fine ſuperſit reſiduo) reſtituet integrum Dividendum; ſi enim ſingula ſubducta reſtituantur, redibit numerus primo poſitus: Ipſeq; numerus Dividendus toties Diviſorem continet quoties indicat Quotiens, ſeu quoties ipſe quotiens continet unitatem, ut & Quotientem toties quoties Diviſor continet unitatem.

Exſempli gratia. Si numerus 486 ſit biſecandus, ſive in duas æquales partes dividendus; vel, ſi quæratur quoties in numero 486 contineatur numerus 2; hoc eſt, ſi dividere oporteat 486 per 2: Ponatur Diviſor 2, ſub figura diviſoris ad ſiniſtram prima, nempe ſub 4; & quæratur (vel ex memoriâ, vel ex tabella ſuprapoſita) quoties in 4 contineantur 2; quod quidem bis fit, nec ſæpius, (nam ipſius triplum, 2 × 3 = 6, majus eſt numero 4, adeoq; auferri non poteſt) notato igitur in quotiente numero invento 2, diviſoris duplum (quotuplum nempe indicat Quotiens) nempe 4 = 2 × 2, è numero 4 ſuprapoſito auferatur, & cum nihil reſtet utraq; figura (2 diviſoris, & 4 dividendi) deleantur, (ut quæ munus ſuum jam præſtiterint;) eſtq; hæc operatio prima. Deinde, promoto Diviſore in locum proximum, ſub Dividendi figurâ 8, eadem operatio (mutatis mutandis) repetenda eſt: nempe quæratur, quoties 2 in 8? & reſponſum 4 ponatur in quotiente (poſt numerum 2 iſtic prius poſitū) & Diviſoris quadruplum, 8 = 2 × 4, ex 8 (dividendi numero ſuprapoſito) auferatur, & cum nihil reſtiterit, deletis figuris 2 & 8, perfecta eſt operatio ſecunda.

```
2) 486 (2
   2
```

```
2) 486 (24
   22
```

Tandem, promoto in locum proximum diviſore, ad eandem formam præſtanda eſt operatio tertia; quæratur nempe, quoties 2 in 6? reſponſum 3 in quoti-

ente

ente ſcribatur, & Diviſoris triplum $6 = 2 \times 3$, ex numero 6 ſuprapoſito ablatum, nihil relinquit; adeoq;, deletis 2 & 6, cum nullæ ſuperſint aliæ Dividendi figuræ, peracta eſt tota diviſio; & repertus eſt Quotiens integer 243; qui propterea ſemiſſis eſt numeri 486; quippe toties in 486 reperitur numerus 2. Si autem plures adhuc ſuperfuiſſent in numero Dividendo loci, plures etiam eâdem plane methodo repetendæ eſſent operationes, quot opus eſſet.

2)486(243
  222

Si quis interim objiciat, figuram 4, centuriarum loco poſitam, atq; 8 poſitam in loco decadum, non tot ſimpliciter unitates, ſed illam 4 centurias, hanc 8 decades ſignificare, adeoq; 2 in 400 non bis ſed ducenties, & in 80 non quater ſed quadragies contineri. Verum quidem illud eſt: ſed & pariter verum eſt figuras 2 & 4 in quotiente poſitas, quanquam cum primum ſcriberentur, videri poſſunt tot ſimpliciter unitates notare, tamen ubi tota perficitur diviſio patet illam ducenta, & hanc octoginta, ſignificare; adeoq; non dicimus numerum 2 (diviſorem) in numero 486 (dividendo) contineri bis & quater & ter, ſed ducenties quadragies & ter. Et quidem in operatione prima, ſi locorum ratio habeatur, non ſimpliciter bis duo ex 4, ſed ducenties duo ex 400, ſive bis duas centurias ex quatuor centuriis; & in operatione ſecunda, non tam quater duo ex 8, quam quadragies duo ex 80, ſive quater duas decades ex 8 decadibus, ablata eſſe dicendum erit. Et ſimiliter in aliis quibuſcunq; diviſionibus.

Eodem modo, ſi 138240 per 3 dividamus; Diviſorem 3 (non quidem ſub 1, quia ipſo diviſore minor eſt, adeoq; 3 in 1 nullies continentur, & propterea in quotiente vel nihil ponendum eſſet, vel o ciphra, quæ hîc loci nulli eſſet uſui, cum nondum ſcriptam habeamus figuram ſignificativam, ſed) ſub figura proxima 3 ſubſcribo; &, cum 3 in 13 (figuris ſuprapoſitis) contineantur quater, ſcripto in quotiente 4, diviſoris quadruplum $12 = 3 \times 4$, ex 13 ſublatum, relinquit 1, quod reſiduum deletis 13 ſuperſcribo: Tum deletum etiam eò loci diviſorem, in proximum transfero; &, cum 3 in 18 contineantur ſexies, in quotiente poſt 4 ſubjungo 6, & diviſoris ſextuplum $18 = 3 \times 6$, ex ſupraſcrip-

  1
3)138240(46080
  33333

tis

mo cujus index $-1 = -2+1$. Deinde 3×1 (quorum indices -1 & -1) factus 3, indicem habet $-2 = -1 -1$, ideoq; ponendus loco deſcendente ſecundo. Sic 3×2, factus 6, indicem habet $-1 = -1 + 0$, ponendus loco deſcendente primo. Et $3 + 3$, factus 9, cujus index $0 = -3 + 3$, ponendus loco Unitatum. Deniq; 5×1, factus 5, cujus index $-1 = 0 - 1$, ponendus loco deſcendente primo. Et 5×2, factus 10, indicem habet $0 = 0 + 0$, ideoq; ad locum unitatum referendus, nempe ipſius ultima figura 0 illic collocanda, & reliqua 1 in locum proximum transferenda. Et tandem

$$
\begin{array}{r}
1.\ 0.\ \bar{1}.\ \bar{2}. \\
32\lfloor 1 \\
5\lfloor 34 \\
\hline
1,284 \\
9,63 \\
160,5 \\
\hline
171,414
\end{array}
$$

$5 + 3$, factus eſt 15 (cui ſi addatur 1, figura huc tranſmiſſa, fit 16,) cujus index $1 = 0 + 1$, adeoq; ad locum primum aſſcendentem ſpectat. Quibus abſolutis, ſi additione colligantur in unam ſummam, & totius multiplicationis factus, $171\lfloor 414$, cujus index -3 (quoad ultimam ipſius figuram æſtimandus) æqualis duobus ſimul indicibus -2 & -1, nempe utriuſq; factoris $32\lfloor 1$ & $5\lfloor 34$. Et ſimiliter in aliis hujuſmodi multiplicationibus quibuſcunq;.

Atq; hactenus de multiplicatione tam numerorum integrorum, quam partium decimalium. Multiplicatio Algebrica & Speciosa, ut & quantitatum ex variis denominationibus conſtantium, deinceps tradetur poſt Diviſionis traditionem; quam ſequente Capite aggredior.

CAP. XIX.

De Diviſione. Quid ſit Diviſio, Dividendus, Diviſor, Quotiens, Diviſio ſenſu ſtricto, & ſenſu lato, ſumpta. Non ſemper numerum diviſum minuit. Diviſio eſt multiplex ſubductio. Diviſionis praxis: per diviſorem ſimplicem; per diviſorem compoſitum. Diviſionis praxis in partibus decimalibus. De Indice Quotientis, ſive numeri orti.

Expoſita in præcedentibus Multiplicationis tam natura quã praxi; ad *Diviſionem* explicandam accedendum eſt.

Eſt

Eſt autem Dividere, *Numerum quemvis datum in quotlibet æquales partes dirimere*; ſive *Numerum invenire, qui doceat quoties numerus quivis datus in dato quovis continetur*. Vel (ſi libet non ad ſolos numeros, ſed ad alias etiam Diviſiones vocem extendere) *Dividere*, eſt *datam quamlibet quantitatem in data ratione diminuere*; vel potius *Duarum ad invicem quantitatum homogenearum rationem invenire*. Nam ut Subductione quantitatum homogenearum *Differentiam*, ita Diviſione earundem *Rationem* inveſtigamus. *Diviſio, quid?*

Sed de Numerorum Diviſione præſertim agendum eſt, quò vocis illa ſignificatio primario refertur, ad alias autem non niſi analogicè applicatur.

In numerorum vero diviſione, duos habemus numeros datos, nempe *Dividendum* qui in partes aliquot æquales dirimendus eſt; & *Diviſorem* ſive Dividentem, qui numerum partium denotat in quas ſupponitur ille dirimendus: quibus datis, tertius quæritur, quem *Ortum* dicunt, ſive *Quotientem*, oſtendit enim quoties diviſor in dividendo continetur, ſive (quod eodem recidit) quoties ex illo auferri poteſt. *Dividendus, Diviſor, Quotiens.*

Sic ſi numerus 12 in 3 partes ſit dirimendus, numerus *Ortus* ſive *Quotiens* (puta 4) oſtendit unius trientis valorem: vel etiam oſtendit quoties *Diviſor* 3, in *Dividendo* 12, continetur. Ita ſi numerus 20 dividendus ſit per (diviſorem) 4, ſive partiendus ſit in 4 partes, vel ſi 4 dividat 20, vel deniq; ſi quæratur quoties in 20 contineatur 4, aut quoties inde auferri poſſit: Numerus ortus ſive quotiens, puta 5, oſtendit quanta ſit iſtius numeri pars quarta ſeu quadraps, hoc eſt, ſi ſupponatur numerus 20 in 4 æquales partes dividi, quanta ſit earum quælibet, nempe 5; vel quoties in 20 contineantur 4, aut quoties inde auferri poſſit, nempe quinquies.

Diviſionis autem operationem (ſive perfectam, ſive perficiendam, ſolemus ſic indicare $\frac{12}{3}$; quod notat numerum 12 per 3 diviſum vel dividendũ; vel etiã 3)12(4; quod notat numerum 12 per 3 diviſum, ejuſq; quotientem eſſe 4. Et ſimiliter in aliis.

Quod vero tantundem ſit inquirere Quoties in 12 contineantur 3? atq; Quantus ſit numeri 12 pars tertia ſive triens? (& pariter in ſimilibus;) hac facili demonſtratione oſtendatur. Statuantur in totidem columnis, ſive ſeriebus erectis, tot punctorum triades ſive terniones, quot opus eſt ad complendum numerum 12, (puta 4;) quo facto, numerus



colum-

columnarum ſimul oſtendit, quoties in 12 contineantur 3 (toties nempe quot ſunt ipſæ columnæ,) atq; etiam quot puncta ſunt in qualibet ſerie tranſverſa, hoc eſt, in quolibet totius numeri triente; (tot enim ſunt tranſverſæ ſeries quot ſunt cujuſlibet erectæ puncta, adeoq; quælibet ſeries tranſverſa eſt totius numeri triens;) tot autem ſunt cujuſlibet tranſverſæ puncta, quot eſt ſerierum erectarum numerus, cum harum quælibet tranſverſarum cuilibet unum ſubminiſtret punctum, ut patet.

Eſt autem Diviſio eodem fere modo Multiplicationi oppoſita quo Additioni Subductio. Ut enim quæ Additio componit Subductio reſolvit; ita quod Multiplicatione componitur, id reſolvitur Diviſione. Sic, ubi ex additis 3 & 4 fiunt 7; ſi ex 7 alterutrum auferas, alterum prodibit. Ita, ubi ex multiplicatis 3 in 4 fiunt 12; ſi 12 per alterutrum dividas alterum prodibit. Utrobiq; quod componendo ex ſuis componentibus conflatur,

$3+4=7$	$3\times4=12$	
$7-3=4$	$3)\ 12\ (4$	$\frac{12}{3}=4$
$7-4=3$	$4)\ 12\ (3$	$\frac{12}{4}=3$

id reſolvendo in ſua componentia reſolvitur. Nempe, quæ in Subductione ſunt Ablatum & Reſiduum, ea in Additione ſunt Integri Membra: & quæ in Diviſione ſunt Diviſor & Quotiens, ea in Multiplicatione ſunt Factores.

Græcè dici ſolet Μερισμὸς *diviſio*, & μερίζειν *dividere*. Apud Euclidem interim paſſim μέτρον, μετρεῖν, μετρούμενος, idem ſunt atq; *Diviſor, dividere, diviſus* ſive *dividendus*, & numerus καθ᾽ ὃν μετρεῖται *quotiens* eſt. Sic 9 d 7 *Numerus pariter par* definitur ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος κατ᾽ ἄρτιον ἀριθμόν. *Qui a numero pari per parem menſuratur, ſive quem numerus par per parem metitur*; nempe, qui ita per Diviſorem parem dividi poteſt, ut & quotientem parem habeat.

Diviſio ſtricte ſumpta. Notandum autem eſt, apud Euclidem, non numerum quemvis alium quemlibet καταμετρεῖν *dividere* vel *metiri* poſſe; ſicut nec a quovis numero quilibet auferri poteſt, (puta major ex minore:) Cum enim ille de veris tantum numeris & propriè dictis (integros intellige) verba facit, qui ex Unitatibus componuntur; adeoq; Unitatem ſemper habet pro indiviſibili, quodq; eſt, in numeris, minimum quod ſit: non raro occurrit numerus qui in imperatas partes dividi non poteſt. Adeoq;

numerus

numerus ille ſolus alterum Dividere ſive Metiri apud Euclidem dicendus erit, qui eſt ipſius *aliquota pars*, ſeu qui aliquoties poſitus Dividendum æquet; quoties autem ponendum eſt ut æquet numerum dividendum, id diviſione quæritur. Verbi gratia, ſi dividatur numerus 12 per 3, ſive quæratur quoties ponendus numerus 3 ut æquet numerum 12, Quotiens erit 4; quia nempe numerus 3 quater poſitus æquabit numerum 12. At ſi proponatur numerus 10 per 3 dividendus; id quidem fieri non poteſt, cum hic illius non ſit aliquota pars, nec aliquoties repetitus ipſum æquabit; nam ter poſitus ($3 \times 3 = 9$) minor eſt, & quater poſitus $3 \times 4 = 12$) major eſt quam 10; atq; inter 3 & 4 non alius intercedit numerus, qui ſit Quotiens quæſitus. Atq; idem continget quotieſcunq; propoſitus Diviſor non eſt numeri Dividendi aliquota pars.

Atq; hoc quidem intereſt inter Arithmeticas operationes Syntheticas & Analyticas. Nempe, in Syntheticis, veris numeris datis verus ſemper numerus emerget; at non ita in Analyticis. Puta, in Additione $5 + 4 = 9$, $3 + 4 = 7$, &c. Et ſimiliter continget quicunq; ſint numeri dati addendi: At in ſubductione, quamquam illud aliquando contingit, ut $5 - 4 = 1$, &c; non tamen id ſemper, nam $3 - 4$ æquabitur nulli vero numero poſſibili, cũ majus ex minori auferri non poſſit; ſolemus tamen ejuſmodi ſuppoſititiam ſubductionem utcunq; innuere ad hanc formam $3 - 4$, vel etiam -1. Sic, in multiplicatione, propoſitis quibuſcunq; veris numeris invicem multiplicandis, verus ſemper emergit numerus, ut $4 \times 2 = 8$, $3 \times 6 = 18$, $5 \times 3 = 15$, &c. At in Diviſione, licet illud aliquando contingit, ut 2) 4 (2; non raro tamen ſecus accidit, ut ſi 3 per 6, aut 5 per 3, dividendi eſſent, ubi quotientes nullis veris numeris (integris) aſſignari poſſunt; ſolemus tamen & hic ſuppoſititios illos quotos utcunq; innuere ad hanc formam $\frac{3}{6}$ vel $\frac{1}{2}$, & $\frac{5}{3}$ vel $1\frac{2}{3}$, &c. Et ſimiliter in Poteſtatibus componendis & reſolvendis, contingit; dati enim cujuſq; veri numeri Quadratum, Cubus, &c. veris numeris exhibebitur; at non item dati cujuſq; numeri Radix quadratica, cubica, &c. veris numeris exhiberi poterit: ut ſuo loco patebit.

Verum ut multiplicatio, laxiori ſenſu ſumpta, non ad illam ſolummodo reſtringitur ubi Factus eſt numeri propoſiti Multiplus; ita nec Diviſio ita reſtringi ſolet ut Diviſor neceſſario ſit Dividendi aliquota pars; quamquam iſtiuſmodi & Multipli- *Diviſio laxiori ſenſu accepta.*

cationem & Diviſionem voces illæ primariâ & maxime propria ſua ſignificatione innuant. Et quo ſenſu numeri fracti pro numeris habentur eodem & pro Factoribus in Multiplicatione, & in Diviſione pro Diviſore vel Quotiente haberi poſſunt. Itaq; & hoc ſenſu, quilibet numerus (ſive integer ſive etiam fractus) numerum quemlibet dividere poterit.

Adeoq; , ut rem paucis comprehendam, cum ſenſu ſtrictiori ſumantur, *Multiplicatio quærit numeri dati multiplum*; *diviſio aliquotam partem*: cum ſenſu vero laxiori uſurpantur, dicenda potius eſt *Multiplicatio, quantitati aliam in data ratione exhibere*; ſive *quantitatem, quæ ad datam datam habeat rationem*, *inveſtigare*: *Diviſio* verò, *datis duabus quantitatibus homogeneis earum ad invicem rationem inveſtigare.* Neq; interim aliquem terreat, quod hoc laxiori ſenſu eadem operatio utrovis ad libitum nomine appellari poſſit, nam illud omnino concedendum eſt, cum perinde ſit omnino Multiplicare per 3, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{1}$, &c. atq; dividere per $\frac{1}{3}$, 2, $\frac{1}{2}$, &c. ut ſuo deinceps loco clarius patebit. Quod eò minus mirandum eſt, cum & idem in aliis oppoſitis operationibus contingat; utpote in Additione & Subductione, cùm perinde omnino eſt ſive addamus 2, − 3, 4, &c. ſive ſubducamus − 2, 3, − 4, &c. ut ex ſupra dictis patet.

Diviſio non ſemper numerum minuit. Interim monendum eſt, quod, ut multiplicatione (laxiori ſenſu ſumptâ) non ſemper augetur quantitas multiplicata, ſed aliquando vel eadem manet vel etiam minuitur: ſic diviſione (laxiori item ſenſu ſumpta) non ſemper minuitur quantitas diviſa, ſed vel eadem manet vel etiam augetur. Nempe, quoties Diviſor eſt unitate major, Quotiens erit numero dividendo minor; quoties autem Diviſor eſt unitate minor, Quotiens erit numero dividendo major, ſi deniq; Diviſor ſit unitas, Quotiens numerô dividendo æqualis erit. Ratio manifeſta eſt. Cùm enim numerus Dividendus oſtendat quoties ipſe contineat unitatem; Quotiens autem, quoties idem dividendus contineat diviſorem: Si diviſor ſit unitate major, puta 2; manifeſtum eſt quotientem numero dividendo minorem eſſe, cum eodem numero dividendo pauciores continentur binarii (δυάδες) quam unitates: ſin diviſor ſit unitate minor, puta $\frac{1}{2}$; manifeſtum item eſt quotientem numero dividendo futurum majorē, cum numerus dividendus plures contineat ſemiſſes quam integras unitates: ſi deniq; Diviſor ſit unitas, quotiens erit numero dividendo

dendo æqualis; toties enim dividendus diviſorem continebit quoties continet unitatem.

Atq; huc ſpectat quod apud Arithmeticos paſſim occurrit, Dividendum toties continere Diviſorem, quoties Ortus ſeu Quotiens continet Unitatem; vel, eandem eſſe rationem Dividendi ad Diviſorem, quæ eſt Quotientis ad Unitatem: Item, Dividendum toties continere Quotientem, quoties Diviſor continet Unitatem; vel, eandem eſſe rationem Dividendi ad Quotientem, quæ eſt Diviſoris ad Unitatem. Nam & hoc ſciendum eſt (quod & ex prædictis ſatis patet,) ut in Multiplicatione perinde eſt utrumvis è Factoribus Multiplicandum ſive Multiplicatorem dicamus, adeo ut ſi hic dicatur Multiplicandus ille erit Multiplicator, & contrà; Sic in Diviſione de Diviſore & Quotiente contingit, qui alternatim ſedes mutabunt, ut ſi duorum componentium hic ſit diviſor erit ille Quotiens, & contra, ſi ille Diviſor hic quotiens erit. Puta, cum in multiplicatione 3 & 4 invicem ducti conſtituant 12; ſi 3 dicatur multiplicandus, erit 4 multiplicator; & contra, ſi 4 ſit multiplicandus, multiplicator erit 3. Si autem idem numerus 12, per 3 dividatur, quotiens erit 4; ſin diviſor ſit 4, quotiens erit 3. Et quidem in omni diviſione, ſi qui prius fuerat Quotiens fiat Diviſor, qui fuerat Diviſor fiet Quotiens.

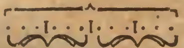
$3 \times 4 = 12$	$3)\,12\,(4$	$\frac{12}{3} = 4$
$4 \times 3 = 12$	$4)\,12\,(3$	$\frac{12}{4} = 3$

Deniq;, ut de Multiplicatione monuimus, nempe eam vix aliud eſſe quam multiplicem Additionem, ſive additionis compendium; ita & de Diviſione monendum, eam quippe vix aliud eſſe (ſaltem cum Diviſor eſt numerus integer) quam multiplicem ſubductionem, ſive ſubductionis compendium. Qui quærit enim, quoties numerus 12 contineat 3; idem facit ac qui quærit, quoties ex 12 ſubduci poſſint 3: Qui igitur continuâ ſubductione invenerit, quoties poſſint 3 ex 12 auferri, ita ut nihil reſtet; invenit etiam eâdem opera quoties 3 in 12 præciſe contineantur; quod ipſum eſt 12 per 3 dividere, ut ex prædictis liquet. Sic ſi ex 12 punctis appoſitis, 3 quoties fieri poſſit ſubducantur, patebit poſt quatuor ſubductiones nihil ſupereſſe. Quot autem ſubducta ſunt, tot prius aderant; *Diviſio eſt multiplex ſubductio.*

... | ... | ... | ...

adeoq;, cum nihil ſuperſit, manifeſtum eſt 3 in 12 præciſe quater contineri, (quod ipſum diviſione quæritur,) vel etiam trientem numeri 12 eſſe 4, (ut ſupra oſtenſum eſt;) nempe ſi 12 per 3 dividatur, quotiens erit 4.

Quiq; hæc ſatis intelligit, is genuina diviſionis fundamenta perſentiſcit. Cum enim infiniti prope laboris eſſet in diviſionibus majoribus tot ſubductiones ſigillatim peragere, quot numero dividendo grandiori penitus exhauriendo ſufficiant; excogitarunt Arithmeticæ practicæ magiſtri, laboris magni magnum compendium; nempe *pro multiplici Diviſoris ſubductione, ſubducunt diviſoris Multiplum*; quod eodem plane recidit. Sic in exſemplo præcedente, ubi numerus 12 per 3 dividendus proponitur; perinde eſt ſive ternionem (τριάδα) quater ſubducamus, ſive ternionis quadruplum, (quia $3+3+3+3=3\times 4$,) & utrumvis fiat nihil reſtabit.



Quod & ipſum fieret ſi ternarii duplum bis ſubducamus; aut etiam triplum ternarii ſemel & ſemel ipſum ternarium. nempe $3\times 3+3\times 1=3\times 2+3\times 2=3\times 4=3+3+3+3=12$.

Quo major autem fuerit numerus dividendus, & quotiens, eo magis patebit hujuſce compendii utilitas. Si 20 ſint per 2 dividenda; pro decem ſubductionibus numeri 2, ſubſtituenda eſt iſtius decupli ſubductio; nam $2\times 10=20$. Si 360 dividenda per 6; pro ſexaginta ſubductionibus numeri 6, ſemel ſubducendum erit ipſius ſexagecuplum. Et ſimiliter in aliis.

2)20(10

6)360(60

Atq; hactenus quidem diviſionis naturam ſatis explicaſſe videar; ejuſq; cum Multiplicatione comparationem. Sequitur ipſius praxis exponenda.

Diviſionis operatio.

Per diviſorem ſimplicem.

Si Diviſor ſimplex ſit, una figura ſcriptus, & dividendus item ſit diviſoris decuplo minor; ex ipſa memoria petenda eſt ſolutio; vel, ſi opus eſt; ex eâ quam ſupra exhibui Multiplicationis & Diviſionis Tabella. Nempe, reperto in Tabellæ ſummitate Diviſore, in eâdem columna quæratur numerus dividendus, vel ſaltem numerus qui illic occurrit Dividendo proxime minor, & habebitur ad latus numerus in quotiente ponendus. v.g. Si quæratur

quæratur quoties in 24 contineantur 3. Repertis in ſummo 3,

Tabella Multiplicationis & Diviſionis.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

& infra 24, habebitur ad latus numerus 8, in quotiente ponendus: quippe in 24 octies præciſe continentur 3: nam $3 \times 8 = 24$. Unde patet numerum 3, numeri 24 eſſe partem aliquotam, nempe octavam.

3)24(8

3)26($8\frac{2}{3}$

Si 26 per 3 dividenda ſint; in columna tertia (ubi in fronte 3,) & ſerie tranſverſa octavâ, reperiuntur, non 26, ſed 24, binario minor, & ad latus 8; quod indicium eſt Dividendum 26, continere diviſorem 3 octies, atq; inſuper 2: vel ex Dividendo 26, octies auferri poſſe diviſorem 3, atq; inſuper reſtare 2. Hoc reſiduum, cum ſubjecto ſibi diviſore, & interjecta lineolâ, invento quotienti 8 poſtpono, ut habeatur perfectus quotiens $8\frac{2}{3}$. Quod etiam indicat numerum 3 numeri 26 aliquotam partem non eſſe, cum hic illum contineat pluſquam octies, & minus quam novies.

Si vero numerus Dividendus non ſit decuplo Diviſoris minor, gradatim procedendum eſt, & varia multipla ſucceſſivè ſubducenda; poſito primum Diviſore ſub dividendi gradu ſupremo, ſeu ad ſiniſtram primo, (ſaltem ſi diviſor non ſit major figura Dividendi eo gradu poſita,) & deinceps ſucceſſive in reliquos locos promoto, uſq; dum ad locum infimum tandem perveniatur; in ſingulis interim locis ſublato quoties fieri

ente ſcribatur, & Diviſoris triplum $6 = 2 \times 3$, ex numero 6 ſupraposito ablatum, nihil relinquit, adeoq;, deletis 2 & 6, cum nullæ ſuperſint aliæ Dividendi figuræ, peracta eſt tota diviſio; & repertus eſt Quotiens integer 243; qui propterea ſemiſſis eſt numeri 486; quippe toties in 486 reperitur numerus 2. Si autem plures adhuc ſuperfuiſſent in numero Dividendo loci, plures etiam eâdem plane methodo repetendæ eſſent operationes, quot opus eſſet.

2)486(243
  222

Si quis interim objiciat, figuram 4, centuriarum loco poſitam, atq; 8 poſitam in loco decadum, non tot ſimpliciter unitates, ſed illam 4 centurias, hanc 8 decades ſignificare, adeoq; 2 in 400 non bis ſed ducenties, & in 80 non quater ſed quadragies contineri. Verum quidem illud eſt: ſed & pariter verum eſt figuras 2 & 4 in quotiente poſitas, quanquam cum primum ſcriberentur, videri poſſunt tot ſimpliciter unitates notare, tamen ubi tota perficitur diviſio patet illam ducenta, & hanc octoginta, ſignificare; adeoq; non dicimus numerum 2 (diviſorem) in numero 486 (dividendo) contineri bis & quater & ter; ſed ducenties quadragies & ter. Et quidem in operatione prima, ſi locorum ratio habeatur, non ſimpliciter bis duo ex 4, ſed ducenties duo ex 400, ſive bis duas centurias ex quatuor centuriis; & in operatione ſecunda, non tam quater duo ex 8, quam quadragies duo ex 80, ſive quater duas decades ex 8 decadibus, ablata eſſe dicendum erit. Et ſimiliter in aliis quibuſcunq; diviſionibus.

Eodem modo, ſi 138240 per 3 dividamus; Diviſorem 3 (non quidem ſub 1, quia ipſo diviſore minor eſt, adeoq; 3 in 1 nullies continentur, & propterea in quotiente vel nihil ponendum eſſet, vel o ciphra, quæ hîc loci nulli eſſet uſui, cum nondum ſcriptam habeamus figuram ſignificativam, ſed) ſub figura proxima 3 ſubſcribo; &, cum 3 in 13 (figuris ſuprapoſitis) contineantur quater, ſcripto in quotiente 4, diviſoris quadruplum $12 = 3 \times 4$, ex 13 ſublatum, relinquit 1, quod reſiduum deletis 13 ſuperſcribo: Tum deletum etiam eô loci diviſorem, in proximum transfero; &, cum 3 in 18 contineantur ſexies, in quotiente poſt 4 ſubjungo 6, & diviſoris ſextuplum $18 = 3 \times 6$, ex ſupraſcrip-

  1
3)138240(46080
  33333

tis 18 ſublátum, nihil relinquit: Et, deletis tam 3 quam 18, diviſorem in loco ſequente ſub 2 colloco: verum cum 3 in 2 ne ſemel contineantur, ſcriptá in quotiente ciphra 0, diviſorem (iſtic deletum) in locum adhuc proximum promoveo, ſub figura 4: Tum, quia 3 in 24 (figuris ſupraſcriptis) continentur octies, poſito in quotiente 8, diviſoris octuplum $24 = 3 \times 8$, ex 24 ſublatum, nihil relinquit: Deletis igitur 3 & 24, & poſito ſub 0 diviſore 3, invenio 3 in 0 nullies contineri, adeoq; & hic in quotiente ciphram colloco; & peracta eſt tota diviſio. Adeoq; reperio numeri 138240 trientem eſſe 46080, ſive toties in eo numero dividendo contineri diviſorem 3.

Reſidui notatio. Siquid autem, diviſore quoties fieri poteſt ſublato, aliquid Dividendi adhuc reſtiterit, (quod ipſo diviſore ſemper minus eſſe neceſſe eſt, ſecus enim poſſet diviſor ſaltem ſemel adhuc auferri,) poſt Quotientis numeros integros jam inventos adjungenda erit fractio, cujus numerator erit reſiduum illud, denominator verò ipſe Diviſor, (vel ſaltem alia fractio, quæ tantundem valebit, minoribus numeris ſcribenda,) ut habeatur Quotiens accuratus.

Ita ſi numerus 2603561 dividatur per *9*. Cum *9* in *26* bis contineantur, ſcripto in quotiente numero 2, & ſublatis $18 = 9 \times 2$ ex *26*, ſuperſunt 8. Tum, promoto diviſore, cum in 80 contineantur *9* octies, ſcripto in quotiente 8, & ſublatis $72 = 9 \times 8$ ex 80 reſtant ſuperius ſcribenda 8. Tum, promoto adhuc diviſore, cum *9* in 83 contineantur novies, ſcripto in quotiente *9*, & ſublatis $81 = 9 \times 9$ ex 83 reſtant 2. Tum, promoto diviſore, cum in 25 reperiantur *9* bis, ſcripto in quotiente 2, & ſublato diviſoris duplo $18 = 9 \times 2$ ex 25, ſuperſunt 7. Cumque, promoto diviſore, in 76 reperiantur octies novem, poſito in quotiente 8, & ex 76 ſublatis $72 = 9 \times 8$, reſtant 4. Deniq; cum, promoto diviſore, *9* in 41 reperiantur quater, poſito in quotiente 4, & ſubducto diviſoris quadruplo $36 = 9 \times 4$. ex 41, reſtabunt ſuperius notanda 5, & peracta eſt diviſio.

882745
2603561 (289284 $\frac{5}{9}$.
999999

Cum vero diviſione peracta ſuperſint adhuc 5, poſt quotientis numeros integros 289284 ſubjungo fractionem $\frac{5}{9}$; adeoq; liquet, diviſo numero 2603561 per *9*, quotientem accuratum eſſe 289284$\frac{5}{9}$; ſive numeri

2603561

2603561 partem nonam eſſe $289284\frac{5}{9}$; vel numerum 2603561, continere numerum 9, vicibus 289284, atq; inſuper $\frac{5}{9}$ (quinq; nonas partes) ejuſdem numeri 9: ipſum autem numerum $289284\frac{5}{9}$ (quotientem) præciſe 9 vicibus contineri in 2603561 numero dividendo. Et ſimiliter in aliis.

Quod autem, in exſemplis præmiſſis, ſingularum ſubductionum reſidua deletis Dividendi notis ſuperpoſuerim, ipſaq; ſubducta multipla nuſquam ſcripſerim; id majoris expeditionis cauſa factum eſt. Si cui vero libet omnia explicite contueri, poterit ille ad hanc formam præcedentem operationem peragere cum diviſor 9 in ſuprascriptis 26, bis contineatur, poſito in quotiente 2, & ſubſcripto diviſori 9 ipſius duplo 18; ex 26 ſubductis 18 manebunt 8, infra lineam ductam notanda; cui reſiduo adjungendæ dividendi figuræ adhuc intactæ (vel ſaltem earum quot opus eſt,) & promoto diviſore, ſecunda operatio ad eandem formam inſtituenda, nempe cum 9 in 80 contineantur octies, poſito in quotiente 8, & ſubſcripto octuplo, 72, his ex 80 ſubductis manebunt, 8, ductæ lineæ ſubſcribenda: Et ſic deinceps: uſq; dum tota operatione peracta, reperientur tandem reſtare 5. ut videre eſt. *Alia operationis forma.*

```
2603561 ( 289284 5/9
9
18
―――――――
 803561
 9
 72
―――――――
  83561
  9
  81
―――――――
   2561
   9
   18
―――――――
    761
    9
    72
―――――――
     41
     9
     36
―――――――
      5
```

Atq; hactenus de Diviſionis praxi, per Diviſorem ſimplicem (unica figura ſcriptum) peragendæ.

Si Diviſor compoſitus ſit, (pluribus notis ſcriptus,) operationis methodus, quamquam aliquanto magis intricata, iiſdem plane principiis nititur quibus præcedens. Nempe, Diviſore ſub tot quot opus eſt dividendi figuris ad ſiniſtram proximis ſubſcripto, ejuſq; multiplo quam fieri poteſt maximo ex iiſdem ſublato, (notato interim in quotiente iſtius multipli de- *Diviſionis operatio per diviſorem compoſitum.*

 nominatore

nominatore,) promovendus eſt Diviſor in locum proximum, & ſic deinceps quoties opus erit: totaq; operatio ut prius peragenda.

Exſempli gratia. Si 1290208 velim per 32 dividere. Diviſorem 32, non ſub Dividendi figuris 12 ſubſcribo, quia 32 in 12 ne ſemel continentur, ſed (omiſſa propterea figura prima) ſub duabus ſequentibus. Et quæro, quoties in 129 reperiuntur 32? vel, quo commodius illud aſſequar, per partes inquiro quoties in 12 reperiantur 3? quod cum quater fieri deprehendo (atq; interim, in reliquo 9, quater contineri 2,) in quotiente ſcribo 4, ipſiq; 32 ſubſcribo ipſius quadruplum 128, quod ubi ex 129 ſubduxerim reſtare video 1, cui ſubjunctis reliquis dividendi figuris nondum tactis, reliquum adhuc video 10208. Tum diviſore uno gradu promoto, cum videam 32 in 10 nullies contineri, in quotiente ſcribo 0, & deleto ibidem diviſore, uno adhuc gradu eundem promoveo (immutatis manentibus dividendi figuris 10208, cum inde nihil auferatur,) & quæro, quoties 32 in 102? ſive, quoties 3 in 10? reperiuntur autem 3 in 10 ter, & quod ſupereſt 1 cum ſequenti nota 2 facit 12 unde non dubito quin 2 (reliqua diviſoris figura) poſſit ſaltem ter auferri; adeoq; in quotiente ſcribo 3, & diviſori 32 ipſius triplum 96: quod ubi ex ſuprapoſitis 102 ſubduxerim video reſtare 6, eiq; figuræ (alias adhuc intactas) 08 ſubjungo. Tum, promoto diviſore, quæro quoties 32 in 60, vel (per partes) quoties 3 in 6, & invenio bis contineri 3 in 6; at interim cum videam nihil supereſſe unde reliquam figuram 2 bis auferam, ſcio totum 32 non niſi ſemel ex 60 auferri poſſe; ideoq; in quotiente ſcribo 1. ipſumq; diviſorem 32 ex 60 ſemel aufero, & reſtant 28, quibus 8 (figuram intactam) adjungo: Et, promoto diviſore, cum 32 reperiam in 288 novies contineri, ſcripto in quotiente 9, & diviſori, ſubſcripto ipſius noncuplo $288 = 32 \times 9$

```
1290208 (40319
32
128
-------------
 10208
 32
  32
  96
-------------
   608
    32
-------------
   288
    32
   288
-------------
    00
```

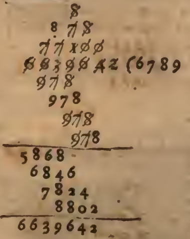
×9; ubi hoc ex 288 ſubduxerim invenio nihil reſtare; adeoq;, cum nullæ adhuc ſuperſint Dividendi figuræ, totam operationem peractam eſſe liquet, & quotientem repertũ eſſe 40319 præciſè.

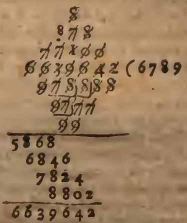
Ita ſi 6639642 per 978 dividatur. Operatione ut in præcedentibus peracta, reperietur quotiens 6789. ut videre eſt.

Vel etiam, ſi libet, reſidua ſuperne notari poſſunt, atq; interim ſingula diviſoris multipla ſeorſim ſuis locis ſcribi, ipſis Diviſoris repetitionibus non intermiſſa: ad hanc quæ videtur formam.

Alia operationis forma.

```
6639642 (6789
978
5868
-----
7716
978
6846
-----
8704
978
7824
-----
8802
978
8802
-----
00
```





Ubi, cum (propter quotientis primam figuram 6) diviſoris (978) ſextuplum 5868 ex Dividendi numeris ſupra poſitis 6639 ſubductum ſit, reſiduum ſuperius notatum erit 771. Tum ex 7716 ſubducto diviſoris ſeptuplo 6846, reſiduum (ſuperne notatum) erit 870. Tum ex 8704 ſubducto diviſoris octuplo 7824, reſiduum erit 8802. Atq; hinc deniq; ſubducto diviſoris noncuplo, 8802, nihil reſtabit. Adeoq; perfecta eſt tota diviſionis operatio, & quotiens eſt 6789. Si autem, per-

acta operatione, placeat omnia hæc multipla in unam ſummam colligere,(ſimul cum finali reſiduo ſiquod fuerit,) erit ea numero dividendo æqualis; nempe, omnia ablata (ſimul cum reſiduo ſiquod fuerit,) ſimul addita, reſtituent numerum propoſitum. ut patet.

Sicui vero nimis operoſum videbitur, tam ſingula diviſoris multipla, quam ipſum diviſorem toties repetitum ſcribere: poterit ille horum utrumvis omittere.

Alia operationis forma. Nempe, Si ſingula diviſoris multipla ſubducenda ſcribere ſupervacaneum eſſe duxerit; poterit ille duas illas operationes, multiplicationem ſcilicet & ſubductionem junctim perficere, (quod & pleriq; Arithmeticæ practicæ magiſtri faciendum docent,) ad hanc formam.

Poſtquam, Dividendo & diviſore recte collocatis, inveniatur prima Quotientis figura 6; ducatur numerus ille ſigillatim in omnes Diviſoris figuras, à ſiniſtra inchoando, numeriq; facti protinus ex Dividendo auferantur, notatis ſupernè reſiduis. Sic ſexies 9 ſunt 54; ablatis 5 ex 6 reſtat 1, & 4 item ex 6 reſtant 2: deinde ſexies 7 ſunt 42; ablatis 4 ex 12 reſtant 8, & 2 ex 3 reſtat 1: deinde ſexies 8 ſunt 48, ablatis igitur 4 ex 81 reſtant 77, & 8 ex 9 reſtat 1.

```
  7
  8 7
1 2 1 1
6 6 3 9 6 4 2 (6
  9 7 8
```

Tum promoveatur Diviſor uno gradu dextrorſum, & inventa ſecunda figura Quotientis 7, ducatur ea ut prius in diviſorem, & fiat ſubductio. Nempe ſepties 9 ſunt 63; ablatis 6 ex 7 reſtat 1, & 3 ex 7 reſtant 4: deinde ſepties 7 ſunt 49; ſublatis 4 ex 4 reſtat 0, & 9 ex 101 reſtant 92: deinde ſepties 8 ſunt 56; ſublatis 5 ex 92 reſtant 87, & 6 ex 6 reſtat 0.

```
      8
      9
    1 6
    7 4 7
    8 7 2
  1 2 1 1 0
  6 6 3 9 6 4 2 (6 7
   9 7 8 8
     9 7
```

Tertio, promoveatur Diviſor uno adhuc gradu, & inventa Quoti-

Quotientis figura tertia 8, fiat multiplicatio & ſubductio ut prius. Nempe octies 9 ſunt 72; ablatis 7 ex 8 reſtat 1, & 2 ex 7 reſtant 5; deinde octies 7 ſunt 56, ſublatis 5 ex 5 reſtat o, & 6 ex 100 reſtant 94; item octies octo ſunt 64, ſubductis 6 ex 94 reſtant 88, & 4 ex 4 reſtat o:

```
        1 8
        8 9
        9 0
      1 0 8
      7 4 7 8
      8 7 2 4
    1 2 1 1 0 0
    6 6 3 9 6 4 2 (678
     9 7 8 8 8
       9 7 7
         9
```

Deniq;, promoveatur adhuc uno gradu in locum infimum, & inventa figura Quotientis ultima 9, fiat multiplicatio & ſubductio ut prius. Nempe novies 9 ſunt 81; quibus ablatis ex 88 reſtant 7: deinde novies 7 ſunt 63; ſublatis 6 ex 7 reſtat 1, & 3 ex 10 reſtat 7; item novies 8 ſunt 72; quibus ablatis ex 72 nihil reſtat. Adeoq;, tota jam diviſione perfecta, habetur quotiens 6789, præciſe. Singulas autem operationes ſeorſim poſui, ut eo diſtinctius appareat quid quaq; operatione accedat. Eſtq; hæc methodus dividendi apud pleroſq; quos vidi Arithmeticos maxime uſitata.

```
        1 8
        8 9
        9 0 1
      1 0 5 7
      7 4 7 8
      8 7 2 4 7
    1 2 1 1 0 0
    6 6 3 9 6 4 2 (6789
     9 7 8 8 8 8
       9 7 7 7
         9 9
```

At mallem ego, operatione parum variatâ, tam multiplicationes quam ſubductiones particulares, a dextra inchoare, (quamvis diviſoris promotionem a ſiniſtra dextrorſum fieri neceſſe ſit;) hoc modo. *Operationis forma alia.*

Scriptis ut prius Dividendo & Diviſore, primaq; figura quotientis reperta, 6; ducatur hæc in diviſoris ſingulas figuras a dextra inchoãdo. Sic ſexies 8 ſunt 48, quibus ſubductis ex 49 (mutuatis ſcil. 4 ex gradu proximo ſuperiori, figuræ 9 præponendis,) reſtat 1, & 4 transferenda: Tum ſexies 7 ſunt 42,

```
      7 7 1
    6 6 3 9 6 4 2 (6
      9 7 8
```

quibus additis 4 (nuper mutuatis) fiunt 46; quibus demptis ex 53 (mutuatis ſcil. 5.) reſtant 7, & 5 transferenda ſunt: Tum

Tum ſexies 9 ſunt 54, quæ cum 5 nuper mutuatis fiunt 59, quibus ex 66 ſubductis reſtant 7. & perfecta eſt prima operatio.

Secundò, promoto Diviſore, quæratur ſecunda Quotientis figura 7; fiatq; multiplicatio & ſubductio ut prius. Nempe ſepties 8 ſunt 56, quibus ſublatis ex 56 (mutuatis ſcil. 5) reſtat 0, & transferenda 5: ſepties 7 ſunt 49, quibus additis 5 fiunt 54, quibus ſubductis ex 61 (mutuatis 6) reſtant 7, & tranſmittenda 6: ſepties 9 ſunt 63, & additis 6 fiunt 69, quibus ſubductis ex 77 reſtant 8.

87
7710
6639642 (67
9788
97

Tertiò, promoto Diviſore, & inventa quotientis figura tertia 8, procedendum ut prius. Nempe octies 8 ſunt 64, quibus ſubductis ex 64 (mutuatis 6,) reſtat 0, & transmittenda 6: octies 7 ſunt 56, & 6 addita conſtituunt 62, quibus ſubductis ex 70 (mutuando nempe 7) reſtant 8, & tranſmittenda 7; octies 9 ſunt 72, quibus additis 7 fiunt 79, eiſq; ex 87 ſubductis reſtant 8.

8
878
77100
6639642 (678
97888
977
9

Deniq;, promoto Diviſore, & reperta quotientis figura ultima 9, fiat multiplicatio & ſubductio ut prius. Nempe novies 8 ſunt 72, quibus ductis ex 72 reſtat 0 & tranſmittenda 7: novies 7 ſunt 63, & 7 additis fiunt 70, quibus 70 ductis, reſtat 0 & tranſmittenda 7: item novies 9 ſunt 81, quibus additis 7 fiunt 88, eiſq; ex 88 ſubductis nihil manet. Totaq; diviſio eſt abſoluta.

8
8780
7710100
6639642 (6789
978888
9797
99

Atq; hæc quidem methodus eſt eâ quæ præceſſit magis expedita, & quæ tam memoriam quam chartam pauciſſimis figuris onerat, minus item errori obnoxia, & ſiquis forte aliquando error inciderit, facilius detegitur & emendatur; cum enim eodem

dem manente diviſoris ſitu in ſingulis locis non niſi una fiat ſubductio, facile erit animadvertere quid in quaq; operatione accedat, & quamlibet operationem ſeorſim examinare ſi quid erroris ſuſpectum ſit; quod quidem methodo præcedente vix aut ne vix fiet.

Siquando (vel in hac vel in alia quavis operationis forma) Diviſor Ciphris (una vel pluribus) terminetur; ne fiat inanis tot ciphrarum repetitio, rejectis ciphris illis & ſimul abſciſſis totidem ex ultimis dividendi figuris, in numeris reliquis fiat diviſio: Ita tamen, ut peracto opere, reſtituantur tam diviſori ciphræ abjectæ quam dividendi reſiduo abſciſſæ figuræ, ut in exſemplo appoſito.

De ciphris finalibus.

```
              .
              1
            1 3 4
            7 4 8 1
20300) 6 8 3 4 9 2 7 (336 14127/20300
       2 0 3 3 3 0 0
         2 0 0
           2
```

Si deniq; mallet quis Diviſoris multipla quam ipſum Diviſorem toties deſcribere; quod fortaſſe (præſertim in Diviſionibus majoribus peragendis) non erit incommodum: poterit quidem illud fieri ad hanc formam.

Operationis forma alia.

```
        8                          8
      8 7 8                      8 7 8
     7 7 1 0 0                  7 7 1 0 0
978) 6 6 3 9 6 4 2 (6789   978) 6 6 3 9 6 4 2 (6789
      0 0 0 0                   5 8 6 8 6 4 2
     5 8 6 8                     6 8 4 2 0
      6 8 4 6                     7 8 8
       7 8 2 4                      8
        8 8 0 2                 6 6 3 9 6 4 2
     6 9 3 9 6 4 2
```

978	1
1956	2
2934	3
3912	4
4890	5
5868	6
6846	7
7824	8
8802	9

Cum enim omnino perinde ſit ſive Diviſorem ſuo loco ſub Dividendi figuris actu ſcribamus, ſive quaſi ſcriptum eſſet ſupponamus; licebit ipſum ſemel tantum loco commodo deſcribere, ejuſq; deinceps repetitionem omittere; & (inventis ſucceſſive Quotientis figuris) debita multipla ſuis locis deſcribe-

re,

re, & deſcripta ſubducere. Sic verbi gratia, diviſoris ſextuplum 5868 ex *6639* ſubductum relinquit (ſuperne ſcribendum) 771. Tum diviſoris ſeptuplum *6846* ex *7716* ſubductum, relinquit 870. Et diviſoris octuplum *7824* ex 8704 ſubductum relinquit 880. Deniq; diviſoris noncuplum 8802 ex 8802 ſubductum nihil relinquit.

Atq; in hac operationis forma, præterquam quod parum memoriæ committitur, hæc ſaltem habet commoda; nempe, ſiquando eadem figura in Quotiente ſæpius occurrere contingit, non opus erit toties multiplicationem exercere, ſed multiplum prius inventum tot quot opus erit locis repetere; quod quidem in majoribus diviſionibus non parvum aliquod erit compendium. Item, ubi peracta eſt operatio, licet omnia iſthæc multipla (cum reſiduo ſiquod ſit) ſimul addere, quo conſtet an ſubductiones recte fuerint peractæ (nempe ex conſenſu vel diſſenſu ſummæ ſic inventæ atq; propoſiti numeri dividendi;) atq; multiplicationem quamlibet, ſiquid ſuſpectum ſit erroris, ſigillatim examinare.

Si ſit interim metuendum, nequa confuſio oriatur ubi Diviſor non ſit ſua ſede conſpiciendus; poteſt iſti malo ſatis caveri, totidem vel punctis vel circellis (ſi opus ſit) diviſoris loco collocatis quot ipſe continet figuras: puta (in exſemplo præmiſſo) ponantur primùm tres circelli ſub dividendi figuris *639*; & deinde (cum in proximum locum promovendus ſit diviſor) deleto eorum primo quartus apponatur, ut jam ſub figuris *396* tres conſpiciantur, & ſic deinceps in ſingulis diviſoris promotionibus uno deleto alius ſubjungatur.

Deniq;, utile nonnunquam erit, præſertim in Diviſionibus grandioribus, (nam in minoribus vix erit operæ pretium) ante inchoatam Diviſionis operationem ſingula Diviſoris multipla (decuplo minora) ſimul deſcripta habere, (ut in exſemplo præmiſſo exhibuimus,) unde ut opus erit in Diviſionis operationem transferri poſſint; & quidem in quotientis figuris promptè inveniendis auxilio erit, ſtatim enim ſine aliis tentamentis inde patebit quod multiplum auferri poterit; ut in exſemplo præmiſſo, ſtatim video numerum *6639*, diviſoris (*978*) ſextuplo majorem eſſe & ſeptuplo minorem; adeoq; primam Quotientis figuram *6*. Et ſimiliter in reliquis.

Atq; hactenus præcipuas Diviſionis exercendæ formulas exhibui

hibui, ut ex omnibus eam ſibi quilibet ſeligat quæ ſibi magis accommoda videbitur.

Si partes Decimales numeris integris annexæ ſint, (ſive in Dividendo, ſive in Diviſore, ſive etiam in utroq;) eadem omnino methodus obſervanda eſt ac ſi eſſent numeri plane integri: modò illud tantum curetur, ut operatione peracta tot ſint partium decimalium loci in numero Dividendo, quot in diviſore ſimul atq; Quotiente. Adeoq; --- *Diviſionis operatio in partibus decimalibus.*

1° Si partium decimalium loci (ſive loci infra unitatem deſcendentes) totidem ſint in Dividendo quot in Diviſore, erit in Quotiente nullus. ut 9|78) 66396|42 (6789.

2° Si nullus ſit in Diviſore, tot erunt in Quotiente quot in Dividendo. ut 978) 66396|42 (67|89.

3° Si pauciores in Diviſore quam in Dividendo, tot erunt in Quotiente quot deſiderantur in Diviſore. ut 97|8) 66396|42 (678|9.

4° Si plures fuerint in Diviſore quam in Dividendo, tot ſaltem addendæ ſunt ciphræ numero dividendo (poſt lineam ſeparatricem) ante operationem peractam quot opus eſt ut ipſius loci deſcendentes tot ſint quot ſunt in Diviſore; (vel ſaltem quotienti invento tot ſubjungendæ ſunt ciphræ ſine linea ſeparatrice, aut ipſa linea ſeparatrix in quotiente, ſiqua ſit, tot locis ad dextram promovebitur;) ut 0|978) 66396|420 (67890. vel 97|8) 6639642|0 (67890.

5° Si poſt peractam aliquam diviſionem (ut ſupra) ſuperfuerit aliquod reſiduum; licebit (additis Dividendo, poſt lineam ſeparatricem, quot opus eſt ciphris) diviſionem ulterius continuare; unde, pro fractionibus ordinariis, provenient partes decimales, lineæ ſeparatrici (in quotiente) poſtponendis. Sic pro 978) 6640131 (6789 $\frac{489}{978}$ prodibit 978) 6640131|0 (6789|5 Et pro 978) 6639805 (6789 $\frac{163}{978}$ prodibit 978) 6639805|000 (6789|165 &c.

Et quidem partes decimales |5 tantundem valent atq; $\frac{489}{978}$ aut $\frac{1}{2}$; & partes decimales 16465 &c. tantundem valent atq; $\frac{163}{978}$, vel $\frac{1}{6}$. Et ſimiliter in aliis.

Ratio hujuſmodi proceſſuum in partibus decimalibus, per ſe ſatis patet; modo advertatur lineæ ſeparatricis retractionem aut promotionem (ſingulis gradibus) numerum decuplo vel

augere vel diminuere. Adeo ut non ſit neceſſe diutius hic immorari.

De Indice Quotientis. Hanc ſaltem univerſalem (ex Oughtredo) regulam adjicere liceat, (quæ in numeris Diviſione Ortis ſuos aſſignando locos dirigat,) *Index cujuſq; particularis figuræ Quotientis invenitur tollendo indicem figuræ dividentis ex indice figuræ diviſæ.* Quæ quidem ex iis quæ de Indice numeri Facti in Multiplicatione dicta ſunt, ſatis intelligi poterit, ut prolixa expoſitione non ſit opus.

Diviſio ſpecioſa, ſimul cum ſpecioſa Multiplicatione, mox tradetur.

CAP. XX.

De Multiplicatione & Diviſione Algebrica & Specioſa: Et quantitatum ex pluribus denominationibus conſtantium: Earumq; ad unam aliquam reductione.

Multiplicatio & Diviſio ſimplicium quantitatum. SIcut Additionis ſignum + fecimus, & Subductionis — : Ita Multiplicationis ſignum eſto ×; Diviſionis autem, lineola inter quantitatem Dividendam & Dividentem (ipſi ſubjectam) ſcripta. Adeoq; ſignificat V + A quantitati V quantitatem A adjectam eſſe: V — A quantitati V quantitatem A ablatam eſſe: V × A quantitatem V in quantitatem A ductam: & $\frac{V}{A}$ quantitatem V quantitate A Diviſam, ſive ad quantitatem A applicatam.

Nota tamen Multiplicationis ſignum ×, (præſertim ubi ſpecies quælibet unicâ notâ deſignatur) ſæpiſſimè omitti: (cum illud nempe ſine ullo incommodo fieri poſſit.) Sic verbi gratia AB pro A×B, & ABC pro A×B×C, & 2ABC pro 2×A×B×C.

Monendum item eſt (ut de Additione & Subductione, quippe de operationibus oppoſitis, ſic etiam) de Multiplicatione & Diviſione: Nempe *ſi plures occurrant vel multiplicationes, vel diviſiones, vel partim hæ partim illæ, continue facienda, perinde eſt quo ordine perſici-*

perficiantur, modò omnes continue fiant. Adeoq; $\frac{A \times B}{C} = \frac{B \times A}{C} = \frac{A}{C} \times B = B \times \frac{A}{C} = \frac{B}{C} \times A = A \times \frac{B}{C}$. Item $\frac{6 \times 4}{2} = \frac{4 \times 6}{2} = \frac{6}{2} \times 4 = 4 \times \frac{6}{2} = \frac{4}{2} \times 6 = 6 \times \frac{4}{2} = 12$. Et ſic in aliis. Eadem nempe de cauſâ quâ ſupra oſtendi $3 \times 4 = 4 \times 3$.

Cum quantitas aliqua componi ſupponitur ex duarum vel plurium quantitatum continua multiplicatione; dicitur ea tot dimenſionum eſſe quot ſunt quantitates illæ componentes. Puta $A \times A$ vel $A \times B$ quantitates ſunt duarum dimenſionum; $A \times A \times A$, vel $A \times A \times B$ vel $A \times B \times C$, ſunt quantitates trium dimenſionum. *Dimenſionum quantitatis productæ vel Ortæ numerus.*

Si tamen ejuſmodi quantitas per quantitatem aliquam dividatur; tot auferri ſupponuntur dimenſiones quot habet quantitas dividens. Sic $\frac{A \times B}{C}$ vel $\frac{A \times A \times B}{C \times C}$ ſunt quantitates unius dimenſionis; $\frac{A \times A \times B}{C}$ vel $\frac{A \times B \times D}{C}$ ſunt quantitates duarum dimenſionum.

Et quidem ſi eadem quantitas ſit ſuperne multiplicator, & inferne diviſor, ſe mutuo perimunt; (puta $\frac{AB}{A} = B$:) quod enim multiplicando acquiritur, id æquali diviſione deſtruitur. Sicut, & $B + A - A = B$, ubi quod acquiritur Additione, ſubductione tollitur.

Ubi autem ſpecies aliquæ ducuntur in figuras numerarias, non ſolemus eâ multiplicatione numerum dimenſionum auctum reputare, (ſaltem niſi cum ipſæ ſpecies numeros ſignificant:) adeoq; $2A$ vel $2 \times A$ aut $A \times 2$ unius eſt dimenſionis, & $2AB$ vel $2 \times A \times B$ duarum. Quia nempe 2 hic loci non pro aliâ ejuſdem generis dimenſione habetur, ſed ſimpliciter pro rationis Duplæ indice; & tantundem valent atq; $\frac{2}{1}A$, $\frac{2}{1}AB$. Et in aliis ſimiliter. Eſtq; $\frac{2}{1}A$, alia homogenea quantitas

titas quæ ſe habeat ad A, ut 2 ad 1; ſive quæ toties contineat A quoties 2 continet 1.

Quæ quidem ratio etiam aliis characteribus ſeu ſymbolis, non minus exprimi poterit quam ipſis figuris numeralibus; ut $\frac{V}{A}$ B, quo innuitur alia quantitas (ipſi B homogenea) quæ ipſam B toties contineat quoties V continet A; vel quæ ad B eandem habeat rationem quam habet V ad A.

Et quidem ubi ſpecies aliqua per aliam totidem præciſe dimenſionum dividitur, quantitas nullius dimenſionis oritur, ſed quæ potius pro *Rationis* indicio habenda eſt. Adeoq; $\frac{A \times B}{C \times D}$ nil aliud indicat quàm eam rationem quam habet quantitas $A \times B$ ad quantitatem homogeneam $C \times D$. Nam dividendo quantitatem quamlibet per aliam homogeneam, invenitur Ratio illius ad hanc: uti ex Diviſionis natura ſuperius explicata ſatis patet.

Si verò contingat quantitatis Dividentis dimenſiones plures eſſe quam Diviſæ, innuitur quantitas dimenſionum pauciorum quam nullius. (Quod eadem ratione ſupponendum erit, quâ ſupponimus quantitates negativas ſeu ablatitias, quæ ſint minores quam nihil.) Sic $\frac{A}{B \times C}$, $\frac{A}{B \times C \times D}$, &c. erunt quantitates dimenſionum -1, -2. &c. Nam $1 - 2 = -1$. $1 - 3 = -2$. &c. Quibus reſpondent *Gradus* (quos dixi) Deſcendentes.

Poteſtatum ejuſdem quãtitatis indices & characteres.

Siquando quantitas aliqua in ſeipſam aliquoties multiplicatur; puta, A, A × A, A × A × A, A × A × A × A, &c. ipſa quantitas A Radix ſeu Latus dici ſolet, A × A vel AA, quadratum, A × A × A vel AAA Cubus, A × A × A × A vel AAAA Biquadratum ejuſdem quantitatis A. Vel ipſius quantitatis A poteſtas prima, ſecunda, tertia, quarta, &c. Ita nempe ut cujuſq; poteſtatis index æqualis ſit numero dimenſionum.

Solent autem Radix, Quadratum, Cubus, Biquadratum, (reliquæq; deinceps poteſtates,) ſic notari, 𝔯, 𝔷, 𝔠, 𝔷𝔷, &c. (ut olim,) vel R, Q, C, QQ, &c. vel etiam A, Aq, Ac, Aqq, &c. vel a, a^2, a^3, a^4, &c. (ut fuſius diximus Cap. XI.) nempe compendii cauſa pro *a*, *aa*, *aaa*, *aaaa*, &c. Et propterea

terea (notas illas in has, ubi opus erit, reſolvendo) $a^2 = aa$. $a^3 = a^2 a = aaa$. $a^4 = a^3 a = a^2 a^2 = a a^3 = aaaa$. &c. Item $Aq = AA$. $Ac = AqA = AAq = AAA$. $Aqq = AcA = AqAq = AAc = AAAA$. &c. Sic $2Aq \times 3Ac$ eſt $2AA \times 3AAA$. & ℨ × ℭ = ſβ ſeu ℛ × ℛ in ℛ × ℛ × ℛ. Et contra A) Aqq (Ac, hoc eſt A) AAAA (AAA. ℨ) ſβ (ℭ, hoc eſt ℛ × ℛ) ℛ × ℛ × ℛ × ℛ × ℛ (♃ × ♃ × ♃. Sic a^3) a^5 (a^2 hoc eſt *aaa*) *aaaaa* (*aa*. Et ſic in aliis.

Quod autem attinet ad ſigna + & −, in multiplicationis Producto, vel diviſionis Quotiente, ponenda; hæc obſervanda eſt Regula. *De ſignis + & −.*

In Multiplicatione & Diviſione, ſi datorum ſigna ſint ſimilia, Producti vel Orti ſignum erit + (*affirmativum:*) *ſin diſſimilia,* − (*negativum.*) Nempe + per +, vel − per −, dat +, (ſive multiplicando ſive dividendo;) & + per −, vel − per +, dat −.

Vel etiam (quod tantundem valet) *Si multiplicatoris vel diviſoris ſignum ſit* +, *Multiplicandi vel Dividendi ſignum retinetur; ſin* −, *mutatur.* Nempe + per + dat +, & − per + dat −; item + per − dat −, & − per − dat +.

Ratio ſive demonſtratio hujus, ab ipſa Multiplicationis & Diviſionis natura petenda eſt. (Quales ego malim, ubi fieri poteſt, afferre, quam demonſtrationes a poſteriori.) Quam igitur in ſingulis caſibus oſtendam.

Multiplicatione ſupponitur quantitas Multiplicanda toties apponi quoties multiplicator indicat, ut ex ſupra dictis cap. 18. patet. Adeoq; qui quantitatem quamlibet (ſive poſitivam ſive ablatitiam) multiplicat per 3 vel + 3, ille eandem quantitatem (ſignis immutatis) ter ponit; qui per 2 vel + 2, bis ponit; qui per 1 vel + 1, ſemel tantum; qui vero per 0, ne ſemel quidem, ſed nullies ponit, (adeoq; quantitas quælibet, per 0 multiplicata, evaneſcit:) qui autem per − 1, − 2, − 3, &c. multiplicat, tot vicibus paucius quam nullies ponit, (cum − 1, − 2, − 3, &c. ſint minus quam nihil, ſeu paucius quam nullum,) hoc eſt revera toties tollit, (per ea quæ diximus Cap. XV. de ſignis + & − contrario ſenſu exponendis;) qui vero tollit, ille tantundem apponit mutato ſigno, (ut ex legibus Subductionis Cap. XV. patet:) Et propterea qui multiplicat

 per

per 1,2,3, &c. vel alium quemvis mulitiplicatorem affirmativum, is quantitatem multiplicandam toties ponit ſervato ſigno; qui vero multiplicat per − 1, − 2, − 3, &c. aut alium quemvis multiplicatorem negativum, ille quantitatem multiplicandam toties vel tollit vel (quod tantundē eſt) ſub contrario ſigno ponit. Quod erat oſtendendum. Adeoq; $A \times 2 = 2A$, $A \times -2 = -2A$, $-A \times 2 = -2A$, $-A \times -2 = +2A$ (nempe −A bis tollitur:) Sic $A \times B = BA$, $A \times -B = -BA$, $-A \times B = -BA$, $-A \times -B = +BA$ (vel + AB quod tantundem eſt.) Et ſic in reliquis.

In Diviſione, quæritur quoties diviſor, ſeu quantitas dividens, in quantitate Dividenda continetur; vel (quod tantundem eſt) in quam quantitatem ducendus eſt diviſor ut fiat æqualis quantitati Dividendæ; ut patet ex iis quæ de Diviſione tradita ſunt Cap. XI. Et propterea, ubi quantitatis Dividendæ ſignum eſt + (affirmativum,) ſignum Quotientis idem erit atq; diviſoris; ſin quantitatis Dividendæ ſignum ſit − (negativum,) ſignum Quotientis erit ſigno diviſoris contrarium: cum enim diviſoris in quotientem ducti productum futurum eſt æquale quantitati dividendæ; non poteſt illud affirmatum eſſe, niſi factores ſigna habeant ſimilia; nec negativum, niſi diſſimilia: ut ex modo probatis conſtat. Adeoq; ſi dividatur + per +, vel − per −, quotiens erit +: ſin + per −, aut − per +, quotiens erit −. Quod erat oſtendendum. Adeoq; 2) V ($\frac{V}{2}$, −2) V ($-\frac{V}{2}$, 2) −V ($-\frac{V}{2}$, −2) −V ($+\frac{V}{2}$. Item A) V ($\frac{V}{A}$, −A) V ($-\frac{V}{A}$, A) −V ($-\frac{V}{A}$, −A) −V ($+\frac{V}{A}$. Sic A) VA (V. −B) BCD (−CD. −C) BCD (−BD. NA) NV ($\frac{V}{A}$. A) Aq (A. −A) −AcB (AqB. Aq) −VA ($-\frac{V}{A}$. a) abc (bc. ab) a^2bc (ac. 2 zc) zzc (½ zz. 3zz) −6 zzc (2zc. Et pariter in aliis.

Atq; hactenus de quantitatum ſimplicium Multiplicatione & Diviſione dictum eſt; ſequitur ut de Conjunctis agam; eas intelligo quæ ex variis membris conſtant per ſigna + & − colligata.

Multiplicatio quantitatum conjunctarum

Quando quantitates invicem multiplicandæ ex variis membris

bris conſtant, ſingula membra multiplicantis in ſingula membra multiplicandæ (ſignis ut modo dictum eſt obſervatis) ducenda ſunt, Facta deinde in unum aggregatum colligenda. Sive autem a dextra, ſive a ſiniſtra incipiamus, perinde eſt. Exſempla ſequuntur.

Exſempla Multiplicationis.

$$\begin{array}{c} A + E = Z \\ B \\ \hline BA + BE = BZ \end{array} \qquad \begin{array}{c} A - E = X \\ B \\ \hline BA - B = BX \end{array}$$

$$\begin{array}{c} A + E - I = L \\ - C \\ \hline - CA - CE + CI = - CL \end{array} \qquad \begin{array}{c} 2B + 3C \\ A - 2D \\ \hline 2AB + 3AC - 4BD - 6CD \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A + E = Z \\ A + E = Z \\ \hline AA + AE \\ \quad + AE + EE \\ \hline AA + 2AE + EE = ZZ \\ Aq + 2AE + Eq = Zq \end{array} \qquad \begin{array}{l} A - E = X \\ A - E = X \\ \hline \quad - AE + Eq \\ Aq - AE \\ \hline Aq - 2AE + Eq = Xq \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A + E = Z \\ A - E = X \\ \hline Aq + AE \\ \quad - AE + Eq \\ \hline Aq - Eq = ZX \end{array} \qquad \begin{array}{c} Z - E = A \\ E \\ \hline ZE - Eq = AE \end{array}$$

$$\begin{array}{c} Z - A = E \\ A \\ \hline ZA - Aq = AE \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 2 ʓ + 3 ℞ - 4 \\ + 1 ʓ - 1 ℞ - 3 \\ \hline - 6 ʓ - 9 ℞ + 12 \\ - 2 ℭ - 3 ʓ + 4 ℞ \quad \\ 2 ʓʓ + 3 ℭ - 4 ʓ \qquad\qquad \\ \hline 2 ʓʓ + 1 ℭ - 13 ʓ - 5 ℞ + 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3C - 1Q + 3R - 2 \\ -2Q - 1R + 6 \\ \hline +18C - 6Q + 18R - 12 \\ -3QQ + 1C - 3Q + 2R \\ -6QC + 2QQ - 6C + 4Q \\ \hline -6QC - 1QQ + 13C - 5Q + 20R - 12 \end{array}
\qquad
\begin{array}{c} BP + PC \\ AP \\ \hline AP \times BP + AP \times PC \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2Aq + Bq - 3A + 2 \\ -Cq + 2B \\ \hline -2CqAq - CqBq + 3CqA - 2Cq \\ +4BAq + 2Bc - 6BA + 4B \\ \hline \left.\begin{array}{l} -2Cq \\ +4B \end{array}\right\} Aq \left.\begin{array}{l} -Cq \\ +2B \end{array}\right\} Bq \left.\begin{array}{l} +3Cq \\ -6B \end{array}\right\} A \begin{array}{l} -2Cq \\ +4B \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2a^2 + 3ba - bc \\ 3a^2 - 2ba - c^2 \\ \hline 6a^4 + 9ba^3 - 3bca^2 \\ -4ba^3 - 6b^2a^2 + 2b^2ca \\ -2c^2a^2 - 3bc^2a + bc^3 \\ \hline 6a^4 + 5ba^3 \left.\begin{array}{l} -3bc \\ -6b^2 \\ -2c^2 \end{array}\right\} a^2 \left.\begin{array}{l} +2b^2c \\ -3bc^2 \end{array}\right\} a + bc^3 \end{array}$$

Diviſio quãtitatum conjunctarum.

In dividendis quantitatibus conjunctis, ſi ſaltem Diviſor ſit quantitas ſimplex, vix quicquam peculiaris difficultatis eſt præter ſimplicis diviſionis repetitionem; adeoq; quotientis per partes inventionem. Et quidem parum refert an a dextra an a ſiniſtra incipiamus.

Exſempli gratia, Si quantitas $DC - 6BC + 8Cq$, dividen-

$$\begin{array}{l} 2C)\ DC - 6BC + 8Cq\ (\tfrac{1}{2}D - 3B + 4C \\ \quad \begin{array}{c|c|c} DC & -6BC & 8Cq \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \end{array}$$

da eſſet per 2C; Primum quæro quænam quantitas ducta in 2C faciet DC, & reſponſum $\frac{1}{2}$ D in quotiente pono, quem quotientem in diviſorem ductum ($2C \times \frac{1}{2}D = DC$) ubi ex dividendi

dividendi parte prima DC ſubduxerim, nihil reſtat. Similiter cum videam 2C ducendum eſſe in $-3B$ ut fiat $-6BC$, ſcribo in quotiente $-3B$, & multiplum ($2C \times 3B = 6BC$) ex $6BC$ ſubductum nihil relinquit. Deniq; cum $2C$ ducendum in $4C$ ut fiat $8Cq$, poſito in quotiente $+4C$, & ſubducto multiplo ($2C \times 4C = 8CC = 8Cq$) nihil manet. Et peracta eſt diviſio, cujus quotiens ſeu quantitas orta $\frac{1}{2}D - 3B + 4C$.

Si quid autem, diviſione quantum fieri poteſt continuata, ſuperfuerit, quod per diviſorem propoſitum dividi non poſſit, vel etiam ſi ita ſe habeat Dividendum ut ipſius nulla pars per expoſitum diviſorem dividi poſſit, (ſive ſimplex ſit, ſive compoſita, quantitas dividenda, aut etiam dividens,) reſiduum illud collocandum eſt ſupra diviſorem in modum fractionis (ſicut in diviſione numeroſa) & invento quotienti adjungenda. Ut in exſemplorum tam præcedentium quam ſubſequentium aliquot videre eſt.

$$A)\,CD\,(\frac{CD}{A}. \qquad B)\,BD + Dq - 4BE\,(D - 4E + \frac{Dq}{B}$$

$$A+B)\,DF\,(\frac{DF.}{A+B}$$

$$2\mathfrak{z})\,5\mathfrak{zz} + 4\mathfrak{C} - 2\mathfrak{R} + 1\,(\frac{5}{2}\mathfrak{z} + 2\mathfrak{R} - \frac{1}{\mathfrak{R}} + \frac{1}{2\mathfrak{z}}$$

$$Rq)\,-ARc + 4AERq + CqFR\,(-AR + 4AB + \frac{CqF}{R}$$

$$a)\,2ba - aa + \frac{da^2}{a^2}\,(2b - a + \frac{da}{e}$$

Et quidem pleriq; ſive Algebriſtæ ſive Analyſtæ vix ulterius Diviſionis Algebricæ aut Specioſæ traditionem proſequuntur; ſed quantitatem dividendam dividenti ſupraponunt, interjecta lineolâ; & ſiquam animadvertant quantitatem quæ utramq; communiter multiplicaverit eandem utrobiq; expungunt: nec ulterius ſatagunt curioſam Diviſionem (præſertim cum diviſor ex pluribus partibus conſtat) exercere.

Verum, etiam cum Diviſor ex pluribus partibus conſtiterit,

 diviſio

diviſio nonnunquam ſatis feliciter exerceri poteſt, eadem plane premendo veſtigia quibus in aliis Diviſionibus inceditur. Quod (poſt Carteſium) animadvertit Schotenius (tam in ipſius ad Carteſii Geometriam notis, quam in ſpeciali tractatu quem *Principia Matheſeos univerſalis* appellat, Arithmeticæ Specioſæ praxin exhibente.) Sed & olim, juxta veterum Algebram, ejuſmodi diviſionis methodum oſtendit *Thomas Diggeſius*, Anglus, (vir Equeſtri familiâ natus, & egregius ſui temporis mathematicus, uti ex ipſius editis operibus, ſed pleriſq; lingua Anglicana, ſatis patet,) in libro qui inſcribitur *ſtratioticos*, (qui Londini prodiit Anno 1579.) ubi tam Arithmetica vulgaris, quam veterum Algebra ſuccincte traditur.

Ea vero ſic commode præſtabitur. Diſpoſitis primo tam multiplicandæ quam multiplicantis partibus, prout negotio magis accommodum videbitur; quæratur quantitas quæ ſaltem in unum (quod ſeligere placeat) Diviſoris membrum ducta producat membrum aliquod quantitatis dividendæ: quæ quantitas pro quotiente (particulari) habenda eſt, & in diviſorem totum ducenda, & Factum ex quantitate dividendâ auferendum, notato reſiduo. Atq; idem iterandum erit quoties opus eſt; ut reliqua etiam quotientis membra reperiantur.

Ita ſi quantitas ABF + 2CDF − 3AqB − 6ACD dividenda ſit per F − 3A. Quoniam F) ABF (AB, ſcribo in quotiente AB; quæ ducta in diviſorem F − 3A facit ABF − 3AqB,

F − 3A) ABF + 2CDF − 3AqB − 6ACD (AB + 2CD
ABF − 3AqB
+ 2CDF − 6ACD
+ 2CDF − 6ACD
00 00

quibus ex dividendo ſubductis, reſtare video 2CDF − 6ACD. Deinde, eandem operationem iterando, cum ſit F) 2CDF (+ 2CD, ſubjungo quotienti priori + 2CD, & ducto 2CD in F − 3A fit 2CDF − 6ACD. quod ubi ſubductum eſt, nihil reſtat; totaq; operatio eſt abſoluta.

Item ſi dividendum ſit Ac − Ec per A − E: cum ſit A) Ac (Aq. Ducendo quotientem Aq in diviſorem A − E fit Ac − AqE, & facta ſubductione reſtat AqE − Ec. Tum quia

A

A) AqE (AE, quotiens AE in diviſorem A − E ductus, dat

$$\begin{array}{l} A - E)\ Ac - Ec\ (Aq + AE + Eq \\ \qquad Ac - AqE \\ \hline \qquad +AqE - Ec \\ \qquad AqE - AEq \\ \hline \qquad +AEq - Ec \\ \qquad +AEq - Ec \\ \hline \qquad 00 \qquad 00 \end{array}$$

AqE − AEq; & facta ſubductione, reſtat AEq − Ec. Tandem, cum A) AEq (Eq; & Eq in A − E fit AEq − Ec; ſubductione facta, nihil reſtat; adeoq; abſoluta eſt operatio, & quotiens Aq + AE + Eq.

$$\begin{array}{l} a - e)\ a^3 - e^3\ (e^2 + ae + a^2 \\ \qquad ae^2 - e^3 \\ \hline \qquad a^3 - ae^2 \\ \qquad a^2e - ae^2 \\ \hline \qquad a^3 - a^2e \\ \qquad a^3 - a^2e \\ \hline \qquad 00 \qquad 00 \end{array}$$

Atq; idem proveniet ſi a dextra incipiamus. Cum enim ſit $- e) - e^3 (e^2$, erit quotiens e^2, & e^2 in $a - e$, erit $ae^2 - e^3$; & facta ſubductione, reſiduum $a^2 - ae^2$. Tum $- e) - ae^2 (+ ae$; & ae in $a - e$ eſt $a^2e - ae^2$; & ſubductione facta, reſiduum eſt $a^3 - a^2e$. Denique $- e) - a^2e (a^2$; & a^2 in $a - e$ eſt $a^3 - a^2e$; &, facta ſubductione, reſtat nihil. quotiens autem eſt ut prius, niſi quod qui tunc ultimus nunc primus eſt terminus.

Ad eandem formam; ſi dividenda eſſet eadem quantitas $a^3 - e^3$ per $a + e$. Cum ſit $a) a^3 (a^2$; & a^2 in $a + e$ ſit $a^3 + a^2e$;

$$a + e)\ a^3 - e^3\ \left(a^2 - ae + e^2 - \frac{2e^3}{a+e}\right.$$

$$\begin{array}{l|l} \quad a^3 + a^2e & \\ \hline \quad - a^2e - e^3 & \left(a^2 - ae - e^2 + \frac{2ae^2}{a+e}\right. \\ \quad - a^2e - ae^2 & \\ \hline \quad + ae^2 - e^3 & + ae^2 - e^3 \\ \quad + ae^2 + e^3 & - ae^2 - e^3 \\ \hline \qquad - 2e^3 & 2ae^2 \end{array}$$

 facta

facta ſubductione, reſiduum erit $-a^2e - e^3$. Tum cum $a) -a^2e(-ae$; & $-ae$ in $a+e$ ſit $-a^2e - ae^2$; facta ſubductione, reſtabit $+ae^2 - e^3$. Deniq; cum ſit $a)\ ae^2(e^2$ & e^2 in $a+e$ ſit $ae^2 + e^3$; facta ſubductione, reſtabit $-2e^3$: Et quotiens eſt $a^2 - ae + e^2 - \frac{2e^3}{a+e}$.

Vel, ſi in ultima operatione, pro quotiente $+e^2\ (= \frac{ae^2}{a})$ ſumeretur quotiens $-e^2$, quia nempe $+e)\ -e^3(-e^2$; fuiſſet $-e^2$ in $a+e$, $-ae^2 - e^3$; &, ſubductione facta, reſtaret $2ae^2$, adeoq; quotiens $a^2 - ae - e^2 + \frac{2ae^2}{a+e}$. Quod tantundem valet: Nam $+e^2 - \frac{2e^3}{a+e} = -e^2 + \frac{2ae^2}{a+e}$ hoc eſt $\frac{ae^2+e^3-2e^3}{a+e} = \frac{-ae^2-e^3+2ae^2}{a+e}$

Sed idem fere eveniret ſi præcedens operatio (ubi reſiduum eſt $2e^3$) ulterius continuetur; & ſumatur quotiens $\frac{-2e^3}{+e} = -2e^2$: nam $-2e^2$ in $a+e$ eſt $-2ae^2 - 2e^3$; quod, ex $-2e^3$ ſubductum relinquit $+2ae^2$ adeoque erit $a^2 - ae + e^2 - 2e^2 + \frac{2ae^2}{a+e}$

Quod ideo moneo, ut appareat, (præſertim ubi neceſſario fractione terminetur) quotientem poſſe variis formis exhiberi (nam & multis adhuc modis variari poteſt) ſed qui tantundem valeant; ut quilibet eam quæ ſibi magis accommodam videatur ſeligat; & quidem nunc hanc nunc illam ut præſens negotium poſtulaverit.

Poſſet interim eadem operatio peragi eodem plane ſucceſſu, ſi a dextra incipiamus. Nempe $e)\ -e^3(-e^2$; & $-e^2$ in $a+e$ facit $-ae^2 - e^3$; & (ſubductione facta) reſiduum $a^3 + ae^2$. Tum $e)\ +ae^2(+ae$: & ae in $a+e$ facit $a^2e + ae^2$: ergo reſiduum $a^3 - a^2e$. Deniq; $e)\ -a^2e(-a^2$; &

& $-a^2$ in $a+e$ facit $-a^3 - a^2e$: & reſiduum $2a^3$. Adeóq; quotiens $-e^2 + ae - a^2 + \frac{2a^3}{a+b}$.

$$
\begin{array}{l}
a+e)\ a^3 - e^3\ (-e^2 + ae - a^2 + \frac{2a^3}{a+e} \\
\quad -ae^2 - e^3 \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
a^3 + ae^2 & (-e^2 + ae + a^2 - \frac{2a^2e}{a+e} \\
+a^2e + ae^2 & \\
a^3 - a^2e & a^3 - a^2e \\
-a^3 - a^2e & a^3 + a^2e \\
\hline
2a^3 & -2a^2e
\end{array}
$$

Vel, ſi in ultima operatione ſumatur quotiens $+a^2\ (=\frac{a^3}{a})$ erit reſiduum $-2a^2e$ & quotiens $-e^2 + ae + a^2 - \frac{2a^2e}{a+e}$. Sed utrovis horum modorum procedatur, quotiens tantundem valet atq; prius.

Ubi autem tanta oritur varietas, judicio opus eſt ut quis eam ſeligat quotientis formam quæ præſenti negotio magis ſit accommoda: vel etiam, ſine alia diviſione, ad inſtar fractionis exhibeat, $\frac{a^3 - e^3}{a+e}$.

Aliud libet exſemplum ex *Diggeſio* (ſupra citato) afferre,

6 ʒ + 8 𝓇) 60 ſβ + 80 ʒʒ + 72 𝒸 + 96 ʒ (10 𝒸 + 12 𝓇
60 ſβ + 80 ʒʒ
72 𝒸 + 96 ʒ
72 𝒸 + 96 ʒ
00 00

& ſimul huic negotio finem imponere. Nempe quantitatem 60 ſβ + 80 ʒʒ + 72 𝒸 + 96 ʒ per 6 ʒ + 8 𝓇 ſic dividit. Quoniam 6 ʒ) 60 ſβ (10 𝒸; quotientem inventum ducit in diviſorem, & productum 60 ſβ + 80 ʒʒ ex dividendo ſubducit; & reſtant 72 𝒸 + 96 ʒ. Tum quia 6 ʒ) 72 𝒸 (12 𝓇;

 quo-

quotienti priori adjungit ∔ 12 ♃: & ducto hoc quotiente in diviſorem, productum aufert ex dividendo & nihil reſtat. Adeoq; quotiens eſt 10 ♈ + 12 ♃.

Sed & apud Clavium in *Algebra* operationem non abſimilem reperio: quem, ſi libet, conſule.

Atq; hactenus Multiplicationem & Diviſionem Algebricam. & Specioſam abſolvimus.

Multiplicatio quantitatis plurium denominationum.

Multiplicatio & Diviſio quantitatum ex pluribus Denominationibus aggregatarum, vix aliud eſt quam Multiplicatio & Diviſio Specioſa. In hoc ſaltem differunt, quod harum denominationum ad invicem ratio ſupponitur cognita, ut fieri poſſit ab una ad aliam reductio; Specierum autem ſeu Symbolorum (in Arithmetica Specioſa) ratio ad invicem vel ignoratur, vel ita acſi eſſet ignorata tractatur.

Cum autem ejuſmodi quantitas plurium denominationū per aliā unius tantū denominationis multiplicanda occurrit, incipienda eſt operatio ab infima ſive minima denominatione, & ſic ad majores aſcendendū: tranſmiſſo ſemper in ſuperiores quantum opus eſt. Exſempli gratia. *Si quis ſingulis diebus expendit 14 libras 10 ſolidos & 8 denarios monetæ Anglicanæ, quantum expendit ille ſingulis ſeptimanis?* Reſpondebitur, Expenſam hebdomadis ſeptuplam eſſe expenſæ diurnæ (cum quælibet hebdomas contineat ſeptem dies.) Adeoq; expenſa diurna multiplicanda eſt per 7. Nempe denarii $8 \times 7 = 56$. cum autem 12 *den*: = 1 *ſol.* erunt 56 *d* = 4 *ſ* + 8 *d.* ideoq; ſubſcriptis 8 *d*, reſervo 4 *ſol*: reliquis ſolidis mox annumerandos. Tum ſolidi $10 \times 7 = 70$, quibus additis 4 huc tranſmiſſis fiunt 74: ſunt autem 20 *ſol*: = 1 *lib.* ergo 74 *ſol*: = 3 *lib.* ∔ 14 *ſol.* Ergo ſubſcriptis 14 *ſol.* reſervo 3 *libras* mox reliquis adjungendas. Deniq; libræ $14 \times 7 = 98$ quibus additis 3 fiunt 101 *libr*: quibus ſubſcriptis, patet expenſam hebdomadis eſſe 101^{lib}. $14^{ſol}$. 8^{den}.

14^{lib}.	10^{s}.	8^{d}
	.	7.
3	4	
101.	14.	8

Reductio plurium denominationum ad unā.

Si autem vel Multiplicator ſit numerus grandior, vel etiam ex pluribus denominationibus conſtet: expedit plerumq; (aut etiam aliquando prope neceſſarium erit,) quantitates illas plurium denominationum ad quantitates unius denominationis reducere, & tum demum multiplicationem perficere, & peracta

acta tandem multiplicatione, priſtinas eas (ſi opus erit) denominationes reſtituere.

Exſempli gratia, *Si viris aliquot ſingulis debentur* 20 *libræ*, 13 *ſolidi*, & 9 *denarii*; quantum *debebitur eorum* 283 *viris?* Priuſquam multiplicationem propoſitam aggrediar, commodum erit totam monetæ propoſitæ ſummam ad unam *denariorum* denominationem reducere: quod ipſum multiplicatione peragitur, hoc modo. Quoniam ſingulæ libræ (monetæ Anglicanæ) continent 20 ſolidos; numerum librarum expoſitum multiplico in 20, ut habeam numerum ſolidorum in illis 28 libris contentorum, quibus adjungendi 13 ſolidi (in quæſtione expoſiti) ut habeatur numerus omnium ſolidorum; nempe 573. Deinde, quoniam ſinguli ſolidi continent 12 denarios, numerum illum ſolidorum (573,) multiplico in 12, ut habeam numerum denaridorũ inibi contentorum: quibus adjungendi adhuc denarii 9 (in quæſtione expoſiti) ut habeatur numerus omnium denariorum, nempe 6885^{d}: $= 28^{lib}. 13^{s}. 9^{d}.$

Et tum demum, poſt hanc reductionem factam, multiplico 6885 (numerum denariorum) per multiplicatorem propoſitum 283; & producuntur denarii 1948455.

Deniq; , ſi velim intelligere quot libræ & ſolidi in hoc denariorum numero continentur; reſtituentur illæ denominationes dividendo. Nempe quia $12^{d} = 1^{s}.$ denariorum numerum 1948455 divido per 12, & prodeunt ſolidi 162371, atq; inſuper 3 denarii poſt peractam diviſionem reſidui. Deinde, cum $20^{s} = 1^{lib}$: numerum ſolidorum 162371 divido per 20, & prodeunt libræ 8118,

```
  28lib. 13s 9d.
  20
 ----
  560
   13
 ----
  573 ſol.
   12
 ----
  1146
  573
     9
 ----
  6885 den:
   283
 ------
  20655
  55080
  13770
 -------
  1948455

       7248113 d
 12)1948455(162371s. 3d.
     12  36
     72  84
     24  12
```

atq;

atq; inſuper 11 ſolidi reſidui. Adeoq; 1948455d = 8118lib. 11s. 3d. ſumma quæſita.

```
  x 1 s
20)x6237|1 (8118lib.  11s. 3d.
   2222o
```

Item. Si ex ſcaturigine quodam ſingulis horis effluant aquarum pondo 34 cum unciis 7. quæritur quantum effluet 26 diebus & horis 15? Reduco primum aquæ quantitatem aſſignatam ad Uncias, multiplicando 34 (numerum librarum ſeu pondo) per 12 (quia nempe 1 *lib.* = 12 *unc.*) & adjungo uncias 7. Item tempus aſſignatum in horas reduco, multiplicando 26 numerum dierū per 24 (quia 1 *dies* = 24 *hor.*)

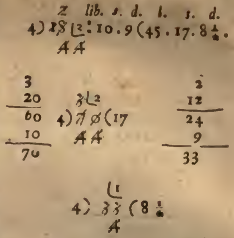
```
34lib.  7unc.      26d.  15h.
12                 24
---------          ---------
68                 104
34                 52
 7                 15
---------          ---------
415unc.            639 horæ.
```

```
  415 unc.                      unc.
  639 hor.                   2 x x 0 9     lib.  unc.
 ---------               12) 2 6 5 x 8 5   22098.  9.
  3735                       2 4
 1245                          2 4
2490                           1 08
---------                        96
265185 unciæ.
```

& adjungo horas 15. Et, peracta reductione, multiplico 415 numerum unciarum ſingulis horis effluentium, per 639 numerum horarum in tempore propoſito; & producitur 265185 numerus unciarum toto iſto tempore effluentium. Quem deniq; unciarum numerum divido per 12 (tot enim unciæ continentur in una libra) & prodeunt 22098 *lib.* 9 *unciæ*. quæſita quantitas aquæ toto iſto tempore effluentis.

Diviſio quātitatis plurium denominationum. Quæ autem de quantitatum ex pluribus denominationibus conſtantium Multiplicatione dicta ſunt, ea fere & de earundem Diviſione intelligenda erunt. Niſi quod hic potius a denominatione ſuprema incipiendum ſit, & quod illic ſupereſt ad proximè inferiorem reducendum.

Exſempli



Exſempli gratiâ; ſi defuncti facultates, 183 *lib.* 10 *ſol* 9 *den.* inter quatuor ipſius liberos ſint æqualiter partiendæ; quæritur quantum cuiq; cedet. Primo dividantur libræ 183 per 4, & habebitur quotus 45, cum reſiduis 3 libris. Secundo, pro 3 libris, ſubſtitutis 60 ſolidis, (quia $1^{lib\cdot} = 20^{ſol\cdot}$ adeoq; $3^{lib\cdot} = 60^{ſol\cdot}$) & adjunctis 10 ſolidis (in quæſtione expoſitis) habentur 70 ſolidi, qui per 4 diviſi, quotum præbent 17, & ſuperſunt 2. Deniq;, cum 2 *ſolidi* valeant 24 denarios; qui, adjunctis 9 in quæſtione expoſitis, fiunt 33; hi per 4 diviſi quotum exhibent 8; cui, propter 1 reſiduum (cum jam ad infimam denominationem perveniatur) adjungo fractionem $\frac{1}{4}$. Adeoq; quotiens perfectus, ex omnibus aggregatus, eſt $45^{lib\cdot}\ 17^{s}, 8\frac{1}{4}^{d}$. Cedent igitur unicuiq; ex liberis, libræ 45, ſolidi 17, & denarii 8 cum quadrante.

Vel etiam, reducto primum tam Dividendo quam diviſore ad unam denominationem, operatio poſtea inſtituatur more ſuperius tradito. Verbi gratia. Si quæratur, *In Annis Iulianis* 24, *diebus* 34, *horis* 2, *&* 32 *minutis*; *quot ſint Menſes periodici, ſeu Lunationes.* Quoniam Annus Julianus conſtat diebus 365 & 6 horis, hoc eſt (multiplicando 365 per 24 & addendo 6) horis 8766; Anni 24 conſtabunt horis 210384, (ut multiplicando patebit:) quibus ſi addantur dies 34, horæ 2, & 32 minuta; hoc eſt 818 horæ & 32 minuta: habentur horæ 211202 & 32 minuta: hoc eſt (multiplicando 211202 per 60 & addendo 32) minuta 12672152: quæ tantundem valent atq; Anni Juliani 24, $34^{d}, 2^{h}, 32'$. Deinde Menſis periodicus ſtatuitur, dierum 29, cum 12 horis & 44 minutis, hoc eſt, (ut ex adjuncto calculo patet,) minutorum 42524. quod quæritur igitur, hoc eſt, Quoties in minutis 12672152, (tempore propoſito,) continentur minuta 42524, (tempus unius menſis periodici.)

Numero igitur illo per hunc diviſo, habetur Quotiens 298 præciſe. Tot igitur menſes periodici expoſito tempore continentur. Quod erat inveſtigandum.

d h
365. 6.
24
1460
730
6
8766 h.
24
35064
17532
210384 h.
818. 32′
211202. 32
60.
12672120
32
12672152 m.

d h
34. 2. 32.
24
136
68
2
818. 32′

d h
29. 12. 44.
24
116
58
12
708 h.
60
42480
44
42524 m.

3401
416739
42524) 12672152 (298
85048
382716
340192

Atq; ad hujuſmodi formas præſtandæ ſunt multiplicationis & diviſionis operationes, ubi quantitates ex pluribus denominationibus conflantur. Ubi interim judicio opus erit, ut præparatoriæ reductiones ita inſtituantur ut præſenti negotio maxime ſit accommodum, & res tota quam fieri poteſt minimo labore

labore peragatur. Quod quidem frequente exercitio edíſcetur, & uſu fiet familiare.

De Multiplicatione autem & Diviſione notandum eſt univerſim (cui ſimile de Additione & Subductione ſuperius tradidimus,) *ubi plures occurrunt numerorum Multiplicationes, vel Diviſiones, vel ſimul utræq;, continue facienda, perinde eſt quo ordine inſtituantur, modo omnes continue fiant;* tantundem enim utcunq; prodibit. Exſempli gratia. $2\times3\times4 = 2\times4\times3 = 3\times2\times4 = 3\times4\times2 = 4\times2\times3 = 4\times3\times2 = 24$. Item $ABC = ACB = BAC = BCA = CAB = CBA$. Et $\frac{4\times3}{2} = \frac{3\times4}{2} = \frac{4}{2}\times3 = \frac{3}{2}\times4 = \frac{1}{2}\times4\times3 = 6$. Item $\frac{AB}{CD} = \frac{BA}{CD} = \frac{BA}{DC} = \frac{A}{C}\times\frac{B}{D} = A\times\frac{B}{CD} = \frac{A}{CB}\times B = \frac{C)\,AB}{D} = \frac{D)\,BA}{C} = D)\,\frac{AB}{C} = C)\,\frac{BA}{D} = C)\,\frac{B}{D}\times A = C)\,\frac{A\times B}{D}$. Item, *Perinde eſt ſive per duos pluresve diviſores continue fiant diviſiones, ſive per productum ex diviſoribus illis invicem multiplicatis;* puta $C)\,\frac{B}{D} = \frac{B}{CD}$. $3)\,\frac{24}{2} = \frac{24}{2\times3} = \frac{24}{6} = 4$. &c. At interim *Cavendum eſt, nequis ex Diviſoribus* (aut quod ab illis fit) *alium quam diviſorem multiplicet*: Si enim vel multiplicatorem vel quotum multiplicet diviſor, eo ipſo ex diviſore fit multiplicator & totius operationis proceſſum immutat. Nam omnino aliud aliud eſt $C)\,\frac{B}{D} = \frac{B}{D\times C}$ atque $\frac{B}{D}\times C = \frac{B\times C}{D}$. Sic aliud eſt $2)\,\frac{12}{3} = \frac{12}{3\times2} = 2$, atq; $\frac{12}{3}\times2 = \frac{12\times2}{3} = 8$. Quorum omnium demonſtrationes ex ſuperius traditis Multiplicationis & Diviſionis principiis facile eſt colligere.

Atq; hactenus de Multiplicationis & Diviſionis praxi dictum eſto. Sequitur, ut de utriuſq; Examine ſeu Probatione verba faciamus.

CAP. XXI.

De Multiplicationis & Diviſionis Probationibus; earumq; Probationum fundamentis. Familiores aliquot quæſtiunculæ ſolvuntur.

QUæ de Additionis & Subductionis probationibus ſuperius dicta ſunt, non pauca & hic locum obtinent. Nempe non adhibentur illæ tanquam demonſtrationes certitudinis regularum juxta quas proceditur; nam de illis ſatis conſtat ex principiis eis quibus innituntur: ſed ad explorandum numquis error ſubrepſerit in exercitio, quo a regulis deviatum ſit. Non igitur ad probandas regulas, ſed ad explorandum num operatio præſtita regulis ſit conformis, inſtituuntur hæ probationes. Et quanquam poſſet etiam examen inſtitui repetendo ipſam operationem, & ad regulam ubiq; exigendo; tamen illud felicius ut plurimum inſtituitur operationis formâ mutatâ; quippe hoc pacto minus eſt periculi in eundem errorem iterum incidendi.

Sicut Additio per Subductionem (operationem ſibi contrariam;) ſic Multiplicatio per (huic oppoſitam) Diviſionem examinare ſive probare ſolent. Quod enim Multiplicatione conficitur id Diviſione diſſolvitur. *Ubi enim duorum numerorum invicem multiplicatione, alius producitur; ſi hic per eorum alterutrum dividatur, reliquus prodit.* Puta, ſi quantitas A ducta in B ſit AB; hæc ipſa AB diviſa per B fiet A. (nempe $\frac{AB}{B} = A$.) Ratio eſt, quia ſubſequens diviſio per B deſtruit id quod præcedente multiplicatione per eandem quantitatem B efficiebatur, adeoq; ipſa quantitas A quæ prius fuerat, jam iterum quaſi ex poſtliminio redit. Eodem modo ſi eadem AB dividatur per A prodibit B; (nempe $\frac{AB}{A} = B$:) quia ſcilicet tam ex ductu A in B, quam ex ductu B in A, eadem prodibit quantitas, puta AB = BA. ſic $\frac{6 = 2 \times 3}{2} = 3$, & $\frac{6 = 2 \times 3}{3} = 2$.

Atq; idem in grandioribus numeris ſimiliter obtinet. Si enim

nim ex ductu 283 in 546, vel (quod tantundem eſt) ex ductu 546 in 283, proveniat 154518. Ut explorem num rite peracta ſit operatio, hunc productum divido per multiplicatorum utrumvis, & ſi reliquum diviſione provenientem comperio, argumento eſt operationem rite peractam fuiſſe; ſin minus, certum eſt alicubi fuiſſe erratum. Et ſimiliter in aliis quibuſvis multiplicationibus, veritatem peractæ operationis examinare licet.

```
   283                    16
   546                  4533
  1698          546)154518(283
 1132                 1092
1415                  4368
154518                 1638

   546                   16
   283                 1309
  1638          283)154518(546
 4368                 1415
1092                  1132
154518                 1698
```

Ut autem per Diviſionem Multiplicatio, ſic per multiplicationem Diviſio examinabitur. Nam *ſi Quotiens in Diviſorem ducatur (vel hic in illum) prodibit numerus pridem Dividendus.* Nam quod Dividendo fuerat diſſolutum, multiplicando (per eundem numerum) iterum reſtituitur. Puta, ſi A) A B (B, hoc eſt $\frac{AB}{A} = B$, multiplicando B in A, prodibit AB. Ita, ſi 3) 12 (4, hoc eſt $\frac{12 = 3 \times 4}{3} = 4$; ducto 3 in 4 (Diviſore in Quotientem) prodibit, $3 \times 4 = 12$. Et ſimiliter in numeris grandioribus; ſi dividendo 154518 per 546 prodeat 283, vel eundem numerũ 154518 dividendo per 283 proveniat 546; vice verſa, multiplicando 546 in 283, vel hunc in illum, reſti-

tuetur numerus pridem dividendus 154518. Ut in calculo mox ante appoſito videre eſt.

Si autem, poſt peractam Diviſionem, aliquod ſuperfuerit Reſiduum; curandum eſt ut in probatione per multiplicationem inſtituenda, hoc etiam Reſiduum addatur: Secus enim non prodibit Dividendus integer, ſed mancus. Nam, verbi gratia, ſi numerus 387 per 24 diviſus exhibeat quotientem 16, & ſuperſint 3; hoc reſiduum indicat, quod in dividendo illo contineatur diviſor vicibus 16, (vel quotiens vicibus 24,) atq; inſuper numerus 3. Adeoq;, præter Diviſorem (vel Quotientem) toties poſitum (quod multiplicando præſtatur) adjungendus erit numerus ille 3.

```
      1 4 3
24) 3 8 7 ( 16
    2 4      24
              --
  1 4 4      64
            32
             3
           ---
           387
```

Ratio totius proceſſus (ſi illa ex jam dictis nondum ſatis intelligatur) ſic reddi poterit. Cum numerus multiplicandus toties in Producto contineatur, quoties Unitas in Multiplicatore, (nam toties eſt ille ponendus quoties jubet multiplicator;) ſi Diviſione quæratur, quoties in Producto contineatur Multiplicandus? prodire debet (ſi operatio recte peracta fuerit) pro diviſionis Quotiente, numerus idem qui prius fuerat multiplicator. Et contra, cum Diviſionis Quotiens oſtendat, quoties in Dividendo contineatur Diviſor, (vel præciſe, vel quanto cum reſiduo;) ſi Diviſor ille toties (multiplicando) ponatur, (&, ſiquod erat, adjiciatur reſiduum,) emergere debet numerus Dividendus; quippe ille in quo Diviſor toties ut dictum eſt continetur.

Præter has autem Multiplicationis & Diviſionis probationes, per operationem contrariam inſtituendas; poteſt utraq; per eandem operationem probari. Cum enim (ut ex ſuperius traditis patet) duorum numerorum invicem multiplicatorum, perinde eſt uter dicatur Multiplicator; (puta, perinde eſt, in exſemplis nuper appoſitis, ſive 283 per 546, ſive numerus hic per illum, multiplicetur:) *Ubi peracta eſt operatio, ſi de ἀκριβείᾳ dubitetur; qui prius erat numerus multiplicandus, jam fiat multiplicator, & vice verſa*; Et, ſi idem utrobiq; ſit numerus Productus, argumento erit proceſſum fuiſſe legitimum; ſin minus, erroneum.

Sic

Sic ductis 283 in 546, vel 546 in 283, prodibit utrobiq; 154518, ut ſupra patet.

Pariter in Diviſione; Cum non minus oſtendat Diviſor, quoties in Dividendo contineatur Quotiens; quam Quotiens, quoties in eodem Dividendo contineatur Diviſor; (quippe qui ita ſe habeat ad Dividendum, ut Factores in multiplicatione ad Factum;) Si de peracta diviſione occurrat dubium; *qui prius prodiit Quotiens jam fiat Diviſor*, & ſi jam prodeat pro Quotiente numerus ille qui tum fuerat Diviſor, argumento eſt operationem rite peractam eſſe; ſin ſecus, erratum eſſe. Verbi gratia; ſi dividatur 154518 per 546 prodibit quotiens 283; de quo ſi dubitetur, numerus idem 154518 dividatur per quotientem 283, & prodibit numerus 546, qui prius fuerat diviſor, (ut ſupra patet,) unde liquet operationem rite peractam eſſe. *Reſiduum autem, ſiquod eſt, idem eſſe debet utrobiq;*. Puta, cum diviſo numero 387 per 24, quotiens ſit 16, & reſiduum 3; ſi 387 dividantur per 16, quotiens erit 24, & reſiduum item 3: ut ex adjuncto calculo patet.

```
     6 13
16) 387 (24
     32
      64
```

Atq; hæ quidem ſive Multiplicationis ſive Diviſionis probationes, huc uſq; traditæ, in quacunq; Multiplicatione aut diviſione locum habent; ſive in numeris integris, ſive in Fractionibus Decimalibus, aliiſve; ſive in operationibus Algebricis & Symbolicis vel Speciosis; ſive item una, ſive plures ſint denominationes. Quippe idem eſt in omnibus proceſſûs fundamentum.

Quod autem de Probationibus Additionis & Subductionis ſuperius monuimus; idem de Multiplicationis & Diviſionis Probationibus pariter ſciendum eſt: Eas nempe non omnes ejuſdem eſſe generis; quippe aliæ certiores ſunt, & fallaciæ minus obnoxiæ, (quales ſunt, quas jam expoſuimus,) ſed laborioſæ magis, (& quæ quidem tantundem operis in examinandis quantum in peragendis operationibus poſtulant,) aliæ vero magis expeditæ, ſed quæ nonnunquam fortaſſe fallant.

Atq; huc quidem referri poteſt ea methodus examinandi Diviſionis operationem, per additionem multiplorum omnium ſubductorum, quæ (cum reſiduo ſi quod ſit) reſtituent

numerum

numerum Dividendum. Puta, ſi (in priori exſemplo) dividamus 154518 per 283, unde quotiens emergit 546; ſi omnia multipla (infra dividendum ſubſcripta) ſimul addantur, prodibit numerus Dividendus; quod ni fiat, erroris indicium eſt. Eſt autem hæc probatio admodum lubrica; quippe quæ ſolas ſubductiones examinat non item multiplicationes; & ſiquis prius, Diviſorem in ſingulas quotientis notas ducendo, error irrepſerit, idem adhuc intactus manet, neq; hac probatione omnino detegitur, quippe quæ multiplicationes illas, ſine examine, pro veris habet.

```
         1 6
       1 3 0 0
283) 1 5 4 5 1 8 ( 546
     1 4 1 5
       1 1 3 2
         1 6 9 8
     -----------
     1 5 4 5 1 8
```

Sicui autem nimis laborioſum videbitur, probationibus ſuperius traditis uti; adeoq; tantundem operis inſumere in operis examinatione ſeu probatione, quantum in ipſa operatione: Poterit breviorem illam probationem adhibere, quam *Novenariam* vocant, (qualem ſupra oſtendimus in probatione Additionis & Subductionis;) quæ ſic inſtituitur.

Numeri Multiplicandi notis omnibus indiſcriminatim additis (neglecta locorum conſideratione,) indeq;, quoties fieri poſſit, abjectis 9, reſiduum ſi quod ſit ſeorſim notetur (vel ſi nihil ſuperſit, ciphra;) Deinde & Multiplicantis notis omnibus ſimiliter additis, & abjectis novenis omnibus, reſiduum item notetur: Hæc duo reſidua invicem ducantur, & abjectis inde 9 quoties fieri poteſt, Reſiduum, ſiquod ſit, notetur: Deniq; ſi hoc reſiduum idem ſit atq; Reſiduum quod proveniet ex omnibus numeri Producti ſeu Facti notis, ita ut prius additis, abjectis novenis omnibus, indicium eſt (ſaltem probabile) operationem rite peractam eſſe; ſin ſecus, certiſſimum eſt alicubi erratum eſſe. Exſempli gratia: In Multiplicatione appoſita, Multiplicandi notæ addantur 2 + 8 = 10, 10 — 9 = 1, 1 + 3 = 4. Hoc reſiduum ſcribatur ad crucis ſiniſtram. Deinde in Multipli-

```
      2 8 3
      5 4 6            6
    -------
    1 6 9 8          4 X 6
  1 1 3 2
1 4 1 5                6
-----------
1 5 4 5 1 8
```

catore

catore, $5+4=9$, quibus abjectis, reliqua nota 6, ſcribatur ad crucis dextram. His Reſiduis invicem ductis, eſt $4\times 6=24$, unde bis abjectis 9, reſtant 6, (vel $2+4=6$:) Hoc Reſiduum ſuperne ſcribatur. Deinde numeri producti notæ ſic addantur, $1+5=6$, $6+4=10$, $10-9=1$, (vel $1+0=1$,) $1+5=6$, $6+1=7$, $7+8=15$, $15-9=6$ (vel $1+5=6$.) atq; hoc Reſiduum inferne ſcribatur. Deniq; quoniam duo Reſidua, ſuperne & inferne notata, deprehenduntur eadem; conjicio operationem rite peractam; ſin fuiſſent diverſa, certum eſſet admiſſum eſſe errorem.

In Diviſione, pari modo procedendum eſt. Addantur indiſcriminatim notæ Diviſoris, &, abjectis novenis omnibus, notetur reſiduum. Quotientis item notæ addantur, & abjectis novenis, notetur Reſiduum. His reſiduis invicem ductis, (& facto additis, ſiquód fuerit, Reſidui Diviſionis notis,) &, abjectis novenis, notetur & hoc Reſiduum. Deniq;, facta ſimili notarum Dividendi additione, & novenorum abjectione, quod tandem reſtat æquabitur (ſi operatio rite ſit peracta) Reſiduo proxime notato: Sin minus, erratum eſt. Sic in appoſita diviſione, Diviſoris notæ $1+6=7$, (quod notetur ad ſiniſtram.) Quotientis notæ $2+4=6$, (quod notetur ad dextram.) Factum ex his $7\times 6=42$, unde quater abjectis 9, reſtant 6, (vel $4+2=6$.) tum (quia poſt peractam diviſionem reſtabant 3) $6+3=9$: quibus abjectis manet 0, quod ſuperne noto. Deniq; in Dividendo $3+8+7=18$, unde bis abjectis 9, manet 0, (vel $1+8=9$, $9-9=0$) quod cum idem ſit atq; Reſiduum ſuperne notatum, conjicio operationem fuiſſe rite peractam.

```
       6 3
 16) 3 8 7 ( 24        0
     3 2             7 X 6
       6 4             0
```

Quod autem de Reſiduo Diviſionis dictum eſt; nempe ipſius notas addendas eſſe facto ex reſiduis Diviſoris & Quotiẽtis; pariter obtinet & in multiplicatione, ſi præter puram Multiplicationem accedat aliquod additamentum.

```
    16
    24             0
    64           7 X 6
   32              0
     3
   387
```

Puta 16 per 24 multiplicandum, & ſimul addendum 3, ut habeatur facti additiq; aggregatum 387: Ex multiplicandi notis emergit 7, ex multiplicantis 6, quorum factum $7 \times 6 = 42$, hoc eſt $4 + 2 = 6$, & (propter additamentum 3) $6 + 3 = 9$: & $9 - 9 = 0$; Sed & $3 + 8 + 7 = 18$, & $18 - 9 - 9 = 0$. unde conjicitur operationem rite peractam eſſe.

Fundamentum quo nititur hæc probatio, idem eſt quod ſupra docuimus de conſimili Probatione Additionis & Subductionis. Nempe quòd, ubi nulla locorum habetur ratio, tantundem valent 1 & 10, item 2 & 20, & pariter in ſimilibus: At idem eſt ſubſtituere 1 pro 10, atq; abjicere 9; item ſubſtituere 2 pro 20, atq; abjicere bis 9; & ſic in reliquis.

Monendum autem eſt (quod & de Additionis & Subductionis ſimili probatione monuimus) probationem hanc nonnunquam fallacem eſſe, neq; errorem ſemper detegere, (præſertim ſi is ob neglectam debitam locorum conſiderationem obtingat, quem fruſtra quis putet hinc detectum iri, cum nulla hic locorum habetur ratio:) Quamvis enim, ubi numeri non conveniunt, certum ſit erratum eſſe; non tamen certum eſt operationem recte procedere ubi conveniunt.

At interim (ne penitus abjiciendam putemus hanc probationem) probabile eſt (utut non certum) errorem ſiquis ſit (prærerquam qui ex indebito notarum ſitu oritur) hinc detectum iri, ſaltem niſi datâ induſtriâ fraus inſtituatur; raro enim (& quidem rarius quam quis putet) Errores ſiqui ſunt tam feliciter (vel potius infeliciter) conſpirant ut ſe mutuo tegant. Et propterea cum hæc probatio non adeo magno conſtet labore, non inutiliter adhiberi poterit.

Et quidem in prolixis præſertim Diviſionibus, operæ pretium eſſe poteſt eam ſæpius in ipſo operationis curriculo adhibere (quod quidem fieri poteſt poſt quamlibet Diviſoris promotionem) ne error in principio operis totum inſecuturum laborem plane fruſtraneum reddat.

Sed & minus univerſalis eſt hujuſmodi Probatio Novenaria; quippe quæ ſolis numeroſis operationibus convenit, non item Speciosis ſive Symbolicis, aut Algebricis; ut nec (niſi correctiones aliquoties adhibeantur) ubi plurium denominationum quantitates occurrunt. Cum enim ortum ducat hæc probatio ex graduum ſive locorum diſpoſitione in continua proportione

decupla

decupla; ubi hæc diſpoſitio non eſt, neque locus eſt huic probationi. Si verò Arithmeticis placuiſſet primitùs, pro decupla, aliam quamvis proportionem adhibuiſſe; potuiſſent etiam & illi, quæcunq; fuerit, hujuſmodi probationem aptaſſe: Non quidem abjiciendo ſingula novena, uti jam; ſed eum numerum, quoties fieri poſſit, abjiciendo, qui unitate minor ſit quam nomen iſtius qua proceditur continuæ proportionis: Puta, ſi (pro decupla) adhibuiſſent noncuplam, abjicienda eſſent (non novena, ſed) octona omnia; ſi octuplam, ſeptena; ſi ſeptuplam, ſena; ſi ſextuplam, quina; & ſimiliter de quavis aliâ.

Atq; hactenus de Probationibus tum Multiplicationis tum Diviſionis dixiſſe ſufficiat: quibus vel utendis vel negligendis ſuo quilibet utatur arbitrio.

Iiſdem autem, cum his probationibus, principiis nituntur hujuſmodi quæſtionum ſolutiones; (quibus ſe exercendo tyrones Multiplicationis & Diviſionis naturam & conſenſum mutuum melius perſentiſcent.) *Quæſtiunculæ familiares ſolvuntur.*

Quis numerus eſt, qui per 4 *diviſus, quotientem dabit* 3. Nempe 4 & 3 (Diviſore & Quotiente) invicem ductis, prodibit 12, numerus quæſitus Dividendus. Vel, quod eodem recidit, ſi numerus quæſitus, Dividendus, dicatur A; quoniam (juxta quæſtionis tenorem) $\frac{A}{4} = 3$; ſi pars utraq; multiplicetur per 4, erit $A = 3 \times 4 = 12$.

$$\frac{3}{12} \quad 4)12(3$$

$$\frac{A}{4} = 3.$$

$$A = 3 \times 4 = 12.$$

Item *Cujus numeri triens eſt* 235. Hoc eſt, Quis numerus per 3 diviſus, quotientem dabit 235. Eadem methodo, ductis invicem 235 & 3, prodibit numerus quæſitus 705; qui nempe per 3 diviſus quotientem imperatum exhibebit. Vel etiam quia 3) A (235, erit $A = 235 \times 3 = 705$.

$$\begin{array}{c} 235 \\ 3 \\ \hline 705 \end{array} \quad 3)705(235 \quad \frac{705}{3} = 235$$

$$\frac{A}{3} = 235$$

$$A = 235 \times 3 = 705$$

Item (in numeris grandioribus) *Quot aurei diſtribuendi ſunt inter milites* 2646, *ut quiſq; habeat* 283? Hoc eſt, quis numerus dividendus eſt per 2646, ut prodeat 283; vel, per 283, ut prodeat quotiens 2646? Ductis invicem 2646 & 283, prodibit numerus quæſitus 748818.

```
  2646          2646) 748818 (283
   283
  ----          283) 748818 (2646
  7938
 21168
 5292
------
748818
```

$$\frac{748818}{2646} = 283.$$

$$\frac{748818}{283} = 2646$$

Contra vero, ſi quæratur *Quis numerus eſt qui in 4 ductus faciet* 12? Factum 12 dividatur per 4 (alterum ex factoribus) & prodibit reliquus Factor quæſitus 3.

4) 12 (3 $\quad 3 \times 4 = 12$

Vel, ſi numerus quæſitus dicatur A; cum ſit (juxta quæſtionis tenorem) $A \times 4 = 12$, dividendo utramq; æquationis partem per 4, erit $A = \frac{12}{4} = 3$.

$A \times 4 = 12 \quad A = \frac{12}{4} = 3.$

Item *Cujus numeri triplum eſt* 705? Hoc eſt, quis numerus in 3 ductus faciet 705? Si numerus factus 705 dividatur per factorem datum ſeu cognitum 3, prodibit *Factor* quæſitus 235. Vel, quia $A \times 3 = 705$, erit $A = \frac{705}{3} = 235$.

```
   1 1
3) 7 0 5 (2 3 5
   3 3 3
          235
            3
          ---
          705
```

$A \times 3 = 705.$

$A = \frac{705}{3} = 235.$

Item, *Inter quot milites diſtribuendi ſunt* 748818 *aurei, ut quilibet habeat* 283. Diviſis 748818 per 283, prodibit militum numerus quæſitus. Et pariter in ſimilibus.

```
          1
         136
        18209
283) 748818    (2646
      566          283
     1698        -------
      1132        7938
       1698     21168
               5292
               ------
               748818
```

Si autem quæratur, Verbi gratia, *Quinam numeri ſint invicem ducendi ut factus ſit* 24? Vel *Quis per quem dividendus, ut quotiens ſit* 24? Hujuſmodi quæſtiones nugaces eſſent; quippe ex datis in quæſtione nihil certi elicitur: poſſet enim modis innumeris reſponderi: puta 1×24, 2×12, 3×8, 4×6, $2 \times 2 \times 6$, $4 \times 2 \times 3$, $2 \times 8 \times 1\frac{1}{2}$, $\frac{48}{2}$, $\frac{72}{3}$, $3)\frac{144}{2}$, $2)\frac{24}{1} \times 6$, &c. Nam ex ſolo facto in multiplicatione, de Factoribus neutiquam conſtabit; ut nec, in Diviſione, ex ſolo Quotiente conſtabit de Dividendo aut Diviſore. Sed de his hactenus.

Atq; hactenus quidem de quatuor Arithmetices (ut vocantur) Speciebus, ſeu potius Partibus, Additione, Subductione, Multiplicatione, & Diviſione, dicta ſufficiant. Multa autem quæ de his operationibus apud Arithmeticæ practicæ magiſtros paſſim occurrunt, & ſpeciatim operationum aliquot in nonnullis compendia, varioſq; modos has operationes peculiaribus ſubjectis applicandi, (puta, in re nummaria, de fœnore, de mercatura, in re aſtronomica, de tempore, de motu, eorumq; reductionibus, &c.) ſciens prætereo. Quippe infiniti eſſet laboris, & quidem ſupervacanei, ea omnia quæ id genus dici poſſent ſigillatim proſequi. Nec quidem id noſtri operis eſt; ſed potius operationum fundamenta tradere, ipſoſq; fontes aperire, unde ſcientifice & demonſtrative poſſint veræ procedendi rationes intelligi. Quas qui rite intelligit, non modo majori fructu & voluptate ipſas operationes exercebit, eaſq; in uſum proferet, quam ſi cæco ductu incedat, & quaſi Andabatarum more pugnet; ſed & multo firmius quæ novit memoria retinebit. Quas enim ſæpius audimus querelæ, Rerum Mathematicarum cognitionem, Arithmetices præſertim, citiſſime deperditam iri niſi aſſidua exercitatione retineatur; non aliunde oriuntur

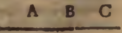
untur, quam quod pleriq; Arithmetices praxin, ſive operandi methodum, memoriter tantum edocti, ipſas operandi rationes penitus ignorent; quas quidem vulgares Arithmeticæ practicæ Magiſtri plerumq; vel ipſi neſciunt, vel ſaltem plus ſatis reticent; eiſq; edocti Mechanicam potius (regulas minime intellectas perſequendo) exercent, quam Arithmeticam. Qui autem ipſius praxeos rationem ſatis perſentiſcunt, (nec tantum cæco itinere, regularum memoriter edoctarum ductum implicita fide ſecuti, incedunt,) judicio magis quam memoria ducti, difficilius ea quæ intimis hauſerunt medullis evulſum iri patientur.

CAP. XXII.

Multiplicationis exercitium in Parallelogrammis Rectangulis menſurandis, & invicem comparandis. Diviſionis in Parallelogrammis Rectangulis exercitium.

PRiuſquam Multiplicationis & Diviſionis (quarum praxis ſuperius oſtenſa eſt) negotium dimittam; nec inutile forſan erit, nec injucundum, pauca ſubtexere quibus utriuſq; utilitas innoteſcat, atq; interim Geometriæ cum Arithmetica ſumma conjunctio percipiatur. Quamvis enim Arithmetica, quæ de Numeris agit, Geometricas menſuras per ſe non attingat; ſed, propriis principiis nixa, neq; Geometriæ auxilio indigens, regulas abſtractas tradit, omni numerabili pariter applicabiles; (objectum quippe ſimplicius & latius nacta quam Geometria:) cum tamen objectum Geometriæ, viz. menſura, intra objecti Arithmetices terminos cadat, (quippe cujus partes numerantur;) non abs re erit, Arithmetices exercitium in re Geometrica paucis oſtendere.

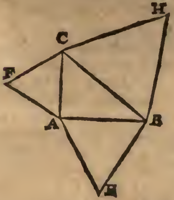
Hoc autem, dum de Additione & Subductione verba fecimus, parcius egimus, quia non magni forſan res videri poſſit, lineam lineæ adjungere, vel etiam demere, dum utraq; data ſit. Puta, ſi lineæ datæ A B adjungere oporteat lineam datam B C; vel datæ A C datam B C auferre. Cui tamen operi perficiendo

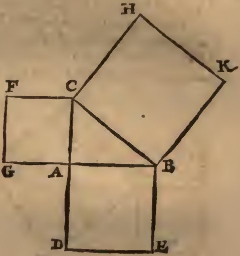


aptata

aptata videmus tria ſucceſſive problemata; nempe Prop. 1.2.3. primi Euclidis. Illæ autem propoſitiones, cum ſint pure Geometricæ, poſſunt in traditione Arithmetica tuto omitti.

Quod autem de Angulorum, Superficierum, aut ſolidorum, Additione vel Subductione dici poſſit; Vel erit penitus Geometricum, neq; ad calculum omnino ſpectans; nempe ſi Anguli, ſuperficies, aut corpora, immutata adjungantur; ut, ſi dato Quadrato A B E D, vel A C F G, addendum eſſet Triangulum ABC; ubi nihil requiritur aliud, quam ipſorum in dato ſitu fabricam Geometricam: Vel, ſicubi calculo opus ſit, non ſolum Additione aut Subductione opus erit, ſed ut plurimum





Multiplicatione item vel diviſione; ubi nempe proportionum ratio habenda eſt; ut, ſi quæratur Quadratum BCHK, æquale quadratis ABED & ACFG ſimul ſumptis; vel Triangulum BCH, æquale ſimilibus ABE, ACF, ſimul ſumptis: aut ſi quæratur Quadratum ABED, æquale quadrato BCHK dempto quadrato ACFG; vel Triangulum ABE, æquale triangulo BCH dempto triangulo ACF, ubi præter figurarum additionem & ablationem, earum item aggregati vel reſidui transformatio requiritur. Ideoq; de hujuſmodi Additionibus vel Ablationibus, priuſquam de Multiplicatione & Diviſione dixerimus

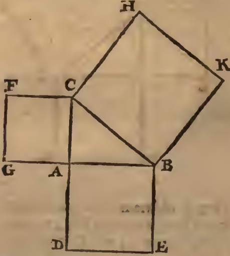
mus, non ita opportunum erat verba facere.

Ut vero quæ de Multiplicatione & Diviſione jam tradidimus, Geometricis menſuris applicentur, præmittenda ſunt e Geometria quædam ad terminorum explicationem neceſſaria. Et quoniam ex menſura Parallelogrammi Rectanguli (quod, brevitatis gratia, ſimpliciter Rectangulum dici ſolet) reliquarum figurarum dimenſiones deduci ſolent; de Parallelogrammo præmittendæ ſunt quædam Definitiones, hoc eſt, Terminorum explicationes.

Definitiones aliquot Geometricæ.

Parallelogrammum appellant figuram planam quadrilateram, cujus oppoſita latera, ſeu laterales lineæ, ſunt rectæ parallelæ, hoc eſt, *æquidiſtantes, ſive æqualem ubiq; habentes inter ſe diſtantiam.* Quales ſunt quæ in Schematis mox apponendis conſpiciuntur.

Parallelogrammum vero tunc *Rectangulum* dicitur, *quando ipſius omnes anguli ſunt recti.* (Vel etiam, *Cujus angulus aliquis eſt rectus*: Nam ſi Parallelogrammum habeat vel unum angulum rectum, reliquos item omnes rectos eſſe facile eſt demonſtratu.)

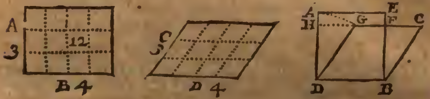


Angulus autem *Rectus* tunc eſſe dicitur, *quando linea recta in rectum angulum faciens ita recte incidit ut neutrò magis inclinet.* Ut in figura pridum appoſita, recta C A in rectam GAB ita recte incidens ut non magis hac quam illac inclinet, facit angulos CAB, CAG, rectos. Et ſimiliter anguli ad FGH &c. recti ſunt.

Siquà vero inclinet magis, angulum *obliquum* facit: Nempe *Acutum* (quippe *angulo recto minorem*) *eà qua propendet* ſeu magis inclinat; vel *Obtuſum* (*angulo recto majorem*) *ea unde reclinat* ſive diverget magis. Puta, ſi recta C A, quæ jam erecta eſt, ſupponatur verſus A B nutare ſeu propendere, adeoq; ab AG reclinari, pro duobus angulis jam rectis, fierent duo obliqui, CAB acutus, & CAG obtuſus; qui tamen ſimul ſumpti duobus illis rectis ſunt æquales; nam quanto unus propter inclinationem

clinationem minuitur, tanto alter propter reclinationem augetur; quodq; huic accedit illi aufertur. Similiter, angulus ABC acutus eſt, quippe recto minor; AEK obtuſus, quippe recto major. Et ſimiliter aliàs.

Parallelogrammum autem *Rectangulum*, *ſi latera habeat omnia invicem æqualia, Quadratum dicitur*; quale eſt, in figura tertia, ADEE: *Sin minus Oblongum*; quale eſt figura prima AB.



Parllelogrammum vero *Obliquangulum* (hoc eſt, *cujus anguli ſunt obliqui*) *ſi latera habeat omnia invicem æqualia, Rhombus dicitur*; ut in figura tertia, GDBC: *Sin ſecus, Rhomboides*; ut figura ſecunda CD.

Contineri vero vel *comprehendi* dicitur *Parallelogrammum Rectangulum* (ſive quadratum ſit, ſive oblongum,) *duabus rectis lineis quæ rectum comprehendunt angulum*. Definiente Euclide 1 d 2. Non quidem eo ſenſu quo ipſe alibi negat, *duabus rectis lineis ſpacium comprehendi*; (non enim duabus ſed quatuor rectis hoc ſenſu parallelogrammum continetur, hoc eſt, ambitur ſive undiquaq; concluditur;) ſed quia duabus illis parallelogrammi rectanguli ſpacium ſive area determinatur, quippe altera longitudinem, altera latitudinem determinat At in Parallelogrammis Obliquangulis, ſecus eſt: non duabus rectis circa angulorum obliquorum quodvis poſitis determinabitur iſtius parallelogrammi magnitudo; ſed major, minorve erit, prout obliquitas minor majorve fuerit; adeoq; præter rectarum longitudinem, anguli etiam ſive obliquitatis determinatione opus erit, ut determinetur Parallelogrammi magnitudo. Et propterea, neq; in hac definitione, nec (quantum memini) apud Euclidem alibi, Parallelogrammum Obliquangulum duabus ejuſmodi circa ipſius quodvis angulum poſitis contineri dicitur. Si cui vero ſic libeat loqui, anguli præterea mentionem

facere oportet ut magnitudinem determinet.

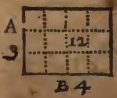
Parallelogrammi Rectanguli menſuratio.

His præmiſſis, *Ad Parallelogrammi Rectanguli aream ſive magnitudinem inveniendam, nil aliud requiritur quam ut duarum rectarum quibus contineri dicitur, altera in alteram ducatur, ſive multiplicetur.* Exſemplo res evadet perſpicua.

Sint expoſiti Parallelogrammi Rectanguli latera circa rectorum angulorum quodlibet, duæ rectæ, quarum altera ſit trium, altera quatuor pedum, (vel palmorum, calamorum, orgyiarum, ſpithamarum, aut quarumlibet aliarum menſurarum æqualium.) Rectanguli magnitudo ſive area reperitur ductu linearum unius in alteram, longitudinis puta in latitudinem, vel contra: eodem plane modo quo totidem numerorum ſeries eſſent computandæ. Si enim, verbi gratia, tot puncta, vel (ſi libet) tot milites ordinatim digeſti, eâ lege diſponantur, ut, in qualibet ſerie tranſverſa, quaterni, in qualibet directa, terni conſpiciantur: manifeſtum eſt ter quaternos, vel quater ternos, ita eſſe diſpoſitos. Multiplicatis igitur 4 per 3, vel 3 per 4, emerget omnium numerus 12 $= 3 \times 4$. Et pariter in ſimili quavis cujuſvis numeri diſpoſitione faciendum erit.



Eodem modo Parallelogrammum 3 pedes latum, & 4 pedes longum ex ductu latitudinis in longitudinem, reperietur pedum quadraticorum $12 = 3 \times 4$. Cujus quidem rei ratio ſic facile percipietur. Si enim parallelogrammi iſtius tam altitudo ſive latitudo A, pedum trium, quam baſis ſive longitudo, pedum 4, dividi ſupponantur in ſuos reſpective pedes; atq; a cujuſq; pedis termino ducantur rectæ lateribus parallelæ, quibus tota figura in particulas quadratas dirimatur, quarum qualibet ſit tam longa quam lata pedem unum, (hoc eſt, qualibet contineat pedem quadratum;) manifeſtum erit, ex ipſo Schematis inſpectu, in qualibet ſerie tranſverſa (propter longitudinem quatuor pedum) quatuor quadraticos pedes contineri, ipſasq; ſeries (propter altitudinem trium pedum) numero tres eſſe; adeoq; pedes quadraticos omnes eſſe ter quaternos, hoc eſt $12 = 4 \times 3$. Et quidem, pari ratione, manifeſtum



ſtum erit (propter $A = 3$) ſingulis ſeriebus erectis tres pedes quadraticos contineri, ipſaſq; ſeries (propter $B = 4$) numero quatuor; adeoq; pedes quadraticos omnes eſſe quater ternos, hoc eſt $12 = 3 \times 4$. Et ſimiliter in aliis quibuſvis Parallelogrammis rectangulis menſurandis (ſive quadrata ſint ſive oblonga) ex ductu longitudinis in latitudinem, ſive (quod tantundem valet) baſis in altitudinem (vel hujus in illam,) habetur area.

Atq; hinc colligere licet, *Pedem quadraticum unum, continere Digitos ſive Uncias,* 144. Cum enim longitudo Pedis unius ſit unciarum 12; Et propterea Pedis quadratici tam longitudo quam latitudo ſit 12 unc. ex ductu hujus in illam emergit area $12 \times 12 = 144$ unciarum quadraticarum. Adeoq;, utut pes linealis contineat non niſi 12 uncias lineales; pes tamen quadraticus continet uncias quadraticas 144. Eodem modo cum apud nos *communis Virga menſoria officinarum* (*a Yard dicta*) *contineat longitudine pedes tres; eadem menſura quadratica continebit pedes quadraticos* $9 = 3 \times 3$.

Hæc ſi per ſymbola libeat explicare; pro latitudine ſeu altitudine ponatur A, pro longitudine ſeu baſi B; erit igitur Area ſeu magnitudo AB, ſive $A \times B$. Ergo ſi $A = 3$, & $B = 4$, erit $AB = 3 \times 4 = 12$. In quadratis autem, ubi longitudo latitudini eſt æqualis, erit $AB = AA = Aq$. Adeoq;, cum longitudo pedis unius ſit 12 unciarum; & propterea pedis quadratici tam baſis quam altitudo 12 unc: ideoq;

$$\begin{array}{r} A = 3. \\ B = 4 \\ \hline AB = 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} A = P = 12\,U \\ B = P = 12\,U \\ \hline AB = PP = Pq = 144\,UU = 144\,Uq. \end{array}$$

$AB = PP = Pq = 12\,U \times 12\,U = 144\,UU = 144\,Uq.$ Hoc eſt, $Pq = 144\,Uq$, vel unus Pes quadraticus æqualis 144 Unciis quadraticis. Et eodem modo, in Virga quadratica, cum tam baſis quam altitudo ſit pedum 3, erit area $Vq = 9\,Pq$. Et ſimiliter alibi.

$$\begin{array}{c} A = V = 3\,P \\ B = V = 3\,P \\ \hline AB = Vq = 9\,Pq \end{array}$$

Hac methodo, *In menſurandis*, verbi gratia, *Aſſerculis ligneis*; ſi Aſſeris unius latitudo A ſit duum pedum, longitudo B pedum 20; erit area ſive magnitudo AB = 40 P q; hoc eſt pedum quadraticorum quadraginta.

A = 2 P
B = 20P
AB = 40Pq

Similiter, *Si Camera menſuranda* ſit longa pedes 18, lata pedes 12, erit totius area ſeu magnitudo, pedum quadraticorum 216 = 12 × 18.

A = 12 P
B = 18 P
AB = 216 P q

De Parallelogrammis Rectangulis invicem comparatis.

Pariter, cum *terræ Jugerum Anglicanum* (*Acra*, vulgo dicta) *ſtatuta lege cenſeatur inſtar Parallelogrammi Rectanguli, Perticas 4 lati, longi vero 40: continebit area Perticas quadraticas* 160 = 4 × 40. Vel etiam, cum Perticæ longitudo ſit pedum $16\frac{1}{2}$; adeoq; 4 Perticæ ſint pedes 66; & perticæ 40, pedes 660: Idem terræ Jugerum ſive *Acra valebit pedes quadraticos* 43560 = 66 × 660.

A = 4 Pert.
B = 40 P.
AB = 160 P q.

A = 66 Ped.
B = 660 P.
AB = 43560 P q.

Hinc etiam patet, *varia eſſe poſſe parallelogramma, quorum magnitudo ſit æqualis, ambitus autem admodum inæqualis; & contra,* ambitus æqualis, at magnitudo inæqualis; & quidem eouſq; ut *quorum ambitus major eſt, eorum area ſeu magnitudo ſit minor.* Exſempli gratia.

Sit Rectanguli primi latus quodlibet ſex pedum; erit area, pedum 36 = 6 × 6. Secundi latitudo, pedum 4, longitudo pedum 9; erit area, pedum 36 = 4 × 9. Tertii latitudo pedum 3, longitudo 12; erit area 36 = 3 × 12. Quarti latitudo pedum 2, longitudo 18; erit area 36 = 2 × 18. Quinti deniq: latitudo 1, longitudo 36, erit area item 36 = 1 × 36. Eſt igitur eadem ſingulorum area ſeu magnitudo; nempe pedum quadraticorum 36: at eorum ambitus longe diverſi; quippe primi, pedum 24 = 6 + 6 + 6 + 6; ſecundi, 26 = 4 + 9 + 4 + 9; tertii, 30 = 3 + 12 + 3 + 12; quarti, 40 = 2 + 18 + 2 + 18; quinti, 74 = 1 + 36 + 1 + 36, nempe plus quam triplo major quam primi.

Deinde, ſit Rectangulum primum (ut prius) longum & latum pedes 6, Secundum, latum pedes 5, longum pedes 7: Tertium, latum 4, longum 8: Quartum, latum 3, longum 9: Quintum, latum 2, longum 10: Sextum, latum 1, longum 11. Erunt hæc omnia Iſoperimetra, quippe perimeter; ſive ambitus ubiq; pedum: $24 = 6+6+6+6 = 5+7+5+7 = 4+8+4+8 = 3+9+3+9 = 2+10+2+10 = 1+11+1+11$. At magnitudines longe diverſæ: quippe primum eſt pedum quadraticorum $36 = 6 \times 6$; ſecundum, $35 = 5 \times 7$; tertium, $32 = 4 \times 8$; quartum, $27 = 3 \times 9$; quintum, $20 = 2 \times 10$; ſextum deniq; $11 = 1 \times 11$, plus triplo minus quam erat primum.

Deniq; ſit expoſitum Parallelogrammum rectangulum, cujus latitudo ſit pedis 1, longitudo, 11; adeoq; ambitus $24 = 1+11+1+11$, area vero pedum quadraticorum $11 = 1 \times 11$. Ad quod comparentur alia quatuor, quorum primum ſit latum pedes 2, longum 9; ſecundum, latum 3, longum 8; tertium, latum 4, longum 7; quartum latum 5, longum 6, erit ſingulorum ambitus minor quam parallelogrammi expoſiti, (quippe pedum 22, cum illius fuerit pedum 24:) area vero major; nempe primi, pedum quadraticorum 18, ſecundi 24, tertii 28, quarti 30, expoſiti vero non niſi 11.

Ex quibus omnibus abunde patet, *quam lubricum ſit figurarum magnitudinem ex ſolo ambitu æſtimare.*

Porro; Hinc liquet etiam, *ex Parallelogrammis Rectangulis Iſoperimetris* (hoc eſt, quorum ambitus ſunt invicem æquales,) *Quadratum eſſe omnium maximum; Oblongorum vero illud majus eſt quod proprius ad Quadratum accedit*, hoc eſt, cujus laterum differentia minor eſt. Quod ſic probatur. *Rectangulorum Iſoperimetrum, quodnam eſt maximum.*

Sit quadrati cujuſvis latus A; erit ipſius quadrati area $A \times A = Aq$. Deinde fiat Rectangulum oblongum, quadrato illi

A	A + C	A + C	A
+ A	+ A − C	in: A − C	× A
+ A	+ A + C	Aq + AC	Aq
+ A	+ A − C	− AC + Cq	
4A	4A ± 0	Aq − Cq	

$$\begin{array}{l} A + C \\ \text{min: } A - C \\ \hline \text{diff } 2C \end{array}$$

 iſoperi-

iſoperimetrum: Quod ut fiat, tantundem addendum eſt longitudini, quantum latitudini aufertur; illud autem quantumcunque ſit dicatur C; fietq; longitudo A + C, latitudo A — C; adeoq; Rectangulum Quadrato Iſoperimetrum, quippe utriuſvis ambitus 4 A, ut laterum utrobiq; additione patet. Erit Oblongi hujus area (ductu longitudinis in latitudinem inventa) A q — C q, (ut multiplicando patet;) adeoq; minor quam area quadrati, A q; quod erat primo probandum. Sed & tanto minor eſt quantum eſt quadratum quantitatis C, (ut patet;) hoc eſt, quadratum ſemidifferentiæ laterum, (nam ſi ex A + C, auferatur A — C, reſiduum ſive differentia eſt 2 C, ut ſubducendo patet:) & propterea quo majus eſt C q, eo plus ab A q deficit oblongum, & proinde minus eſt; & contra: quod erat ſecundo probandum.

Poteſt quidem hoc ipſum Geometrice demonſtrari; at ego demonſtrationem Arithmeticam hanc ideo adhibui, quòd ea præſenti negotio magis ſit accommoda, (dum Arithmetices uſum in rebus Geometricis oſtendo,) & quidem per ſe magis univerſalis. Geometricam vero demonſtrationem ſiquis poſtulet, hanc habeat.

Sit quadratum quodvis ABCD, (puta longum & latum 4 pedes,) eiq; iſoperimetrum Rectangulum oblongum BEFG, (puta longum pedes 5, latum 3,) tanto nempe magis longum quanto eſt minus latum quam eſt Quadratum illud. Eſt autem rectangulum AKGB utriq; illorum commune; cui ſi addatur rectangulum KC, abſolvitur quadratum AC; ſin addatur rectangulum KE, abſolvitur oblongum GE.



At Additamentum KC majus eſt additamento KE, (ut mox probabitur,) adeoq; (propter commune AG) quadratum AC majus oblongo GE, (quia ſi æqualibus addantur inæqualia, aggregata erunt inæqualia, illud autem majus ubi plus additur.) Quod autem KC majus eſt, & quantò majus, quam KE, ſic oſtenditur. Rectangulum KC æquatur toti ED (quia longitudines AD, DC, æquales ſunt, quippe latera quadrati, & latitudines KF, KD, æquales

æquales item ex hypotheſi, quippe tantundem additur quadrati longitudini quantum latitudini aufertur; & anguli utrobique recti,) majus igitur eſt K C quam K E, (quippe æquale toti $ED = KE + KH$,) eorumque differentia eſt K H quadratum (propter K F, KD, rectas æquales,) hoc eſt, quadratum rectæ K F, vel KD, ſemidifferentiæ laterum. Et propterea, in rectangulis Parallelogrammis Iſoperimetris, cujus laterum differentia minor eſt, illud eſt majus: & cujus laterum differentia nulla eſt (nempe quadratum) id omnium maximum. Quod erat demonſtrandum.

Verum ut Multiplicationis ope, quæ jam tradidimus, peracta ſunt omnia, ita & Diviſione pariter ſimilia fere problemata abſolvi poſſunt. Verbi gratia.

Diviſionis exercitium in Parallelogrammis rectangulis.

Cum ſupra oſtenſum eſt, pedem quadraticum valere 144 uncias quadraticas, (quippe $12 \times 12 = 144$.) Si *aſſerculus ligneus* ſit 8 uncias latus; quæritur quam longus ſit oportet, ut habeatur pes quadraticus. Dividendo 144 (aream datam) per 8 (datam latitudinem) habetur longitudo quæſita $18 = \frac{144}{8}$, quippe area A B per latitudinem A diviſa exhibet longitudinem quæſitam B. Sin data eſſet longitudo 18, area 144 per eam diviſa exhiberet latitudinem $8 = \frac{144}{18}$. Vel B) A B (A.

8) 144 (18
A) A B (B

18) 144 (8
B) A B (A.

Eodem modo. Cum *Jugerum Anglicanum* (ut ſupra dictum eſt) contineat Perticas quadratas $160 = 4 \times 40$. In agro (parallelogrammo) cujus latitudo eſt perticarum 8, quæritur, quanta ſit oporteat longitudo, ut habeatur Jugerum terræ? Dividendo 160 per 8, habetur longitudo quæſita $20 = \frac{160}{8}$. Vel, data longitudine 20, dividendo habetur latitudo 8. Hoc eſt A) A B (B. & B) A B (A.

8) 160 (20
20) 160 (8

A) A B (B
B) A B (A

Pari modo, Si *Planities Cameræ* pedes 12 lata, longa vero 20; tegenda ſit aſſerculis ligneis latis pedes 2: quanta ſumenda eſt aſſerculorum (conjunctorum omnium) longitudo, ut operi ſufficiant? Primo, ducta latitudine 12, in longitudinem 20, habetur area.

12
20
2) 240 (120

pedum.

pedum quadraticorum $240 = 12 \times 20$. Deinde, dividendo aream 240, per aſſerculorum latitudinem 2, habetur longitudo quæſita 120.

Item. Si tapeti *holoſericæ* longæ pedes 24, latæ 8; inducendus ſit a tergo pannus vilior latitudinem habens pedum 6: quæritur quanta longitudo requiritur ut operi ſufficiat? Primo, ducendo 24 in 8 habetur area tota $192 = 24 \times 8$. Deinde aream totam 192 per 6 latitudinem panni dividendo, habetur longitudo quæſita, $32 = \frac{192}{6}$. Et ſimiliter alibi.

$$\begin{array}{r} 24 \\ 8 \\ \hline 6)\,192\,(32 \end{array}$$

Atq; hactenus tum Multiplicationis tum Diviſionis exercitium, in menſurandis Parallelogrammis Rectangulis quantum opus eſt, oſtendimus.

CAP. XXIII.

Euclidis Elementum ſecundum Arithmeticè demônſtratur.

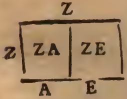
EAdem qua ſupra methodo; ex ſolo parallelogrammi rectanguli calculo, totum fere Elementum ſecundum Euclidis facile demonſtratur Arithmetice. Exſempli gratia,

1 e 2. *Si ſint duæ rectæ* (puta R, B,) *quarum altera* (B) *ſecetur in quotcunq; partes* (puta M, N, O,) *rectangulum duabus illis rectis comprehenſum* ($R \times B = RB$;) *æquale eſt iis rectangulis quæ recta inſecta* (R) *& ſingulis ſectæ ſegmentis comprehenduntur.* Hoc eſt, Si $B = M + N + O$, eſt $RB = RM + RN + RO$. Quod ex multiplicationis calculo patet. Vel, ſi ponantur R, B, M, N, O, æquales numeris 4, 10, 5, 3, 2. erit $4 \times 10 = 4 \times 5 + 4 \times 3 + 4 \times 2$. ut ex calculo item patet.



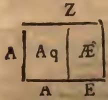
$$\begin{array}{l} B = M + N + O \\ \;R \quad\; R \\ \hline RB = RM + RN + RO \end{array} \qquad \begin{array}{l} 10 = 5 + 3 + 2 \\ \quad 4 \quad 4 \\ \hline 40 = 20 + 12 + 8 \end{array}$$

2 e 2. *Si recta linea* (Z) *ſecetur utcunq;* (in A & E,) *rectangula quæ tota et utroq; ſegmento comprehenduntur* (ZA + ZE) *æquantur quadrato totius,* (Zq.) Hoc eſt, ſi $Z = A + E$, eſt $Zq = ZA + ZE$. Vel ſi tota ſit 5, ſegmenta 3, 2: erit $5 \times 5 = 5 \times 3 + 5 \times 2$.



$$\begin{array}{l} Z = A + E \\ Z \quad\; Z \\ \hline Zq = ZA + ZE \end{array} \qquad \begin{array}{l} 5 = 3 + 2 \\ \;5 \quad 5 \\ \hline 25 = 15 + 10 \end{array}$$

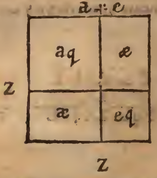
3 e 2. *Si recta* (Z) *ſecetur utcunq;* (in A, E,) *Rectangulum tota et uno ſegmentorum comprehenſum* (ZA,) *æquatur rectangulo ſegmentis comprehenſo* (AE) *una cum prædicti ſegmenti quadrato* (Aq.) Hoc eſt, Si $Z = A + E$; erit $ZA = AE + Aq$: vel (in numeris) ſi $5 = 3 + 2$, erit $5 \times 3 = 3 \times 3 + 2 \times 3$.



$$\begin{array}{l} Z = A + E \\ \;A \quad A \\ \hline ZA = Aq + AE \end{array} \qquad \begin{array}{l} 5 = 3 + 2 \\ \;3 \quad 3 \\ \hline 15 = 9 + 6 \end{array}$$

4 e 2. *Si recta* (Z) *ſecetur utcunq,* (in A, E:) *Quadratum totius* (Zq) *æquale eſt quadratis ſegmentorum* (Aq + Eq) *una cum rectangulo ſegmentis comprehenſo, bis ſumpto,* (2 AE.) Hoc eſt, ſi $Z = A + E$; eſt $Zq = Aq + Eq + 2\,AE$. vel (in numeris) ſi $5 = 3 + 2$. erit $5 \times 5 = 3 \times 3 + 2 \times 2 + 3 \times 2 + 3 \times 2$,

$$\begin{array}{ll} Z = A + E & 5 = 3 + 2 \\ Z \quad A + E & 5 \;.\; 3 + 2 \\ \hline Aq + AE & 9 + 6 \\ \quad + AE + Eq & \quad + 6 + 4 \\ \hline Zq = Aq + 2AE + Eq & 25 = 9 + 12 + 4 \end{array}$$



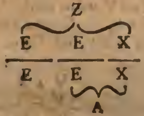
5 e 2. *Si recta* (Z) *ſecetur in ſegmenta æqualia* (S, S,) *& inæqualia* (A, E, vel S + V, S — V,) *rectangulum ſegmentis totius inæqualibus comprehenſum,* (AE,) *una cum quadrato rectæ inter puncta ſectionum* (Vq;) *æquatur quadrato dimidiæ,* (S q.) Hoc eſt, Si $Z = 2S = A + E$, ſitq; $S + V = A$, $S - V = E$, (adeoq; $A - S = V = S - E$.) Erit $AE + Vq = Sq$. Vel (in numeris) ſi $12 = 6 + 6 = 8 + 4$; adeoq; $8 - 6 = 2 = 6 - 4$. Erit $8 \times 4 + 2 * 2 = 6 \times 6$.

$$\begin{array}{cc} \overbrace{S \quad V + E}^{S} & \overbrace{6 \quad 2 + 4}^{6} \\ \hline \underbrace{S + V}_{A} \quad E & \underbrace{6 + 2}_{8} \quad 4 = 6 - 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} S + V = A & 6 + 2 = 8 \\ S - V = E & 6 - 2 = 4 \\ \hline Sq + SV & 36 + 12 \\ \quad - SV - Vq & \quad - 12 - 4 \\ \hline Sq - Vq = AE & 36 - 4 = 32 \\ Sq = AE + Vq. & 36 = 32 + 4 \end{array}$$

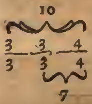
6 e 2

6 e 2. *Si recta* (2 E) *biſariam ſecetur; eiq; adjiciatur in directum recta quædam* (X :) *Rectangulum quod tota cum adjectâ* (2 E + X quæ dicatur Z) *& ipſa adjectâ* (X) *comprehenditur* (Z X;) *ſimul cum quadrato dimidiæ* (Eq:) *æquatur* (Aq) *quadrato compoſitæ ex dimidia & adjecta;* (E + X, quæ dicatur A.) Hoc eſt, ſi E + E + X = Z, & E + X = A: erit ZX + Eq = Aq. Vel (in numeris) ſi 3 + 3 + 4 = 10, & 3 + 4 = 7: erit 10 × 4 + 3 × 3 = 7 × 7.



$$\begin{array}{rcl} Z & = & 2E + X \\ \times X & & \times X \\ \hline ZX & = & 2EX + Xq \\ + Eq & & + Eq \\ \hline ZX + Eq & = & Eq + 2EX + Xq \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} E + X & = & A \\ E + X & = & A \\ \hline Eq + EX & & A \\ + EX + Xq & & \times A \\ \hline Eq + 2EX + Xq & = & Aq \end{array}$$

$$ZX + Eq = Eq + 2EX + Xq = Eq + 2EX + Xq = Aq$$



$$\begin{array}{rcl} 10 & = & 6 + 4 \\ \times 4 & & \times 4 \\ \hline 40 & = & 24 + 16 \\ + 9 & & + 9 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 3 + 4 & = & 7 \\ 3 + 4 & = & 7 \\ \hline 9 + 12 & & 7 \\ + 12 + 16 & & \times 7 \end{array}$$

$$40 + 9 = 9 + 24 + 16 = 9 + 24 + 16 = 49$$

Sed & hæc cum præcedente ſic conjunctim efferri poteſt. *Si ab aſſignato in eadem recta* (*utcunq; continuata*) *puncto* M, *ſumantur tum æquales utrinq; rectæ* M L, M N, *tum punctum* D *ubivis* : *rectangulum* L D N *æquabitur differentiæ quadratorum rectarum* MD, M L *vel* M D, M N. Quod ſic oſtenditur.

M L = M N dicatur S; M D dicatur V. Duarum igitur D L, D N, (ubicunq; ſumatur D) altera erit S + V (ſumma duarum S, V,) altera S ∼ V (differentia duarum S, V,) ut ex ſchematis inſpectu patet. Ideoq;

$$\begin{array}{cccccc} \cdot\,\cdots & L & M & N & \cdots \\ D & D & D & D \end{array}$$

$$LD \times DN = \left\{ \begin{array}{c} S + V \\ \text{in} \\ S \sim V \end{array} \right\} = Sq \sim Vq = MLq \sim MDq.$$

Ubi notandum eſt $S \sim V$ interpretandum eſſe nunc per $S - V$, nunc per $V - S$, prout S vel V major fuerit, (hoc eſt, prout D vel intra vel extra puncta L, N, fuerit aſſignatum,) & proinde $Sq \sim Vq$ illic erit $Sq - Vq$, hic $Vq - Sq$. Ut multiplicando patebit.

$$\begin{array}{rl} S + V & \\ S - V & \\ \hline Sq + SV & \\ -SV & - Vq \\ \hline Sq - Vq & \\ MLq - MDq & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} V + S & \\ V - S & \\ \hline Vq + VS & \\ -VS & - Sq \\ \hline Vq - Sq & \\ MDq - MLq. & \end{array}$$

7 e 2. *Si recta* (Z) *ſecetur utcunq;* (puta, in A, E:) *quadrata totius* (Z q) *& unius ex ſegmentis* (puta Aq) *ſimul ſumpta,* ($Zq + Aq$,) *æquantur rectangulo bis comprehenſo a tota & dicto ſegmento* (2ZA) *una cum quadrato reliqui ſegmenti* (E q.) Hoc eſt, ſi $Z = A + E$, erit $Zq + Aq = 2ZA + Eq$; & $Zq + Eq = 2ZE + Aq$. Et ſimiliter in numeris, quod experienti patebit.

$$\begin{array}{l} Z = A + E \\ \times Z = A + E \\ \hline Zq = Aq + 2AE + Eq \\ + Eq \qquad\qquad + Eq \\ \hline Zq + Eq = Aq + 2AE + 2Eq \end{array} \qquad \begin{array}{l} A + E = Z \\ 2E \quad 2E \\ \hline 2AE + 2Eq = 2ZE \\ Aq \qquad\qquad + Aq \\ \hline \end{array}$$

$$Zq + Eq = Aq + 2AE + 2Eq = Aq + 2AE + 2Eq = 2ZE + Aq.$$

$$\begin{array}{l} Z = A + E \\ + Z = A + E \\ \hline Zq = Aq + 2AE + Eq \\ + Aq \quad Aq \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{l} A + E = Z \\ 2A \quad 2A \\ \hline 2Aq + 2AE = 2ZA \\ + Eq \qquad + Eq \\ \hline \end{array}$$

$$Zq + Aq = 2Aq + 2AE + Eq = 2Aq + 2AE + Eq = 2ZA + Eq$$

8 e 2. *Si recta* (Z) *ſecetur utcunq;* (in A, E,) *rectangulum quater comprehenſum a tota & uno ex ſegmentis* (puta 4ZA) *una cum quadrato reliqui*

reliqui ſegmenti (Eq) *æquantur quadrato compoſitæ a tota & prædicto ſegmento* ($Q: Z + A.$) Hoc eſt, Si $Z = A + E$; erit $4ZA + Eq = Q: Z + A: = Zq + 2ZA + Aq$. Et (eadem ratione) $4ZE + Eq = Q: Z + E$. Et in numeris pariter.

$$
\begin{array}{ll}
Z = A + E & \quad 2A + E = Z + A \\
\times 4A \qquad \times 4A & \quad 2A + E = Z + A \\
\hline
4ZA = 4Aq + 4AE & \quad 4Aq + 2AE \\
+Eq \qquad +Eq & \qquad\quad +2AE + Eq \\
\end{array}
$$
$$
4ZA + Eq = 4Aq + 4AE + Eq = 4Aq + 4AE + Eq = Q: Z + A.
$$

$$
\begin{array}{ll}
Z = A + E & \quad A + 2E = Z + E \\
\times 4E \qquad \times 4E & \quad A + 2E = Z + E \\
\hline
4ZE = 4AE + 4Eq & \quad Aq + 2AE \\
+Aq \qquad +Aq & \qquad\quad +2AE + 4Eq \\
\end{array}
$$
$$
Aq + 4ZE = Aq + 4AE + 4Eq = Aq + 4AE + 4Eq = Q: Z + E.
$$

9 e 2. *Si recta* (Z) *ſecetur tum in ſegmenta æqualia* (S,S,) *tum inæqualia* ($A = S + V$, $E = S - V$;) *quadrata inæqualium ſegmentorum* ($Aq + Eq$) *ſunt dupla quadratorum e dimidia & e recta inter puncta ſectionum,* ($2Sq + 2Vq$.) Hoc eſt, Si $Z = S + S = A + E$. & $A = S + V$, $E = S - V$. erit $Aq + Eq = 2Sq + 2Vq$.

$$
\begin{array}{l}
Aq = Q: S + V: = Sq + 2SV + Vq \\
Eq = Q: S - V: = Sq - 2SV + Vq \\
\hline
Aq + Eq \;=\;=\; 2Sq + 2Vq
\end{array}
$$

10 e 2. *Si recta* ($2E$) *ſecetur bifariam, eiq; recta quædam* (X) *indirectum adjiciatur; quadratum compoſitæ ex tota & adjecta* ($Q: 2E + X: = Zq$) *& quadratum adjectæ* (Xq) *ſimul ſumpta, ſunt dupla quadratorum dimidiæ* ($2Eq$) *et compoſitæ ex dimidia et adjecta,* ($2Q: E + X: = 2Aq$.) Hoc eſt, Si $2E + X = Z$, & $E + X = A$; erit $Zq + Xq = 2Eq + 2Aq$.

$$
\begin{array}{llll}
Zq = Q: 2E + X: = & 4Eq + 4EX + Xq. & Q: E + X: = Eq + 2EX + Xq = & Aq \\
+Xq & \qquad\qquad +Xq; & \qquad\qquad +Eq & +Eq \\
\hline
Zq + Xq = & 4Eq + 4EX + 2Xq & \text{dupl}: 2Eq + 2EX + Xq = & Aq + Eq:
\end{array}
$$

Sed & hanc cum præcedente ſic conjunctim efferre licet.

Si

Si ab aſſignato, in eadem recta (utcunq; continuata) puncto M, *ſumantur tum utrinq; æquales rectæ* L M, M N, *tum punctum* D *ubivis: duo ſimul quadrata rectarum* L D, D N, *dupla ſunt duorum ſimul quadratorum rectarum* D M, M N, *vel* D M, M L. Hoc eſt $DLq + DNq = 2\,MDq + 2\,MNq = 2\,MDq + 2\,MLq$. quod ſic oſtenditur. $ML = MN$ dicatur S. M D dicatur V. Duarum igitur DL, DN, (ubicunq; ſumatur D) altera erit $S + V$ (ſumma duarum S, V,) altera $S \sim V$ (differentia duarum S, V.) ut ſchematis inſpectu patet. Ideoq;

L M N
.... ———— ....
D D D D

$$
\begin{array}{r}
Q{:}\,S + V = Sq + 2SV + Vq \\
+Q{:}\,S \sim V = Sq - 2SV + Vq \\
\hline
DLq + DNq = 2Sq + 2Vq = 2MLq + 2MDq.
\end{array}
$$

Ubi notandum eſt $S \sim V$ interpretandum eſſe nunc per $S - V$, nunc per $V - S$, prout S vel V major fuerit, hoc eſt, prout D fuerit intra vel extra puncta L, N. Sed quadratum utrobiq; tantundem erit, ut multiplicando patet.

$$
\begin{array}{rr}
S - V & V - S \\
S - V & V - S \\
\hline
Sq - SV & Vq - SV \\
- SV + Vq & - SV + Sq \\
\hline
Sq - 2SV + Vq = & Vq - 2SV + Sq
\end{array}
$$

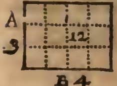
Atq; hactenus decem primores propoſitiones ſecundi Elementi Euclidis demonſtravimus Arithmeticè. Reliquæ quæ ſuperſunt quatuor, Arithmetice item demonſtrari poſſunt, ſed aſſumptis in auxilium aliis quam quæ adhuc expoſuimus principiis Geometricis, quibus itaq; impræſentiarum ſuperſedendum duxi. Sed & aliæ paſſim apud Euclidem (alioſq;) propoſitiones occurrunt Geometricæ, quæ hujuſmodi calculo Arithmetico facillime demonſtrantur. Sufficit autem præſenti noſtro inſtituto ſpecimen in paucis exhibuiſſe.

CAP. XXIV.

Geodæſia Parallelogrammi Rectanguli; Obliquanguli; cujuſvis. Menſuratio Trianguli Rectanguli; Obliquanguli; cujuſvis. Menſuratio cujuſvis figuræ rectilineæ. Menſuratio figuræ regularis. Menſuratio circuli, ejuſq; portionum, ſectorum, & ſegmentorum. De circuli quadratura, & ratione perimetri ad diametrum. De figuris mixtis. De figurarum metamorphoſi.

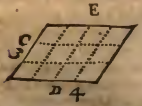
De Geodæſia Parallelogrammi Rectanguli.

OStendimus (in Capite 22) methodum Parallelogramma Rectangula menſurandi, & inter ſe comparandi. Nempe *Parallelogrammi Rectanguli cujuſvis area, æqualis eſt quantitati quæ ex duarum rectarum circa angulum rectum, invicem ductu emergit.* Ut, ſi latitudo A = 3 ducatur in longitudinem B = 4, emergit area AB = 12. Adeoq;, verbi gratia, Rectangulum latum 3 pedes, & longum 4, continet pedes quadratos 12. quod etiam liquet in Parallelogrammo appoſito in 12 ſpacia quadrata diviſo, quorum ſingula latera ſint (puta) pedalia.



De Parallelogrammis Obliquangulis.

At interrogabitur forſan, Cur hoc ad Parallelogrammum Rectangulum reſtringatur; cum idem videatur dicendum de Obliquangulo. Puta, ſi lineæ C, D, circa angulum acutum, (vel etiam C, E, circa angulum obtuſum,) invicem multiplicentur, quarum altera ſit 3, altera 4 pedes longa; emergit numerus 12: ipſumq; Parallelogrammum Obliquangulum in totidem ſpacia dividitur æqualia, quorum item latera ſingula contineant (puta) pedem unum; non minus quam ſi eſſet parallelogrammum Rectangulum.



Reſpondeo; *Poſſe quidem Parallelogrammum, etiam Obliquangulum, in totidem ſpacia æqualia & ſimilia dividi, quot indicat mutua multiplicatio laterum duorum circa ipſius quemvis angulum conſtitutorum; eorumq; ſpaciorum latera eſſe æqualia, (puta unius pedis ſingula) non minus quam ſi parallelogrammum fuiſſet Rectangulum. Sed nego ſpacia illa*

eſſe

eſſe pedes quadratos, aut quidem totidem quadratis pedibus æqualia, utut quatuor lineis pedalibus terminentur ſingula. Rhombi nempe ſunt, non quadrata, propter obliquitatem angulorum, cum quadrata omnia (ex definitione) ſint rectangula. Sed & *quadratis minora* ſunt, propter eandem obliquitatem: quod ipſum evenit in aliis parallelogrammis omnibus, ſive æquilatera ſint, ſive inæquilatera, hoc eſt, ſive ſint Rhombi ſive Rhombidea; minora nempe ſunt quam ſi eſſent rectangula, quamvis iiſdem lineis terminata. Quod ſic demonſtro Geometrice: (quippe cum de ſolo ſitu agitur, qui ad Geometriam peculiariter attinet, demonſtratio Arithmetica vix locum habet.)

Sit parallelogrammum Rectangulum A B, eiq; iſoperimetrum Obliquangulum DC, ita ut latus DB ſit utriq; commune, & DG ipſi DA æquale, (reliquaq; latera ſibi oppoſitis parallela & æqualia.) quamvis autem latera BC, DG, parallelogrammi obliquanguli, ſint ſigillatim æqualia lateribus BE, DA, parallelogrammi Rectanguli, (& reliqua reliquis;) eſt tamen ipſum parallelogrammum Obliquangulum DC, minus Rectangulo A B, æquale quippe Rectangulo HB Producatur enim latus C G ad H: eritq; GH = FC; (quia tam CG quam F H æquantur ipſi BD, oppoſito lateri in utroq; parallelogrammo; &, eadem ratione, HD = FB, & DG = BC, (ſedet anguli ad B, C, F, æquales angulis ad D, G, H,) æquale eſt igitur triangulum DHG, triangulo BFC, (eiq; congruit;) quorum priori ſi addatur commune ſegmentum BDGF, ſit parallelogrammum rectangulum H B; ſin poſteriori, ſit obliquangulum C D, quod igitur ipſi H B æquale eſt, & propterea minus quam A B, quod erat demonſtrandum. Et ſimiliter procederet demonſtratio in parallelogrammo quovis obliquangulo.

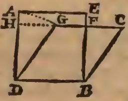


Fig. pag. præced. Patet igitur 12 Rhombos Parallelogrammi propoſiti Obliquanguli A B, minores eſſe totidem Quadratis Rectanguli, C D, utut tam hæc quam illi quaternis lineis pedalibus terminentur.

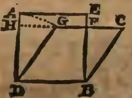
Si quæratur inſuper, Quid impediat quo minus menſuras exprimere liceat per Rhombos æquè ac quadrata? Reſpondeo, Magnitudines explicandas eſſe per menſuras certas, (ſecus enim

nim de magnitudine non conſtabit,) ideoq; per Quadrata potius quam per Rhombos. Cum enim quadratorum omnium anguli recti ſint, adeoq; invicem æquales, dato illic latere de magnitudine conſtabit; Rhomborum autem anguli cum poſſint magis minuſve obliqui eſſe, dato latere non tamen de magnitudine conſtabit, quæ quidem major minorve erit, prout obliquitas minor majorve fuerit. Non igitur Rhombis ſed Quadratis potius determinandæ ſunt figurarum magnitudines

Addo tamen, ſi non de Rhombis utcunq; ſumptis, ſed de Rhombis in certo quovis obliquationis angulo, agatur; non minus certa eſt Rhombi menſura quam Quadrati. Verbi gratia, in oblongo C D obliquangulo non minus certum eſt tot pedales Rhombos, in eodem, cum ipſo oblongo, inclinationis angulo, contineri, quot in oblongo Rectangulo AB continentur Quadrata pedalia; (propter latera utrobiq; ſigillatim æqualia.) Et quidem propoſitiones illæ omnes quæ ſuperius (ex Euclide) demonſtrantur de Quadratis & Rectangulis, non minus valent de Rhombis & Rhomboidibus in eodem quocunq; inclinationis angulo. Quod quidem notare magno eſſe poteſt uſui Geometris.

Parallelogrammi Obliquanguli Geodæſia.

Patet autem, ex jam dictis, methodus menſurandi Parallelogramma Obliquangula. Non quidem ex ductu DB in BC, ſed DB in BF vel in D H. Cum enim, ut modo demonſtratum eſt, Parallelogrammum Obliquangulum C D, æquale ſit Rectangulo HB; eadem erit utriuſq; area ſeu magnitudo. At ex ductu DB in BF, vel in DH, habetur area Rectanguli HB (per ea quæ dicta ſunt Capite præcedente;) ergo & Obliquanguli C D.



Hoc eſt, *Si in Parallelogrammo quolibet, (ſive Rectangulo ſive Obliquangulo,) a latere quovis ad oppoſitum ducatur perpendicularis, eaq; in eorum utrumvis multiplicetur, prodibit Parallelogrammi area.*

Atq; hujus quidem operationis ratio, præterquam quod jam fuerit demonſtrata, hinc ſatis intelligi poteſt, ſi advertamus, quod, ſi in parallelogrammo quovis (puta GB) unum aliquod ex lateribus pro longitudine habeatur (puta D B,) ejuſ-

dē latitudo æſtimanda erit non ex linea utcunq; tranſverſim ductâ (ita enim latitudo eſſet plane incerta, & modo major modo minor dicenda, prout illius tranſverſæ lineę ad arbitriū ſumptæ minor majorve fuerit obliquitas) ſed ex linea directe ſive perpendiculariter tranſeunte; puta non ex linea inclinata D G vel BC, ſed BF vel DH. Et quidem ſi ſupponatur aſſerculus, in illa forma conſtitutus, longitudinem habere DB quantamcunq; ejus latitudo non æſtimanda erit (ne quidem uſu communi) quanta eſt DG, ſed quanta eſt B F, aliave ejuſmodi recta perpendiculariter ducta. Quæ quidem ut tranſeuntium omnium eſt breviſſima, ita ſola certa eſt; cum quæ oblique tranſeunt, pro variata obliquitate, variant etiam longitudinem.

Atq; hæc de magnitudine parallelogrammi dixiſſe ſufficiat. Nempe, ſi *Parallelogrammum comparare libeat (non præciſe ad quadratum, ſed) ad Quadrangulum æquilaterum, (ſive quadratum fuerit ſive Rhombus,) quod expoſito Parallelogrammo ſit æquiangulum, hoc eſt, pariter inclinatum; ducenda ſunt invicem duo latera ad eundem quemlibet angulum conſtituta: Si vero Parallelogrammum, utcunq; inclinatum, ad ſolum Quadratum comparare placeat; ducendum eſt latus quodvis in rectam ab eo latere ad latus oppoſitum perpendiculariter ductam.* Qui quidem duo rectarum invicem ductus, in parallelogrammo Rectangulo, tantundem valent; in Obliquangulo, non item.

Quæ autem de Multiplicatione jam dicta ſunt, & de Diviſione (mutatis mutandis) intelligenda ſunt. Quippe *quod Multiplicatione conficitur, id Diviſione diſſolvitur.* Ut igitur ex datis longitudine & latitudine, (ſive in Parallelogrammo rectangulo, ſive obliquangulo,) habetur area multiplicando: ſic ex data area cum longitudine, habetur latitudo; vel ex data area cum latitudine, habetur longitudo, dividendo. Atq; de Parallelogrammis hactenus.

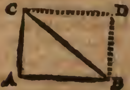
Cum autem Geodæſiam jam ſim aggreſſus, hoc eſt, menſurationem Planorum; operæ pretium erit etiam alia breviter attexere quæ eò ſpectant, ut totum illud plana menſurandi negotium, ſaltem prout præſentis inſtituti ratio poſtulat, abſolvam. Illud vero, quantum ſupereſt, menſuratione Trianguli fere totum perficitur.

Menſuratio Trianguli.

Eſt autem *Triangulum* (intellige *figuram planam tribus rectis terminatam*) vel *Rectangulum, cujus alter angulus eſt rectus* (nam plu-

res eſſe recti non poſſunt;) vel *Obliquangulum, cujus omnes anguli ſunt obliqui*: Hoc autem, vel *Obtuſangulum, cujus unus aliquis angulus* (quippe plures non poſſunt) *obtuſus eſt*; vel *Acutangulum, cujus anguli omnes ſunt acuti*.

Aggrediar primo, Triangulum Rectangulum. Eſt autem *omne Triangulum rectangulum, Parallelogrammi rectanguli dimidium.* Si enim Parallelogrammum rectangulū quodvis(puta A D) diagonali linea (CB) ſecetur, dividitur illud in duo triangula (ABC, BCD,) ut patet; quorum utrumq; eſt rectangulum, (propter angulos ad A & D rectos;) ſed & invicem æqualia, (propter angulos æquales rectos ad A & B, & latera reſpective æqualia;) & proterea utrumlibet parallelogrammi dimidium. Et contra, ſi Triangulum Rectangulum quodlibet (puta ABC) duplicetur, ita nempe ut latera ſecundi circa angulum rectum ſint homologis lateribus prioris parallela, & latus reliquum utriq; triangulo commune, fiet rectangulum parallelogrammum. Si enim ſumatur latus CD æquale & parallelum lateri AB, & ſimiliter BD lateri AC, (quæ propterea convenient in angulo recto ad D,) habebitur triangulum expoſito ſimile & æquale, complens parallelogrammum rectangulum. *Trianguli Rectanguli.*



His poſitis; cum ex jam dictis innoteſcat area parallelogrammi AD, innoteſcet etiam area trianguli A B C, quod nempe iſtius eſt dimidium. Eſt autem area parallelogrammi AD, quantitas producta ex ductu lateris A B in AC, puta AC × AB; adeoq; area trianguli (quippe illius ſemiſſis) $\frac{1}{2}$ AC × AB. Vel, ſi altitudo AC dicatur A, & baſis A B dicatur B, erit area Parallelogrammi AB, area Trianguli $\frac{1}{2}$ AB. Ideoq;

In Triangulo Rectangulo, ſi laterum circa angulum rectum, ducatur alterum in alterius dimidium, emergit area Trianguli. Quippe dimidium areæ parallelogrammi. Atq; hinc quidem *ex datis trianguli rectanguli lateribus circa angulum conſtitutis* (quarum alterum Baſim, alterum Altitudinem exhibet,) *multiplicando cognoſcitur ejuſdem area.*

A
B
2) AB.

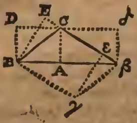
Contra vero; *Ex cognitis area & laterum eorum uno, innoteſcit alterum*

terum dividendo. Nempe, ſi duplum areæ (AB) per altitudinem dividatur, habetur Baſis; ſin per baſin, habetur altitudo. Puta A) AB (B. B) AB (A. Atq; de Triangulo Rectangulo hactenus.

A) AB (B
B) AB (A

Trianguli Obliquanguli.

Trianguli Obliquanguli (ſive Acutangulum ſit, ſive Obliquangulum,) calculus a Trianguli Rectanguli calculo dependet. Demiſſa enim ab angulo quovis in latus oppoſitum perpendiculari emergunt duo Triangula Rectangula; ex quarum calculo cognoſcitur area Trianguli expoſiti. Exſempli gratia, In triangulo B β C, ab angulo C demiſſa perpendiculari CA, (unde fiunt ad A anguli utrinq; recti) emergunt triangula rectangula CAB, CAβ. Si igitur CA dicatur A, AB dicatur b, Aβ dicatur β, & Bβ dicatur $B = b + \beta$: erit (per modo demonſtrata) $\frac{1}{2}$ A b area trianguli CAB $\frac{1}{2}$ Aβ area trianguli CAβ ideoque $\frac{1}{2}Ab + \frac{1}{2}A\beta = \frac{1}{2}AB$ area totius $CB\beta = CAB + CA\beta$. Hoc eſt,



Si trianguli cujuſvis Altitudo (ſive perpendicularis a vertice ad baſin) ducatur in ſemiſſem Baſis, (vel Baſis in ſemiſſem altitudinis,) emergit area trianguli.

$$\begin{array}{c} b + \beta = B \\ \frac{1}{2}A \qquad \frac{1}{2}A \\ \hline \frac{1}{2}Ab + \frac{1}{2}A\beta = \frac{1}{2}AB \end{array}$$

Notandum autem eſt, *quod in triangulo Obtuſangulo, ſi ab utrovis acutorum angulorum demittatur perpendicularis* (ut nempe angulus ille acutus, puta B, habeatur pro vertice trianguli, & laterum breviorum alterum, C β, pro baſe,) *perpendicularis illa* (puta BE) *cadet extra expoſitum triangulum in baſin productam:* (quod Geometrice, ſi opus eſt, facile eſt probatu:) invariata tamen præcedentis regulæ veritate; quæ quidem hic Subductione colligitur, ſicut in præcedente exſemplo Additione. Quod ſic oſtenditur.

Trianguli BEβ rectanguli (propter angulum rectum ad E, demiſſa perpendiculari factum,) area habetur ex ductu altitudinis BE in $\frac{1}{2}$ Eβ ſemiſſem baſis; Trianguli vero BEC (pari de

de cauſa) ex ductu ejuſdem altitudinis BE in $\frac{1}{2}$ EC ſemiſſem baſis ſuæ; Horum itaq; triangulorum differentia, quod eſt ipſum triangulum $BC\beta$ expoſitum, eſt $\frac{1}{2} E\beta \times BE - \frac{1}{2} EC \times BE$, quod tantundem eſt atq; $\frac{1}{2} E\beta - \frac{1}{2} EC$ (hoc eſt $\frac{1}{2} C\beta$) in BE. (Nam $E\beta - EC = C\beta$, ideoque $\frac{1}{2} E\beta - \frac{1}{2} EC = \frac{1}{2} C\beta$, vel $\frac{E\beta - EC}{2} = \frac{C\beta}{2}$.) Itaq; & hoc pacto emerget area æqualis ſemiſſi altitudinis in baſin ductæ.

$$\frac{1}{2} E\beta - \frac{1}{2} EC = \frac{1}{2} C\beta$$
$$\times BE$$
$$\overline{\frac{1}{2} E\beta \times BE - \frac{1}{2} EC \times BE = \frac{1}{2} C\beta \times BE}$$

Sed & idem aliter oſtenditur; (Atq; eadem opera, non modo Triangulum rectangulum, quod modo dictum eſt, ſed & *Triangulum quodvis rectilineum eſſe Parallelogrammi dimidium.*) Si Triangulum expoſitum $BC\beta$ (ſive Rectangulum, ſive acutangulum, ſive obtuſangulum) ſuper baſi $B\beta$ conſtitutum (ita nempe ut perpendicularis a vertice cadat intra Triangulum) inſcribatur Parallelogrammo Rectangulo ſuper eadem baſe, eandem item altitudinem habenti cum ipſo triangulo, nempe $D\beta$. Cum enim triangula rectangula CAB, $CA\beta$, ſint ſigillatim æqualia ſemiſſibus parallelogrammorum AD, $A\delta$; erit & aggregatum illorum, hoc eſt, Triangulum $BC\beta$, ſemiſſi totius $D\beta$ parallelogrammi (ex duobus AD, $A\delta$, aggregati) æquale.

Sin extra triangulum cadat perpendicularis (quod in triangulo Obtuſangulo fieri poſſe diximus) illud idem oſtenditur hoc pacto. Completo parallelogrammo $BC\beta\gamma$ (ductis nempe $B\gamma$, $\beta\gamma$, lateribus trianguli BC, βC, parallelis) erunt duo triangula $BC\beta$, $\beta\gamma B$, invicem ſimilia & æqualia, & propterea utrumvis, parallelogrammi ſemiſſis: At parallelogrammum illud æquatur rectangulo, altitudine BE vel γE, & baſi $C\beta$ vel $B\gamma$, comprehenſo (ut ſupra oſtenſum eſt) ergo Triangulum ejuſdem ſemiſſi æquatur: nempe ſemiſſi quantitatis factæ ex ductu baſis $C\beta$ in altitudinem BE, vel quantitati factæ ex ductu ſemiſſis baſis in totam altitudinem, vel ſemiſſis altitudinis in totam baſin; quæ omnia tantundem valent; quippe

$$\frac{C\beta\times BE}{2}=\tfrac{1}{2}C\beta\times BE=C\beta\times\tfrac{1}{2}BE.$$

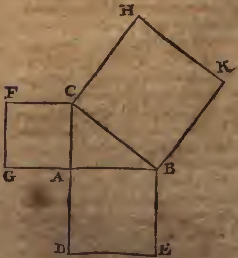
Trianguli cujuſvis.

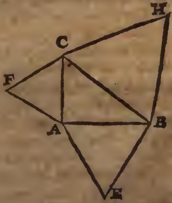
Patet igitur univerſim methodus menſurandi *Triangulum quodvis* (ſive Rectangulum ſive Obtuſangulum ſive Acutangulum.) Nempe, *a quovis ipſius angulo demiſſa in latus oppoſitum* (productum, ſi opus,) *perpendiculari; harum rectarum* (ſcil. perpendicularis, & dicti lateris,) *ſi altera in alterius ſemiſſem ducatur, prodibit area Trianguli.* Contra vero; *Si areæ duplum per earum rectarum alteram dividatur, habetur reliqua:* puta ſi per baſin, habetur perpendicularis ſive altitudo; ſi per altitudinem, habetur baſis. Atq; de Triangulis menſurandis hactenus.

Menſuratio figuræ cujuſvis rectilineæ.

Expoſita jam methodo menſurandi quodvis ſive Parallelogrammum ſive Triangulum; eadem opera & figuras alias rectilineas quaſcunq; menſurare docuimus: ſaltem ſi illud addatur *Figuram quamvis rectilineam vel in Parallelogramma dividi poſſe, vel ſaltem in Triangula*: Ex quorum igitur calculo, propoſitæ figuræ calculus ſtatim innoteſcit.

Exſempli gratia. Figurarum appoſitarum altera in tria Quadrata & unum Triangulum dividitur; Altera, in quatuor Triangula. Quæ ſi ſeorſim menſurentur; illorum aggregatum priori, horum poſteriori figuræ æquatur. Atq; eodem prorſus modo faciendum erit in figuris quibuſvis multangulis, præſer-





tim

tim irregularibus; reſolutâ ſcilicet figurâ multangulâ in tot parallelogramma vel triangula quot figuræ ratio poſtulat, & prout calculo magis videbitur expedire; quod cujuſq; prudentiæ permittendum erit.

Si vero figura menſuranda, quotcunq; demum, habuerit latera, Regularis ſit; hoc eſt, *quæ tum omnia latera invicem æqualia, tum omnes angulos item æquales habeat:* calculus ſic commode poterit inſtitui. *Invento figuræ regularis centro,* (quod & circuli ſive inſcripti ſive circumſcripti centrum eſt, ut ex principiis Geometricis liquet, & a ſingulis lateribus æqualiter diſtans;) *recta a centro in latus quodvis perpendicularis, ſi in ſemiperimetrum multiplicetur, figuræ regularis aream exhibebit.* *Menſuratio figuræ regularis.*

Exempli gratia. Sit Sexangulum regulare (puta æquilaterum & æquiangulum) circulo inſcriptum. A centro C ad latus quodvis DE agatur perpendicularis CB; hæc ducta in ſemiſſem perimetri ſexanguli, vel hujus ſemiſſis in perimetrum, exhibet totius aream. Nam, ductis cruribus CD, CE, formatur triangulum CDE, cujus area eſt $CB \times \frac{1}{2} DE$, vel $\frac{1}{2} CB \times DE$, (ut ex calculo trianguli ſuperius tradito liquet.)



Item, ductis inſuper ab eodem centro C ad reliquos ſexanguli angulos totidem rectis, conſtituentur tot triangula quot ſunt figuræ latera; eruntq; ea ſingula triangulo CDE æqualia *(propter tum æquales rectas a centro, quippe quæ ſunt radii circuli ambientis, tum æquales item rectas in ambitu figuræ, ut quæ ſupponitur æquilatera:) toties itaq; repetenda erit præcedens menſuratio, quot ſunt figuræ latera, quia tot erunt triangula invicem æqualia; puta CDE = CEF, &c. figuram integram complentia. Hoc eſt, in expoſita figura ſexangulari, area trianguli CDE ſexies repetita, exhibet totius aream, puta $6\, CB \times \frac{1}{2} DE$ vel $\frac{1}{2} CB \times 6 DE$, vel $CB \times 3 DE$; ducto nempe $\frac{1}{2} CB$ ſemiſſe perpendiculi, in perimetrum 6DE; vel perpendiculari CB in ſemiſſem perimetri 3DE. Atque ſimiliter faciendum erit in alia quavis figura regulari

* per 4 e 1.

regulari ſive plurium ſive pauciorum laterum.

Menſuratio circuli, ejusq; portionum. Quod autem de figura regulari rectilinea dictum eſt, idem & de circulo dicendum eſt. Eſt enim *circulus figurarum planarum omnium maxime regularis*; omnes enim a centro ad circumferentiam lineæ quorſumcunq; ductæ æquales ſunt, & æquales ad circumferentiam conſtituunt angulos. *Omnesq́; figuræ regulares, quò plura habent latera, eo propius ad circulum accedunt*; (ut, in appoſito ſchemate, Octogonum magis quam Tetragonum; & pariter in aliis.) Quod ſi figura regularis ſupponatur laterum numero infinitorum, circulus erit. *Perinde enim eſt ſive Peripheriam circuli unicâ lineâ curvâ conſtare dicamus, ſive rectis numero infinitis.*



Si itaq; circulum conſideremus tanquam figuram planam omnium maxime regularem, laterum numero infinitorum; omneſq; angulos, linea a centro ad peripheriam ducta factos, utrinq; æquales conſtitui, ideoq; rectos, (ut nos alibi, ubi *Angulum Contactus & Semicirculi* tractamus oſtendimus,) rectamq; a centro ductam perimetro perpendicularem: *Quantitas producta ſive ex ductu radii in ſemicircumferentiam, ſive ſemiradii in circumferentiam, erit area circuli.* Puta $\frac{1}{2}$CD × DEFD, vel CD × $\frac{1}{2}$DEFD.



Sectorum. Cognita autem methodo menſurandi circulum integrum, innoteſcit etiam methodus menſurandi portionem circuli (arcu & recta una pluribuſve comprehenſam.) Nempe, ſicut $\frac{1}{2}$CD in totam perimetrum DFD dat aream totius circuli; ſic eadem $\frac{1}{2}$CD in DE, perimetri ſextantem, dat aream ſextantis circuli

circuli; puta *Sectoris* DCE; eademq; $\frac{1}{2}$ CD in DF, perimetri trientem, exhibet aream trientis circuli, puta ſectoris DCF. Et ſimiliter de Sectoribus aliis, qui arcu quovis & rectis duabus in centro C coeuntibus terminantur, judicandum erit.

Sin menſurandum eſſet ſegmentum DEB, arcu DE rectaq; DBE comprehenſum. Cognita menſurâ Sectoris DCE, ſi inde auferatur area trianguli DEC, quod reſtat eſt area ſegmenti minoris DEB. Atq; hoc quidem ſegmentum minùs, ſi ex integro circulo auferatur, relinquet majoris ſegmenti aream EFDB. *Segmentorum.*

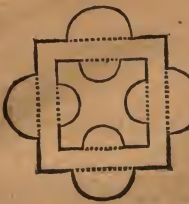
Deniq;, Si alia quæcunq; circuli portio arcu & rectis utcunque poſitis contenta, menſuranda proponatur: id fiet, Sectori, ſuper arcum illum conſtituto, addendo vel auferendo triangulum unum aut plura, prout res poſtulaverit. Puta ſi quod rectis ED, DC, CF, & arcu FE continetur, menſurandum ſit; Sectori ECF, addendum erit triangulum EDC. Et ſimiliter alibi.

Quod autem de circuli menſura jam dicitur, aut ſegmentorum, non ita intellectum velim, acſi jam diu quæſitam circuli quadraturam hic doceam. Utut enim Mathematice verum ſit, Areâ Circuli parallelogrammo quod ſemidiametro & ſemicircumferentiâ continetur æqualem eſſe, (quod ab Archimede demonſtratis convenit:) Ratio tamen Radii ad Perimetrum circuli, ita ut uno cognito alterum innoteſcat, nondum reperta eſt numeris explicabilis, ne quidem irrationalibus, (fortaſſe nec reperienda, de quo alibi a nobis fuſius dictum eſt, in noſtra *Arithmetica Infinitorum*:) neq; etiam Geometrice Regulâ & circino exhibenda. Quod cum ſe inveniſſe putaverint, poſt alios, *Joſephus Scaliger*, *Severinus Longomontanus*, & nuperrimè *Thomas Hobbes*, immortales ſibi inde ſinguli laudes deberi ſomniantes, mirè hallucinati ſunt. Quæ autem vulgo recepta eſt proportio ſeu ratio perimetri circularis ad ſuam diametrum, quæq; a vera non multum abeſt, eſt tripla ſequiſeptima, ſive ut 22 ad 7, aut $3\frac{1}{7}$ ad 1; quod ab Archimede jam olim demonſtratum eſt, (nempe minorem eſſe quam $3\frac{1}{7}$, majorem vero quam $3\frac{10}{71}$.) eſtq; hæc ratio ſatis accurata quæ vulgaribus menſurationibus applicetur. Siquis autem accuratiorem quærat, poterit ille à *Ludovico van Culen*, *Willebrordo Snellio*, aliiſq; qui rem illam tractarunt, petere; vel, ſi malit, ſuo calculo inveſtigare, ut pro- *De Circuli quadratura.* *Ratio perimetri circularis ad diametrum.*

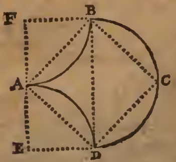
E e portionem

portionem habeat quamlibet accuratam,modo non Mathematice exactam. Sed de circulo ejuſq; portionibus hactenus.

Menſuratio figuræ miſtæ. Siquando figura menſuranda occurrat mixta, ſive variis lineis circularibus, vel etiam circularibus ſimul et rectis,terminata; inveſtigabitur ipſius area,eandem in figuras ſimpliciores dividendo, & per partes menſurando. Ut,in ſchemate appoſito; ut habeatur area figuræ exterioris, areæ quadrati, addendæ ſunt quatuor ſemicirculorum areæ; Figuræ item interioris area, totidem ſemicirculis ex area quadrati ſubductis inveſtigatur.



De figurarum Metamorphoſi. Nonnunquam vero ſola figurarum Metamorphoſi res erit facilitanda. Ut, ſi menſuranda ſit figura *Pelicoides* dicta (linea ſemicirculari concava B C D, & duabus quadrantalibus convexis, A B, AD, terminata,) æquabitur illius area vel areæ quadrati A B C D, vel Parallelogrammi B D E F. Tantundem enim ſive Quadrato ſive Parallelogrammo ex una parte accedit, quantum ex altera parte aufertur.



Et ſimiliter, Lunula, quæ arcu quadrantali majoris & ſemicirculari minoris circuli continetur, æquatur triangulo,iſti ſive quadranti ſive ſemicirculo, inſcripti. Ut ex Hippocratis Chii *quadratura Lunulæ* notum eſt: & appoſito ſchemate exhibetur. *Nempe in ſequente pagina.* *Fig. Seq.*

Et ſimiliter alias non raro faciendum erit. Quod breviter inſinuaſſe ſufficiat.

Atq; hoc quidem omnino utile eſt in figuris maxime irregularibus, quorum ambitus neq; rectis neq; circularibus lineis terminatur.



terminatur. Sufficit quippe practico Geometræ, ſi quam fieri poteſt proxime, hic addendo, illic tãtundem detrahendo, ad huic æqualem rectilineam reducat. Quod quò fiat, conſilium in arena capiendum.

Atq; hactenus quidem univerſæ prope planorum Geodæſiæ fundamenta breviter tradidi. Quo, tum Multiplicationis tum Diviſionis exercitium oſtenderem; tum Arithmetices in Geometricis utilitatem, & utriuſq; ſimul ſcientiæ affinitatem patefacerem.

CAP. XXV.

Numerorum invicem comparatio. Aliarum item quantitatum: ſed nonniſi invicem homogenearum. Comparantur tum quoad Differentiam, *tum quoad* Rationem. *Harum comparationum ab invicem diſcrimen.* Differentia *ſubductione inveſtigatur:* Ratio, Diviſione; *ſed eâ tantum quæ eſt quantitatum homogenearum. Quantitatum ad heterogeneas Applicatio, quatenus ad Diviſionem referenda ſit. Rationes omnes invicem homogeneæ: non item omnes* Differentiæ. *Ratio an ad quantitatem, an potius ad Qualitatem pertineat. Progreſſio Arithmetica & Geometrica: Continua, &* Disjuncta. *Proportionalium notatio. Proportio Harmonica.*

TRadidimus, in Præcedentibus, celebres illas Arithmeticæ Practicæ ſive Species, ſive potius Partes; *Additionem, Subductionem, Multiplicationem,* & *Diviſionem*: quibus, ut inſtrumentis, quæ deinceps tradentur ſunt peragenda.

Hinc autem oritur duplex Numerorum (vel etiam aliarum *Numerorum*
quarumlibet quantitatum homogenearum) invicem compara- *invicem com-*
tio. Altera ſecundum *Differentiam*, altera ſecundum *Rationem* *paratio.*

ſive *Proportionem*. Illa Additionis & Subductionis, Hæc Multiplicationis & Diviſionis naturæ maxime eſt affinis.

Aliarum itē quantitatum. Quo autem has numerorum invicem comparationes rectius inſtituamus, ſciendum eſt Primo; tum quæ nos de Numerorum invicem comparatione jam ſumus tradituri, tum quæ Euclides per totum librum quintum de Magnitudinum ad invicem ratione tradit; non Numeris ſolum aut Magnitudinibus competunt, ſed & aliis quibuſvis quantitatibus. Quicquid ſcilicet vel per ſe vel per accidens quantitatis aut menſurationis capax eſt, eatenus etiam ad alia ſibi homogenea comparari poteſt, tum quoad differentiam, tum quoad rationem; quippe quibus æquale eſſe poteſt aut inæquale.

Sed tantum homogenearum. Sciendum ſecundo; res invicem comparandas eſſe ſecundum commune quiddam quod utriſq; comparandis ineſt, aut quidem ineſſe ſupponitur; non autem juxta quicquam quod illis vel alteris vel utriſq; eſt alienum. Et propterea quantitates non niſi *homogeneas* comparandas eſſe, & quidem prout ſunt homogeneæ. Sic lineas lineis comparamus, & ſuperficies ſuperficiebus, corpora item corporibus, & numeros numeris, ponderaq; ponderibus, aliaſq; quantitates non niſi quantitatibus ſibi homogeneis. Siquis autem contrarium fecerit, putà datæ lineæ ad datam ſuperficiem, vel temporis ad lineam, &c. rationem ſive proportionem inquirens, vel etiam unius ſuper alterum exceſſum: idem erit acſi quæſiverit quot liniæ conſtituant ſuperficiem, vel quantum temporis æquetur lineæ, ſive quot longitudines efficiant latitudinem; quod non minus abſurdum eſſet quam ſi quæratur Quot colores conſtituant Sonum, & quot Soni conſtituant Gravitatem. Hoc ipſum tamen ſciſcitari videntur nonnulli de rebus hujuſmodi parum intelligenter philoſophantes, dum lineas ex punctis conſtare ſomniant, & ex lineis ſuperficies; Neſcientes interim ſe idem agere atq; ſi numeros omnes ex ciphris, ſive nullitatibus, componi affirmarent: quippe punctum nihil habet longitudinis, nec latitudinis linea.

Tum quoad Differentiam tum quoad Rationem. Sciendum porro, Res homogeneas, & comparationis invicem capaces, comparari poſſe (juxta illam qua homogeneæ ſunt menſuram) dupliciter. Vel enim ſimpliciter de Differentia ſive exceſſu quæritur; ſcilicet, num inter ſe differant & Quantum differunt; An & Quanto alterum altero majus eſt

aut

aut minus: Vel de Ratione; puta quotuplum vel quantuplum ſit hoc illius; num hoc illud contineat ſemel, bis, ter, &c. aut ſemel cum ſemiſſe, bis cum triente, &c. Utrovis modo comparatorum, alterum *Antecedens* dici ſolet, alterum *Conſequens:* quorum quidem illud Relatum eſt, hoc Correlatum: Nempe illud, cujus ad alterum relatio exponitur; hoc, cui illud ſic relatum perhibetur. Puta ſi A ad B comparatur; A dicetur Antecedens, B Conſequens; dum ſcilicet A dicitur majus eſſe quam B, vel minus, vel æquale; aut etiam A ipſius B duplum, triplum, ſemiſſis, &c.

Priori quæſito ſatisfit, ſi oſtendatur res comparatas æquales eſſe; vel, ſi inæquales, quanto hæc illam excedit, vel hanc illa. Verbi gratia, Linea bipedalis eſt bipedali æqualis; & numerus binarius binario; ejuſdem item rei (vel etiam æqualium) ſemiſſes ſunt invicem æquales; & pariter in aliis. Contra vero; numerus octonarius ſenarium, & hic itidem quaternarium, duabus unitatibus ſuperat; linea tripedalis bipedali eſt uno pede longior; quadripondium quam tripondium eſt uno pondo gravius; atq; in aliis pariter. *Earum comparationum ab invicem diſcrimen.*

Secundo quæſito ſatisfit, ubi oſtenditur Quotuplum ſit hoc ad illud, ſive quam rationem (ut dici ſolet) vel proportionem habeant inter ſe. Hoc modo dicimus, quadripondium bipondii duplum eſſe; numerum ſenarium binarii triplum; lineam tripedalem bipedali ſeſquialteram; unitatem binarii ſemiſſem eſſe, aut ſubduplam, aut etiam dimidium; binarium item binario æqualem eſſe, vel in ratione aut proportione ſimpla; & pariter alibi.

In priori, ubi de Differentia ſive Exceſſu quæritur, Rationis ſive Proportionis nulla ratio habetur: In poſteriori, de Ratione ſive Proportione quæritur, Differentiâ interim minime conſideratâ. Sic quaternarius ternarium, & ternarius binarium, eodem Exceſſu ſuperant; ſed non in eadem Ratione: exceſſus enim utrobiq; eſt Unitas; at ratio illic Seſquitertia, hic Seſquialtera. Contra vero, quaternarius binarium, & binarius unitatem, eadem Proportione ſuperant; ſed non eodem Exceſſu: Eſt enim proportio ſive ratio utrobiq; Dupla; at exceſſus iſtic quidem Duarum unitatum, hic autem Unius.

Prioris quæſiti ſolutio, Subductione inveſtigatur. Si ſubducatur enim numerus ex numero, quod reſtat eſt Exceſſus *Differentia Subductione inveſtigatur.*

ceſſus ſive differentia. Ita ſi ex 12 auferantur 10, reſtant 2; duabus itaq; unitatibus, hoc ille major eſt, hic illo minor numerus. Si ex tripondio bipondium auferatur, exceſſus reperitur eſſe Unius pondo Nempe, ſi peracta ſubductione nihil vel ſuperſit vel deficiat. Æquales ſunt illæ quantitates: ſin ſecus, inæquales; quippe Major illa, ubi aliquid redundat; Minor, cui aliquid deeſt, quo minus alteri ſit æqualis.

Ratio inveſtigatur Diviſione.

Poſterioris ſolutio Dividendo inveſtigatur. Diviſionis nempe quotiens oſtendit rationem Dividui ad Diviſorem. Sic ſi 12 per 6 dividantur, prodibit Quotiens 2; cui cognominis ratio *Dupla*, illa eſt quam habet numerus 12 ad 6. Item quadrupondium eſt bipondii duplum; quia ſi 4 pondo per 2 pondo dividantur, prodibit quotiens 2: quippe toties hoc illo pondus continetur. Et propterea, *Ubi quotientes invicem æquantur, ibi & quantitates in eadem ratione conſtitutæ* intelligantur. quippe *Ratio* ex *Quoto* æſtimatur; adeoq; & ex horum æqualitate æqualitas earum.

Sed eâ tantum quæ eſt quantitatum homogenearum.

Verum interim notandum eſt; de illa tantum Diviſione jam agi, qua quantitas per aliam quantitatem ſibi homogeneam dividitur: (quippe homogenearum tantum quantitatum eſt ad invicem ratio.) Qua Quotiens ſemper ſit numerus, vel quid numero homogeneum, quod quæſtioni *Quot* vel *Quoties* reſpondeat. Sic ratio 4 A ad A (ſive ſint illæ duæ lineæ, vel duæ ſuperficies, vel duo pondera, vel duæ aliæ quæcunque quantitates homogeneæ,) eſt quadrupla, quia A) 4A (4; nempe quantitas 4A, quantitatem A, continet quater. Sic ratio 3A ad 2A eſt ſeſquialtera, ea nempe quæ eſt 3 ad 2, quia 2A) 3A ($\frac{3}{2}$; nempe major minorem continet $\frac{3}{2}$ vicibus, ſive ſemel cum ſemiſſe, ſive toties quoties 3 continent 2. Sic ratio rectanguli VB ad AB eſt $\frac{V}{A}$, quia AB) VB ($\frac{V}{A}$; nempe rectangulum VB toties continet rectangulum AB, quoties recta V continet rectam A. Sic ratio 6 ad 2 eſt tripla, quia 2) 6 (3. Ratio 6 ad 4 eſt ſeſquialtera, ſive ea quæ 3 ad 2, quia 4) 6 ($\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$. Sic 3) 2 ($\frac{2}{3}$. A) V ($\frac{V}{A}$. Et in aliis ſimiliter.

Atq; hinc eſt, quod ratio alterna non ubiq; obtinet; ſed ſolum in quatuor proportionalibus homogeneis. (Quod notant interpretes ad 16 e 5.) Puta, ſi pondus A ad pondus B, ut linea α ad lineam β: non tamen dici poteſt, pondus A ad lineam α, ut pondus B ad lineam β. Ob cauſam jam aſſignatam.

Ideoq;

Ideoq; quotieſcunq; de proportione alterna, ſeu permutata agitur, (aliave quæ hanc involvat;) hæc ſemper ſubintelligenda cautio, etiamſi non deſertis verbis adjuncta fuerit. Qua de re plura deinceps dicentur ubi propoſitionem illam Euclidis 16 e 5 tractabimus.

De quantitatum ad heterogeneas Applicatione, quid ſentiendum.

Ea vero Diviſio ſive Applicatio, qua, verbi gratia, rectangulum AB applicari dicitur ad latus vel altitudinem A ut proveniat baſis B, vel contra; nempe A) AB (B, vel B) AB (A; vel etiam qua ſolidum ABC applicatur ad planum BC ut proveniat latus A, vel ad rectam A ut proveniat planum BC; nempe BC) ABC (A, vel A) ABC (BC; aliæq; hujuſmodi; nonniſi καταχρηστικῶς Diviſiones vocantur: nec præſenti negotio ſunt accommodæ. Quod enim prodit, *Quotiens* proprie non eſt, nec quæſtioni *quot* aut *quoties* reſpondet. Quippe quæ de *numero* quærit (aut quod numero eſt homogeneum) non de magnitudine, aliave quantitate numero heterogenea. Nec quidem Applicationes illæ, ad Diviſionem, alio nomine videntur referendæ, quam prout quantitates illæ ſingulæ ad inſtar numerorum conſiderantur. Non enim quæritur, quoties linea A in ſuperficie rectangula AB continetur; aut quoties vel A linea, vel BC planum, continetur in ſolido ABC: (quippe hoc omnino eſſet incongruum.) Sed, quoties *numerus* puta quadratorum in area parallelogrammi AB, contineat *numerum* longitudinum in latere A, ut proveniat *numerus* longitudinum in latere reliquo B. Item, quoties *numerus* cuborum in ſolido ABC contineat, vel *numerum* longitudinum in recta A, ut habeatur *numerus* quadratorum in baſi BC; vel *numerum* quadratorum in baſi BC, ut habeatur *numerus* longitudinum in recta A.

Sed & ubi magnitudo aliqua numero dividitur, puta 2) A ($\frac{A}{2} = \frac{1}{2}A$, non tam diviſio eſt (ſaltem quæ præſenti negotio conveniat) quam multiplicatio; (nempe quantitas A non tam dividitur per 2, quam multiplicatur per $\frac{1}{2}$;) quippe non quæritur, quoties *numerus* 2 contineatur in *magnitudine* A (quod abſurdum eſſet) ſed datæ quantitati A, alia in data ratione quæritur; quod *Multiplicationis* eſt, potius quam *Diviſionis*; quippe quæ in Multiplicatione Ratio datur, in Diviſione quæritur.

Atq; hinc patet, *Rationes omnes, quarumcunq; ad invicem quanti-*

tatum

Rationes omnes invicem homogeneæ.

Atq; hinc patet, *Rationes omnes, quarumcunq; ad invicem quantitatum, eſſe inter ſe homogeneas.* quippe in genere numeroſo omnes. Utut enim, verbi gratia, Linea & Pondus, ſint res plane heterogeneæ, nec rationem ad invicem habeant; Ratio tamen Lineæ ad Lineam, & Ponderis ad pondus, ſunt plane homogeneæ; puta ratio lineæ bipedalis ad pedalem, & Bipondii ad pondo, homogeneæ ſunt, imo eadem ipſa ratio, puta dupla: nam ſi inſtituatur Diviſio erit utrobiq; quotiens 2 Et quidem dum quærenti, Quotuplum ſit hoc illius, reſpondetur; Duplum, Triplum, quadruplum, ſeſquialterum, ſeſquitertiū &c. tantundē eſt atq; ſi quærenti, quot vicibus hoc illud contineat, reſpondeatur, Duabus, tribus, quatuor, una cum ſemiſſe, una cum triente, &c. Atq; hoc perinde ſive de lineis ſive ſuperficiebus ſive aliis quibuſvis quantitatibus invicem homogeneis quæratur. Et quidem ubi non diſtincte indicatur quoties, ſed per circuitum, eodem tamen res recidit. Nam ſi dicatur eandem eſſe rationem, verbi gratia, ſolidi VBq ad ABq, quæ eſt rectæ V ad rectam A; de numero tamen reſpondetur, nempe toties VBq continere ſolidum ABq, quoties recta V continet rectam A; utut non diſtincte dicatur quoties vel hoc vel illud fiat.

Sed non item omnes differentiæ.

Atq; hinc quidem amplum emergit diſcrimen, inter duas quas diximus quantitatum homogenearum comparationes. Quamvis enim tam quæ quoad Differentiam, quam quæ quoad rationem, inſtituitur comparatio, non ſit niſi inter homogeneas: quæ tamen ex comparatis homogeneis emergit Ratio, cum Ratione quæ ab aliis invicem homogeneis, ſed ad priores illas heterogeneis, emergit, comparari poſſit ut quid homogeneum; quod interim in comparatione quoad Differentiam non obtinet. Exſempli gratia; Si comparatur quoad rationem quadripondium ad bipondium, ratio eſt dupla; ſi linea quadripedalis ad pedalem, ratio eſt quadrupla: quæ rationes invicem comparari poſſunt; nempe hæc illius dupla eſt. At, ſi quoad differentiam inſtituatur comparatio; Quadripondii & bipondii, differentia eſt Bipondium; Lineæ quadripedalis & pedalis, differentia eſt linea tripedalis: Harum vero Differentiarum nulla poterit comparatio inſtitui (vel quoad differentiam vel quoad rationem) cum linea tripedalis, & bipondium, ſint quantitates plane heterogeneæ: altera in genere Lineæ, altera in genere Ponderis.

Cauſa

Diſcriminis cauſa.

Cauſa hujus diſcriminis hæc eſt; Quoniam ubi comparatio inſtituitur quoad Differentiam, Reſidua ſive Exceſſus eiuſdem ſemper ſunt generis cum comparatis (quippe totum & pars ſunt invicem homogenea;) adeoq; ſi hæc bina comparata, ſint binis illis heterogenea, etiam horum differentia heterogenea erit differentiæ illorum, & propterea comparationis incapax. Ubi autem comparatio fit quoad Rationem, quæ emerget ratio comparatorum genus non raro deſerit, & tranſit in genus numeroſum, cujuſcunq; ſint generis quæ comparantur;& propterea,utut bina comparata binis comparatis aliis heterogenea ſint, ratio tamen rationi homogenea eſt, ut comparationi locus ſit. Et quidem cum duplum & dimidium, triplum & triens,&c. perinde pro rationum nominibus habenda ſint; dimidii autem & trientis notæ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, numeris (fractis) accenſeantur; quidni & dupli, triplive notæ $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, vel 2, 3. Atq; hac potiſſimum de cauſa, ego totam Rationum doctrinam Arithmeticæ potius quam Geometricæ ſpeculationis eſſe autumo; totumq; Euclidis Elementum quintum Arithmeticum eſſe, utut ſpeciatim de Magnitudinibus efferantur propoſitiones, quæ interim non minus recte de Quantitatibus ſimpliciter quibuſvis efferri poſſent.

Differentia Quantitatem reſpicit, ratio Qualitatem.

Fortaſſe autē dicendum inſuper erit,comparationem quæ eſt quoad differentiam,ſimpliciter ad *Quantitatem* πηλικότητα, referendā eſſe;at quæ quoad Rationē,ad *Qualitatē* ποιότητα. Eo enim reſpicere videtur quæ apud Euclidem exſtat Rationis definitio, Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις 3 d 5. Cur enim ποιὰ σχέσις reddatur *quædam habitudo*, (quod ſolent interpretes,) non video; mallem *habitudo qualitativa*. Ut enim figuræ *Magnitudo* (quanta ſit) ad Quantitatem referri ſolet; at *Species* figuræ,lineæve (qualis ſit,) quæ in terminorum,partiumve homologarum ratione ad invicem maxime conſiſtit, ad *Qualitatem* (quartam nempe iſtius ſpeciem:) quidni & in præſenti negotio ſimiliter faciendum ſit; ut nempe comparatio quæ eſt quoad Differentiam dicatur comparatio *Quantitativa*; at quæ ſecundum Rationem, *Qualitativa*. Unde, ex rationum identitate, non tam oritur *Æqualitas* (quæ quantitatum eſt affectio)quam *Similitudo*,quę qualitates magis quam quantitates reſpicit.

Æqualitas, quantitatum eſt;ſimilitudo qualitatum,

Ex dictis itaq; patet, quid ſit quantitates invicem homogeneas,

as, tum quoad Exceſſum ſive Differentiam, tum quoad Rationem ſive Proportionem, invicem comparare. Nempe illic quæritur, quanto ſit hoc illo majus, vel contra; cui Subducendo ſatisfaciendum eſt: hic, quotuplum vel quantuplum ſit hoc illius, vel hujus illud; cui ſatisfaciendum eſt Dividendo. Illic exceſſus prodit, ſive differentia; hic quotus, ſive ratio.

Progreſſio duplex,

Ex duplici autem hac ſive Numerorũ, ſive quantitatum quarumlibet homogenearum, comparatione; duplex oritur, quæ tradita eſt, *Progreſſio*; quarum altera *Arithmetica* dicitur, altera *Geometrica*: (nominibus, credo, merè ad placitum impoſitis; cum utravis perinde Arithmeticam Geometriamve ſpectet; quæ tamen cum hactenus obtinuerint, per me immota ſunto.) *Progreſſionem* autem dicere mallem quam vel *Proportionem* vel *Proportionalitatem*, (quamquam non ignorem voces has non minus quam illam, & forſan ſæpius, apud authores hoc ſenſu occurrere,) ea potiſſimum de cauſa ut vocum ὁμωνυμία vitetur. Nam *Proportio* non raro vel apud Mathematicos non tam ἀναλογίαν, quam λόγον, *rationem* ſignificat, & quidem jam fere obtinet ut *ratio* & *proportio* Mathematicis promiſcue uſurpentur, aliis vero ſcriptoribus *rationis* vox hoc ſenſu rarius occurrat, ſed eo ſenſu in communi loquela *proportionis* vox ut plurimum uſurpetur quo apud Mathematicos *Ratio*. *Proportionalitas* autem, utut de progreſſione Geometrica minime diſpliceat, ut quæ tantundem valeat, an tamen ad progreſſionem Arithmeticam ita commode referenda ſit haud mihi conſtat. Quippe *Proportionalitas*, vi vocis, *proportionum* tantum, hoc eſt *rationum*, comparationem videtur innuere, non item *differentiarum*. Quod vero nonnullis placet, ut & *differentia* vocetur *ratio Arithmetica*, (& Ratio ſimpliciter ſumpta, *ratio Geometrica*,) non mihi admodum placet, cum λόγον (ſive *rationem* ſive *proportionem*, libeat interpretari,) non niſi de ea, quam vocant *rationem Geometricam*, apud Euclidem uſurpari video, neſcio an apud Veterum quemvis alium; quod & de *proportionis* voce perinde intelligendum videtur. Cum vero mos ille loquendi jam obtinuerit, nos etiam eadem nonnunquam utemur formula; *Arithmetice proportionalia* appellando, quæ ſunt in progreſſione arithmetica, conſtituta.

Progreſſio Arithmetica.

Progreſſio Arithmetica dicitur, ubi numeri plures (aliæve quantitates invicem homogeneæ) æqualibus differentiis (ſive exceſſibus ſive defectibus) procedunt. Ut 2. 4. 6. 8. &c. &

3. 5. 7. 9. &c. & contra 9. 7. 5. 3. &c.

Progreſſio Geometrica, ubi plures numeri (aliæve quantitates invicem homogeneæ) eadem (vel æquali) ratione ſive proportione progrediuntur. Ut 2. 4. 8. 16. 32. &c. & 3. 9. 27. 81. 243. &c. & 8. 12. 18. 27. &c. & contra 32, 16, 8, 4, &c. & pariter in ſimilibus. Ut enim progreſſio Arithmetica, æqualitatem Differentiarum ſpectat; ſic Geometrica, Rationum ſive æqualitatem ſive identitatem dicas: Unde illic *communis exceſſus* ſive *differentia*, hic *communis ratio* ſive *proportio*, progreſſionis *ſpeciem* determinat. *Progreſſio Geometrica.*

Harum autem Progreſſionum utraq; (tum Arithmetica tum Geometrica) eſt vel *Continua*, vel *Disjuncta*, (ſive diſcreta, diſcontinua, interrupta;) Illa, ubi quantitates continue poſitæ æqualibus aut differentiis aut rationibus ubiq; procedunt. Hæc, ubi eadem quidem differentia aut ratio identidem redit, ſed non continue. In illa, quilibet terminus intermedius tum antecedens eſt tum conſequens, communis ſive differentiæ ſive rationis; In hac, non item. Sic 3, 5, 7, 9, 11, vel 11, 9, 7, 5, 3, ſunt in progreſſione arithmetica continua (vel, ſi libet, Arithmetice proportionales continue,) quia quilibet numerus illic antecedentem, hic conſequentem, binario ſuperat. At 3, 5; 9, 11. vel 9, 11; 5, 7. ſunt in progreſſione arithmetica disjuncta ſive interrupta conſtituti; nam eodem exceſſu ſecundus primum, & quartus tertium ſuperet, at non item tertius ſecundum. Et pariter 5, 3; 11, 9; 17, 15; 19, 17. ſunt in eadem progreſſione arithmetica, ſed interrupta. Eodem modo, 2. 4. 8. 16. 32. &c. vel 32. 16. 8. 4. &c. ſunt in progreſſione Geometrica continua; quippe illic numerus conſequens antecedenti ſuo eſt ubique in ratione dupla, hic dimidia ſive ſubdupla. At 2. 4 : : 3. 6 : : 4. 8. ſunt quidem in eadem progreſſione Geometrica, ſed interrupta; quippe ſecundus primum, & quartus tertium, & ſextus quintum eadem ratione ſuperant; ſed non item tertius ſecundum, vel quintus quartum. Similiter, de 4. 1 : : 12. 3. dicendum eſt, qui quidem numeri ſunt geometricè proportionales, ſed non continue. *Progreſſio eſt vel continua vel disjuncta.*

Et quidem (quod ſemel dictum eſto) hujuſmodi ſive numerorum ſive quantitatum deſignatio A. B : : C. D, in ſequentibus ſæpiſſime intelligatur quantitates deſignare proportionales (Geometrice intellige) ſaltem diſcontinue; nempe qua ratione *Proportionalium notatio.*

 ne

ne A ad B, eadem & C ad D. Hujuſmodi autem A.B.C.D ∺ notabit eaſdem eſſe continue proportionales. Progreſſio autem Arithmetica, ubi opus eſt, ſic poterit notari A, B; C, D; vel, ſi continua fuerit, A, B, C, D ∻

Atq; hactenus tum duplicem quantitatum invicem comparationem ſatis aperuiſſe videamur; tum utriuſq; progreſſionis, Arithmeticæ ſcilicet & Geometricæ, naturam, quas in ſequentibus capitibus fuſius proſequar.

Progreſſionem autem ſive *proportionalitatem Harmonicam* vel *Muſicam* dictam, cum ad ſcopum noſtrum minus videatur pertinere, omittendam cenſui. *Ea vero eſt* (ſiquis quæ ſit ſcire deſiderat) *quando in quatuor terminis eſt ut primus ad quartum, ſic differentia primi & ſecundi ad differentiam tertii & quarti.* Puta ſi A. D :: B — A. D — C. Erunt illæ quantitates A, B, C, D, harmonice proportionales. Sic numeri 5, 8, 12, 30. quia 5. 30 :: 8 — 5 = 3. 30 — 12 = 18. Vel etiam, *tres quantitates Harmonice proportionales ſunt, ſi ut prima ad tertiam, ſic differentia primæ & ſecundæ, ad differentiam ſecundæ & tertiæ.* puta A. C :: B — A. C — B. erunt, hoc caſu tres A, B, C, Harmonice proportionales; vel, ſi libet, quatuor A, B, B, C. Sic numeri 3. 4, 6, vel 3, 4, 4, 6. Nam 3. 6 :: 4 — 3 = 1. 6 — 4 = 2. Quod innuiſſe ſufficiat.

Proportio Harmonica.

CAP. XXVI.

Progreſſio Arithmetica variorum problematum familiarium ſolutione explicatur.

DE Arithmetica Progreſſione continua, ſolent hujuſmodi proponi Problemata, aliaq; multa his ſimilia.

Problemata Progreſſionem Arithmeticam ſpectantia.

1 Dato termino primo, & communi terminorum exceſſu; terminum ultimum, aliumve in progreſſione quemlibet, inveſtigare.

2 Dato termino primo, communi item exceſſu, & numero terminorum; ſummam terminorum omnium invenire.

3 Dato termino primo, cum exceſſu communi, & alterius cujuſvis termini valore; invenire quoto loco in ſerie terminus ille

ille reperitur. Vel (quod perinde eſt) dato termino primo, & ultimo, cum exceſſu communi; invenire numerum terminorum.

4 Dato termino primo, & ultimo, cum numero terminorum; communem exceſſum inveſtigare.

5 Dato numero terminorum, cum terminorum omnium aggregato, & exceſſu communi; primum terminum invenire.

Per terminum primum jam intelligo (quod & deinceps intelligatur) terminum minimum; & per ultimum, maximum. Quamvis enim progreſſio, ſive creſcendo ſive decreſcendo fieri poſſit; ego tamen tanquam creſcentem conſidero, atq; eo ſenſu quæ dicenda ſunt intellecta velim. Et propterea, ſiquis ea decreſcenti ſeriei accommodare velit, id fiet mutatis tantum his vocibus primo & ultimo: Nempe quæ jam de primo creſcentis dicuntur, illic de termino ultimo decreſcentis ſeriei intelligenda erunt; quæ hic de ultimo, illic de primo. Quod ſemel dictum eſto, ne ſæpius opus ſit utrumque caſum ſeorſim proponere.

Exempli gratia. 1. Siquis iter conficiens ambulaverit primo die 3 milliaria, ſecundo 5, tertio 7, & ſic deinceps, diurnum iter quotidie augendo binis milliaribus; Quæritur quot milliaria ambulaturus eſt die Decimo? *Solvuntur.*

Quoniam ſinguli dies poſt primum, addunt incrementum duorum milliarium; multiplicetur numerus dierum poſt primum, nempe 9, in communem exceſſum 2; & productum $18 = 9 \times 2$, addatur itineri primi diei, eritque $21 = 18 + 3$ numerus quæſitus: tot nempe milliaria confecturus eſt die decimo.

2 Si quæratur inſuper, Quot toto itinere ambulaverit?

Additis termino primo & ultimo (ita ut jam dictum eſt invento,) ducatur ſumma in numerum terminorum: producti dimidium eſt numerus quæſitus. Puta $3 + 21 = 24$; & $24 \times 10 = 240$; hujus numeri ſemiſſis, 120, eſt numerus milliarium toto decem dierum itinere confectorum.

3 Si quæratur, Quoto itineris die ambulaverit 15 milliaria?

Ex numero aſſignato 15, auferatur terminus primus 3; & reſiduum per communem exceſſum dividatur: quod prodit, indicat quot diebus poſt primum ambulaverit. Nempe $15 - 3 =$ 12,

12, & 2) 12 (6. Septimo igitur die, (ſive poſt primum ſexto,) ambulantur milliaria 15.

4 Si ambulaverit primo die 3 milliaria, decimo 21; & quæratur communis exceſſus.

Dematur ex termino maximo minimus: quod reſtat dividatur per numerum terminorum poſt primum; Quod prodit eſt communis exceſſus. Nempe 21 — 3 = 18. & 9) 18 (2. ergo communis exceſſus eſt, duorum milliarium.

5 Si totum iter milliarium 120, diebus 10 confectum, quotidiano incremento duorum milliarium; & quæratur primi diei iter.

Dividantur 240, duplum numeri milliarium toto itinere confectorum, per numerum dierum 10; prodeunt 24, ſumma milliarium dierum primi & ultimi conjunctim. Ducantur inſuper 9, numerus dierum poſt primum, in communem exceſſum 2, & prodeunt 18, exceſſus totus termini ultimi ſupra primum. Quibus demptis ex primi & ultimi aggregato 24, reſtant 24 — 18 = 6. Horum ſemiſſis, 3, eſt iter primi diei.

Porro; Ponamus alium exire die quinto, & æquabili itinere progredi. Quæritur, quot illum oporteat milliaria quotidie conficere, ut eodem tempore cum præcedente idem iter confecerit.

Cum ex 10 diebus, ponantur elapſi 4, reſtant 6. Cum igitur diebus 6 confecturus ſit iter milliarium 120; facta diviſione 6) 120 (20, prodit numerus milliarium quolibet die conficiendorum, nempe 20, ut eodem die cum præcedente idem confecerit iter.

Exſemplum aliud eſto hujuſmodi; cum notum ſit horologium hora poſt meridiem prima ſonitum 1 edere, ſecunda 2, tertia 3, & ſic deinceps: Quæratur, quot edat ſonitus, duodecim ſuccedentium horarum ſpacio. Vel etiam, quot ab hora tertia, ad horam nonam. Aliaq; ſimilia. Quibus quæſitis, eodem quo ſupra modo ſatisfaciendum erit.

Item, Si ponamus 20 lapides ita collocatos, ut primus abſit uno milliari, ſecundus duobus, tertius tribus, & ſic deinceps; oporteat autem aliquem hos omnes lapides ſigillatim afferre: Quæritur, quot ille milliaria confecturus ſit priuſquam omnes attulerit.

Cum ad primum lapidem eundo & redeundo, duo milliaria eundum

cundum fit; ad ſecundum, 4; ad trium, 6; &c. Communis exceſſus eſt 2; idemq; terminus primus: numerus autem terminorum 20. Cumq; etiam idem ſit terminus primus & communis terminorum exceſſus; ducto exceſſu communi in numerũ terminorum, habetur terminus ultimus $40 = 20 \times 2$. cui ſi addatur terminus primus 2, erit $40 + 2 = 42$ extremorum aggregatum; quod ductum in numerum terminorum, dat $42 \times 20 = 840$ duplum totius itineris; (vel aggregatum ductum in ſeminumerum terminorum, aut aggregati ſemiſſis in numerum terminorum, dat ipſum iter; puta $42 \times 10 = 21 \times 20 = 420$:) conficienda igitur ſunt milliaria 420, quò omnes illi lapides ſigillatim afferantur.

Et pari modo alia hujuſmodi problemata de Progreſſione Arithmetica, & excogitari & diſſolvi facile poterunt; vel etiam ex vulgaribus Arithmeticæ practicæ libris depromi; quibus ſe exercere poterunt tyrones. Nobis recenſendis pluribus immorandum eſſe non duxi. Sed nec in jam traditis ſingularum operationum rationes aperui, cum non ſint admodum intricatæ, quin poſſint, ex operationum Arithmeticarum ſuperius expoſitarum natura ſatis intellectâ, vel a tyrone, modo advertente, ſatis percipi; unde & ipſe inibi ſe exerceri non gravatim feret: ſed præſertim quod ſequente capite tum horum tum aliorum plurimorum problematum huc ſpectantium traditionem demonſtrativam aggreſſurus ſum.

CAP. XXVII.

Progreſſio Arithmetica fuſius traditur.

QUo Progreſſionis Arithmeticæ doctrinam plenius aperiam, libet eam ſequentibus propoſitionibus ſuccinctè, ſed & perſpicue tradere.

Siquem autem male habeat, quod hic aliquoties Æquationum vel ordinationes, vel etiam Analyſes, adhibeam, priuſquam illarum traditionem docuerim, (adeoq; methodi leges violatas cauſetur;) poterit ille tum hoc, tum ſequens caput, tum etiam Cap. 32, & 33, vel penitus omittere, vel ſaltem intermittere

mittere

mittere, donec Æquationum doctrinam tradidere; & quaſi eſſent poſtpoſita reputare.

Quod autem aggredior quo rectius fiat, hæc ſunto quibus ſum uſurus ſymbola.

Terminus minimus, quem primum appello, ſit A; maximus, quem ultimum appello, ſit V. communis exceſſus E. Numerus Terminorum, T. Terminorum quorumvis ab invicem diſtantia, D. Extremorum (maximi & minimi) aggregatum $Z = A + V$. eorundem differentia $X = V - A$. Terminorum omnium ſumma vel aggregatum S. Singuli autem, a minimo inchoando, dicantur *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, &c. a maximo vero inchoando, dicantur $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$, &c. Numeros, qui cujuſlibet termini diſtantiam a primo indicant, *Indices* appello, puta 0, 1, 2, 3, &c. His præmiſſis, ſequuntur propoſitiones.

Diſtantia a primo.						Diſtantia ab ultimo.
0	*a*	A	3	V − 9E	κ	9
1	*b*	A + E	5	V − 8E	ι	8
2	*c*	A + 2E	7	V − 7E	θ	7
3	*d*	A + 3E	9	V − 6E	η	6
4	*e*	A + 4E	11	V − 5E	ζ	5
5	*f*	A + 5E	13	V − 4E	ε	4
6	*g*	A + 6E	15	V − 3E	δ	3
7	*h*	A + 7E	17	V − 2E	γ	2
8	*i*	A + 8E	19	V − E	β	1
9	*k*	A + 9E	21	V	α	0
		S	120	S		

1 Si continuæ progreſſionis Arithmeticæ primus terminus ſeu minimus ſit A, erit ſecundus $A + E$, tertius $A + 2E$, quartus $A + 3E$, & ſic deinceps quilibet terminus continue augendus eſt communi exceſſu ſemel addito. Nempe illud poſtulat Arithmeticæ progreſſionis definitio. Puta $a = A$. $b = A + E$. $c = A + 2E$. &c.

2 Conſtat igitur terminus quilibet, ex termino primo ſeu minimo, cum communi exceſſu toties addito, quot terminus ille gradibus a primo diſtat: (ipſo primo non computato,) ſive (quod tantundem eſt) cum exceſſu communi in Indicem ducto. Sequitur hæc ex præcedente. Cum enim pro quolibet diſtantiæ gradu exceſſus ſemel additur; toties addendus erit, quot

quot ſunt diſtantiæ gradus. Puta, terminus ſextus $f = A + DE = A + 5E$.

3 Dato igitur termino primo, cum communi Exceſſu, & termini cujuſvis aſsignati Indice, ſive diſtantia a primo; A, E, D; invenitur terminus aſsignatus. nempe $A + DE$. per præced. quod enim illic theorematice affirmatur, hic problematice proponitur.

4 Si terminus ultimus ſit V; erit penultimus $V - E$; antepenultimus $V - 2E$; quartus a fine $V - 3E$; & ſic deinceps quilibet terminus continue minuendus eſt communi exceſſu ſemel detracto. Id enim poſtulat definitio. Quanto enim quilibet locus progrediendo augetur, tanto retrocedendo quilibet minuitur. Puta $\alpha = V$. $\beta = V - E$. $\gamma = V - 2E$ &c.

5 Conſtat igitur terminus quilibet ex termino maximo, dempto toties exceſſu communi, quot terminus ille gradibus ab ultimo diſtat: (ipſo interim ultimo non cōputato.) per præced. Puta, ſextus a fine $\zeta = V - DE = V - 5E$.

6 Dato igitur termino maximo, cum exceſſu communi, & termini cujuſvis aſſignati diſtantia ab ultimo; V, E, D; invenitur terminus aſſignatus. Nempe $V - DE$. per præced.

7 Dato termino quovis, cum exceſſu communi, & cujuſvis aſſignati termini majoris a dato diſtantia, (puta f, D, E;) invenitur terminus aſſignatus. (ut *i*.) Nempe toties addendo exceſſum communem termino dato, quot aſſignatus a dato gradibus diſtat. Puta $i = f + DE = f + 3E$. Nam per def. vel prop. 1. pro ſingulis gradibus ſemel addendus eſt communis exceſſus.

8 Dato termino quovis, cum exceſſu communi, & cujuſvis aſſignati minoris diſtantia a dato; (puta f, D, E;) invenitur aſſignatus. (ut *c*.) Nempe toties auferendo exceſſum communem, quot aſſignatus a dato gradibus diſtat. Puta $c = f - DE = f - 3E$. Nam per def. vel prop. 4. pro ſingulis gradibus ſemel auferendus eſt communis exceſſus.

9 Dato igitur exceſſu communi, cum terminorum quorumvis ab invicem diſtantia; E, D; datur illorum terminorum differentia. (puta $f - c$: vel $i - f$.) nempe DE. per prop. 7 & 8. Puta $i - f = DE = 3E$. per prop. 7. & $f - c = DE = 3E$. per prop. 8. tranſpoſitis ſcilicet utrobique æquationum terminis.

10 Data vero terminorum quorumvis differentiâ, cum eorundem ab invicem diſtantia; (puta $f - c$, D ;) datur communis exceſſus E. Dividendo ſcilicet differentiam per diſtantiam. Nam cum ſit, verbi gratia, $f - c = DE$, per præcedentem; erit $\frac{f - c}{D} = E$.

11 Item data terminorum quorumvis differentia, cum communi exceſſu; ($f - c$, E:) datur eorundem diſtantia D, Dividendo ſcilicet differentiam per communem exceſſum. Nam cum ſit (per prop. 9.) $f - c = DE$; erit $\frac{f - c}{E} = D$.

12 Porro; Termini duo quilibet, cum duobus aliis ejuſdem progreſsionis quibuſlibet, in eadem ab invicem diſtantia poſiti, habent & eandem differentiam. Cum enim per prop. 9. differentia ſit D E; ſi utrobiq; æqualis ſit, non modo E communis exceſſus, ſed & diſtantia D; erit eadem utrobiq; differentia D E. Puta ſi a, b, c, d, e, f, ÷, erit $c - a = f - d$.

13 Et contra; Si eadem ſit utrobiq; differentia, eadem eſt & utrobiq; diſtantia. Nam ſi tum exceſſus communis E, tum differentia D E, ſit utrobiq; æqualis; erit utrobiq; æqualis D. Puta a, b, c, d, e, f, ÷, & $c - a = f - d$; erunt a, c, & f, d, æqualiter remoti.

14 Ergo etiam; Si ex terminis quotvis in continua progreſſione arithmeticâ conſtitutis, ſeligantur quotlibet in eadem continue ab invicem diſtantia; erunt & hi in continua progreſſione arithmetica conſtituti. Puta ſi $a, b, c, d, e, f, g, h, i, k$, ÷, erunt item tum a, c, e, g, i, ÷ tum b, d, f, h, k, ÷; tum a, d, g, k, ÷; tum a, e, i, ÷; in continua progreſſione arithmetica conſtituti. Nam æqualibus continue differentiis continue creſcunt, per prop 12.

a,	b,	c,	d,	e,	f,	g,	h,	i,	k,	÷
a,		c,		e,		g,		i,		÷
	b,		d,		f,		h,		k,	÷
a,			d,			g,			k,	÷
a,				e,				i,		÷

15 Et contra; ſi ex terminis ita continue progredientibus, ſelecti quotlibet continue item progrediuntur; æqualibus ab invicem diſtantiis ſumpti ſunt, per prop. 13.

16 Dato exceſſu communi, cum numero terminorum, E, T: invenitur extremorum differentia, X. Eſt enim extremorum diſtantia unitate minor, quam numerus terminorum;

$D = T - 1$. ut patet. Ergo, per 11. $X = V - A = DE = TE - E$.

17 Et, Data extremorum differentiâ, cum numero terminorum; X, T: habetur communis exceſſus, E. Nempe, cum ſit per præced. $X = DE = TE - E$. Erit $\frac{X}{D} = \frac{X}{T - 1} = E$.

18 Et Data extremorum differentia, cum communi exceſſu; X, E: habetur terminorum numerus, T. Cum enim ſit $DE = X$, erit $\frac{X}{E} = D = T - 1$. Et $\frac{X}{E} + 1 = D + 1 = T$.

19 Dato termino primo ſeu minimo; cum communi exceſſu, & numero terminorum; A, E, T: habetur terminus ultimus, V. Cum enim, per 16. $X = V - A = TE - E$; erit $V = A + TE - E$, vel $V = A + DE$.

20 Dato termino maximo, cum communi exceſſu, & numero terminorum, V, E, T; invenitur minimus, A. Nempe ſublata, ex maximo, extremorum differentiâ; manet minimus. Cum ergo per 16. $X = DE = TE - E$. Erit $V - X = A = V - TE + E = V - DE$.

21 In continua progreſſione arithmetica, ſi ex ſumma duorum quorumvis terminorum auferatur progreſſionis terminus primus; quod reſtat, eſt progreſſionis terminus ille cujus a primo diſtantia æquatur ipſorum a primo diſtantiis ſimul ſumptis. Sive, cujus Index æquatur eorum Indicibus ſimul ſumptis. Nam, per prop. 2. quilibet terminus conſtat ex primo cum tot exceſſibus quot gradibus a primo diſtat: Ergo duo additi continent primum bis, cum tot exceſſibus quot ſunt utriuſq; diſtantiæ gradus ſimul additi. Hinc ſi ſemel auferatur primus; manet primus terminus ſemel cum tot exceſſibus quot ſunt utriuſq; diſtantiæ gradus ſimul additi; hoc eſt (per eandem prop. 2.) terminus ille cujus diſtantia eſt eorum diſtantiis ſimul additis æqualis.

diſt: c + diſt: f = diſt: b.

$$c + f - a = b$$

$$c = A + 2E$$
$$f = A + 5E$$
$$c + f = 2A + 7E$$
$$c + f - A = A + 7E = b$$

qualis. Puta terminus tertius $c = A + 2E$, ſextus $f = A + 5E$, horum aggregatum $c + f = 2A + 7E$; hinc ſublato A, reſtat $A + 7E$ terminus octavus, h; cujus a primo diſtantia 7, æqualis eſt diſtantiis tertii & ſexti ſimul ſumptis $2 + 5$.

22 Eodem modo; ſumma trium, quatuor, quinq; aut plurium terminorum; abjecto primo tot vicibus una minus; æquatur termino illi cujus Index eſt eorum omnium Indicibus ſimul ſumptis æqualis. Puta ſi diſt. b + diſt. d + diſt. e = diſt. i; erit $b + d + e - 2a = i$. Probatur ut præcedens.

$$\text{diſt. } b + \text{diſt. } d + \text{diſt. } e = \text{diſt. } i;$$
$$b + d + e - 2a = i$$

$$b = A + E$$
$$d = A + 3E$$
$$e = A + 4E$$

$$b + d + e = 3A + 8E$$
$$b + d + e - 2A = A + 8E = i$$

23 Ergo, ſi primus progreſſionis terminus ſit o ciphra, vel nihil: duorum pluriumve terminorum ſumma, æqualis eſt iſti termino cujus Index eſt eorum Indicibus ſimul ſumptis æqualis. Sequitur ex prop. 21, 22, quia ſublatio primi termini $A = 0$, nihil immutat. Puta in progreſſione 0, 3, 6, 9, 12, 15, eſt $6 + 9 = 15$, quippe cujus Index æquatur eorum Indicibus ſimul ſumptis, $5 = 2 + 3$.

24 Item, in ejuſmodi progreſſione (cujus primus terminus eſt o) terminus quilibet æquatur illi communis exceſſus multiplo, qui eſt Indici, ſive a primo diſtantiæ cognomine. Cum enim per prop. 2. Sit terminus quilibet $A + DE$; ſi ſit $A = 0$, erit $A + DE = DE$.

25 In continua progreſſione Arithmetica, ſi duorum terminorum differentiæ, addatur terminus primus; emergit terminus cujus diſtantia a primo eſt eorum diſtantiarum item a primo differentiæ æqualis: ſive, cujus Index æquatur Indicum illorum differentiæ: vel qui tantundem diſtat a primo quantum illi ab invicem. Sequitur ex prop. 21. Si enim, verbi gra-

tia:

tia, diſt. b — diſt: c = diſt: f, hoc eſt, diſt. b = diſt: c + diſt f. erit (per prop. 21.) $b = c + f - a$; ergo $b - c + a = f$.

26 Si igitur primus terminus ſit o; duorum quorumvis differentia eſt terminus ille cujus index ſive diſtantia a primo eſt illorum indicum differentiæ æqualis. Quoniam hoc caſu $b - c = b - c + a = f$.

27 Item, hoc caſu, terminus ille, cujus index æquatur duorum indicum differentiæ, eſt multiplum exceſſus communis, indici ſuo (ſive duorum illorum indicum differentiæ) cognomine. Cum enim indicum differentia oſtendat terminorum diſtantiam; ſitq; per prop. 9. differentia terminorum, D E (multiplum exceſſus cognomine diſtantiæ, ſive indicum differentiæ;) erit terminus ille, cujus index huic indicum differentiæ æquatur, item D E; quippe quæ eſt terminorum illorum differentia, per præced.

28 In continua progreſſione Arithmetica, extremorum aggregatum æquatur aggregato duorum quorumvis terminorum æqualiter ab extremis utrinque remotorum; (Intellige, quorum unus a primo tot abeſt gradibus, quot alter ab ultimo.) Nam, per prop. 2. & 5; tanto unus minimum ſuperat, quanto alter a maximo deficit; propter æqualem utrobique diſtantiam. Puta $c = A + 2E$, & $\gamma = V - 2E$; ergo $c + \gamma = A \pm 2E \pm V - 2E = A + V$. Et ſic ubique.

$$\begin{array}{r} c = A + 2E \\ \gamma = V - 2E \\ \hline c + \gamma = A + V \end{array}$$

29 Sin terminus omnium medius ab utroq; extremo æqualiter diſtet, (quod ubi numerus terminorum eſt impar contingit) terminus ille bis ſumptus æquatur extremorum aggregato. Puta expoſitis $a, b, c, d, e \div$ erit $a + e = 2c$. quia $c - a = e - c$, propter æqualem utrobique diſtantiam. Ideoque $c + c = a + e = 2c$.

30 Similiter in quatuor terminis Arithmeticæ progreſſionis interruptæ. Nempe Aggregatum extremorum æquatur aggregato mediorum. Puta $A, M; N, V$. Cum enim, propter communem utrobiq; exceſſum, ſit $M - A = V - N = E$, ideoque $A + E = M$, & $N + E = V$, hoc eſt $V - E = N$; erit $M + N = A + E + V - E = A + V$. Vel, expoſitis $V, N; M, A$. quoniam $V - N = M - A = E$, ideoque $V - E = N$, & $M - E = A$, hoc eſt $M = A + E$; erit $N + M = V - E + A + E = A + V$.

$$\begin{array}{c} M = A + E \\ N = V - E \\ \hline M + N = A + V \end{array}$$

31 Ergo, Quatuor terminorum Arithmeticè (ut loquuntur) proportionalium, datis tribus quibuſlibet datur & reliquus. Cum enim expoſitis $A, M; N, V$. ſit per præced. $A + V = M + N$; erit (æqualibus utrinque ſubductis) $A = M + N - V$, $V = M + N - A$, $M = A + V - N$, $N = A + V - M$.

Datis	A, M, N.	Datur	$V = M + N - A$.
	A, M, V.		$N = A + V - M$.
	A, N, V.		$M = A + V - N$.
	M, N, V.		$A = M + N - V$.

32 Ex tribus autem in Arithmetica progreſſione continuè conſtitutis, Aggregatum extremorum æquatur duplo medii. Quippe terminus medius, eodem exceſſu ſuperat extremorum unum, quo ab altero ſuperatur. Puta A, M, V ∺. quoniam eſt $M - A = V - M = E$, ſive $A + E = M = V - E$, erit $M + M = 2M = A + V$.

$$\begin{array}{c} M = A + E \\ M = V - E \\ \hline 2M = A + V \end{array}$$

33 Ergo, ex tribus terminis continue progredientibus arithmetice, datis duobus quibuſvis datur & reliquus. Cum enim, per præced. ſit $2M = A + V$; erit $2M - A = V$, $2M - V = A$, $M = \frac{A + V}{2}$.

$$\text{Datis}\begin{cases} A,\ M, \\ A,\ V, \\ M,\ V, \end{cases}\text{Datur}\begin{cases} V = 2M - A. \\ M = \frac{A+V.}{2} \\ A = 2M - V, \end{cases}$$

34 Atq; idem valet de tribus quatuorve terminis progreſſionis Arithmeticæ, utut non immediate proximis, modo æqualibus utrobiq; intervallis diſtantibus. Puta, ſi *a*,*b*,*c*,*d*, *e*, *f*, *g*, ∸ erit $a + e = 2c$. Nam & *a*, *c*, *e*, ∸ per prop. 14. Item $a + f = c + d$. & $d + e = b + g$. Et ſic alibi. Nam *a*, *c*; *d*, *f*. vel *a*, *d*; *c*, *f*. & *b*, *e*; *d*, *g*, vel *b*, *d*; *e*, *g*. &c. per pr. 12.

35 Sed & præcedentium aliquot converſæ pariter demonſtrantur. Puta converſa pr.28. In continua progreſſione Arithmetica, (excepta tantum progreſſione æqualium, ubi exceſſus eſt ubiq; nullus, puta, 1, 1, 1, 1, &c ∸ ; quæ & deinceps aliquoties excepta intelligatur.) ſi duorum intermediorum terminorum aggregatum aggregato extremorum æquetur, ſunt illi ab extremis æqualiter utrinq; remoti; (hoc eſt, quot gradibus intermediorum alter ab altero extremorum, tot reliquus a reliquo diſtat.) Puta in progreſſione *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, ∸ ſi $c + e = a + g$, totidem gradibus diſtant *a*, *c*, atque *e*, *g*; item *a*, *e*, atque *c*, *g*. Cum enim quanto duorum *c*, *e*, alter major eſt quam *a*, tanto alter minor ſit quam *g*, (ſecus enim aggregata non eſſent æqualia,) diſtantia utrobique æqualis erit per prop.13.

36 Et converſa prop.29. Si termini alicujus intermedii duplum æquetur aggregato extremorum: æqualiter ille ab utroque extremo diſtat. Probatur ut præcedens.

37 Item converſa prop. 32. Si unius termini duplum æquetur duorum aggregato, erit ille medius Arithmeticus inter hos. Nam, niſi æqualibus differentiis horum tum alter major ſit tum alter minor, quam eſt expoſitus, non conſtaret æqualitas

38 Similiter & converſa prop.30. Si bini binis ſimul ſint æquales, erunt illi quatuor termini Arithmetice (ut loquuntur) proportionales. Puta ſi $A + V = M + N$, quanto horum alter puta M, ſuperat alterum illorum puta A, tanto horum reliquus ab illorum reliquo deficit; (nam niſi exceſſus & defectus ſe mutuo perimant non conſtabit aggregatorum æqualitas;) Ideoque $M - A = V - N = E$. Ergo A,M ∷ A + E:

N, V $= N + E$. Vel ſic, quia $A + V = M + N$; erit $V = M + N - A$, & $V - N = M - A$: Ergo, per def. A, M; N, V. Sed & eodem argumento M, A; V, N. vel V, N; M, A. Item, cum ſit $V = M + N - A$ (ut dictum eſt) erit etiam $V - M = N - A$; Ideoq; V, M; N, A, & M, V; A, N, vel A, N; M, V. Atque hinc ſequitur, non tantum

39 Si quatuor termini ſint Arithmetice proportionales, ſunt & inverſe proportionales; (Intellige, ſi A, M; N, V. vel N, V; A, M, tum M, A; V, N, vel V, N; M, A.) quod ex ipſa definitione ſequitur. Nam ſi in alteris ſit æqualis exceſſus, in alteris erit æqualis defectus; adeoque utrobique progreſſio Arithmetica. Sed &

40 Si quatuor termini ſint Arithmetice proportionales, ſunt & alterne (permutatim, viciſsim,) proportionales. Hoc eſt, ſi A, M; N, V, ideoque $A + V = M + N$; erit A, N; M, V, ut oſtenſum eſt prop. 38. Item N, A; V, M, ut ibidem & prop. 39.

41 Item ſi Arithmetice proportionalium vel primus & tertius, vel ſecundus & quartus, æqualiter vel augeantur, vel minuantur; manent adhuc arithmetice proportionales. Puta, ſi A, M; N, V, hoc eſt A, $A + E$; N, $N + E$; erit etiam A, $M + B$; N, $V + B$, hoc eſt A, $A + E + B$; N, $N + E + B$; Nempe illic communis exceſſus eſt E, hic $E + B$. Item $A + B$, $M = A + E$; $N + B$, $V = N + E$, ubi communis exceſſus eſt $E - B$. Et, pari de cauſa, $A \pm B$, $M \pm C$; $N \pm B$, $V \pm C$; Et pariter in ſimilibus. Quippe qui prius erat communis exceſſus, utrobiq; vel pariter augetur, vel pariter minuitur, adeoque etiamnum utrobique æqualis; & propterea termini Arithmetice proportionales.

42 Item, ſi Arithmetice proportionales ſint tum A, M; N, V. tum $\alpha, \mu; \nu, \upsilon$; tum $a, m; n, u$, (tum, ſi placet, quaterni plures:) erunt item tum aggregata, tum differentiæ, terminorum reſpective ſumptorum, termini proportionales. Puta $A + \alpha \pm a$, $M + \mu \pm m$; $N + \nu \pm n$, $V + \upsilon \pm u$. Nam ſi in primis exceſſus ſit ubique E, in ſecundis ε, in tertiis e; erit in quartis $E + \varepsilon \pm e$. Ut additione patebit.

A,

$$\left\{\begin{matrix} A, \\ \alpha, \\ a, \end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix} M = A + E; \\ \mu = \alpha + \epsilon; \\ m = a + e; \end{matrix}\right. \qquad \left\{\begin{matrix} N, \\ \nu, \\ n, \end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix} V = N + E. \\ \upsilon = \nu + \epsilon. \\ u = n + e. \end{matrix}\right.$$

$$A + \alpha \pm a, \quad A + \alpha \pm a + E + \epsilon \pm e; \quad N + \nu \pm n, \quad N + \nu \pm n + E + \epsilon \pm e.$$

43 Sed & idem obtinet in Arithmeticis progreſſionibus continuis. Quod ſimiliter probandum erit. Puta, ſi tum $A, B, C, D, ∺$, tum $\alpha, \beta, \gamma, \delta, ∺$, tum $a, b, c, d, ∺$; erunt $A + \alpha \pm a$, $B + \beta \pm b$, $C + \gamma \pm c$, $D + \delta \pm d$, $∺$.

44 Et quidem, licet altera progreſſio creſcens fuerit, altera decreſcens.

$$\text{Puta} \left\{\begin{matrix} A + E, & A + 2E, & A + 3E, & A + 4E, & ∺ \\ \upsilon - \epsilon, & \upsilon - 2\epsilon, & \upsilon - 3\epsilon, & \upsilon - 4\epsilon, & ∺ \end{matrix}\right.$$

Quippe aggregatorum exceſſus continuus eſt $E - \epsilon$.

Atq; hujuſmodi complures proportionalium immutationes & comparationes facile eſſet tum comminiſci tum demonſtrare. Verùm illud haud eſt neceſſe, ſed cujuſlibet potius arbitrio permittendum, ut id, prout opus fuerit, pro re nata curet; & cum res poſtulaverit ipſe perficiat.

45 In continua progreſſione Arithmetica, Aggregatum extremorum $(Z = A + V)$ per numerum terminorum multiplicatum T, eſt duplum ſummæ terminorum omnium. Hoc eſt $TZ = 2S$. Progreſſionis termini ordine directo (a primo inchoati) dicantur a, b, c, d, &c. Iidem termini ordine retrogrado (ab ultimo inchoati) dicantur $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. Quoniam igitur, per prop. 28. tum $a + \alpha$, tum $b + \beta$, tum $c + \gamma$, &c. æquantur aggregato extremorum $A + V = Z$: erunt omnes a, b, c, d, &c. cum omnibus $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. æquales ipſi Z toties ſumpto. Hoc eſt, omnes termini bis ſumpti (nempe, tum ordine directo, tum ordine retrogrado,) æquantur extremo aggregato Z toties ſumpto quot ſunt termini. Hoc eſt $TZ = 2S$.

$$\begin{matrix} a + \alpha = Z = A + V \\ b + \beta = Z \\ c + \gamma = Z \\ d + \delta = Z = A + V \\ \text{\&c.} \\ \hline S + S = TZ = TA + TV. \end{matrix}$$

46 Idem valet in quatuor diſcontinue proportionalibus Arithmetice.

rithmetice. Puta A, M; N, V. Cum enim, per prop. 30, ſit $A+V=Z=M+N$, erit $4Z=2S$.

47 Datis igitur, in Arithmetica progreſſione continua, extremorum aggregato & terminorum numero; Z, T; habetur totius progreſſionis ſive terminorum omnium ſumma. S. nempe $TZ = 2S$, per prop. 45. Ergo $\frac{TZ}{2} = S$.

48 Et Dato extremorum aggregato, cum progreſſionis ſumma; Z, S; habetur numerus terminorum. T. Nam quia $2S = TZ$; erit $\frac{2S}{Z} = T$.

49 Et Dato terminorum numero, cum progreſſionis ſumma; T, S; datur item extremorum aggregatum. Z. Nam quia $2S = TZ$; erit $\frac{2S}{T} = Z$.

50 Datis terminorum numero, progreſſionis ſumma, & termino minimo; T, S, A; habetur maximus. V. Eſt enim per p. 49. $\frac{2S}{T} = Z = A+V$. Ergo $\frac{2S}{T} - A = Z - A = V$.

51 Datis iiſdem; datur extremorum differentia. X. Nam, per præced. $\frac{2S}{T} - A = V$. Ergo $\frac{2S}{T} - 2A\,(= Z - 2A) = V - A = X$.

52 Datis numero terminorum, progreſſionis ſumma, & termino maximo; T, S, V, habetur item minimus. A. Cum enim, per pr. 49. $\frac{2S}{T} = Z = A+V$, erit $\frac{2S}{T} - V = A$.

53 Datis iiſdem; datur extremorum differentia. X. Nam, per præced. $\frac{2S}{T} - V = A$. Ergo $V - \frac{2S}{T} + V = 2V - \frac{2S}{T}\,(= 2V - Z) = V - A = X$.

54 Datis extremorum ſumma & differentia Z,X; datur extremum minus, ſeu terminus minimus. A. Nempe Z − X (V + A minus V − A) = 2 A. Ergo $\frac{Z - X}{2}$ = A.

$$\begin{array}{r} V + A = Z \\ \text{mi: } V - A = X \\ \hline 2A = Z - X \end{array}$$

55 Datis iiſdem; datur terminus maximus. V. Nempe Z + X (V + A plus V − A) = 2 V. Ergo $\frac{Z + X}{2}$ = V.

$$\begin{array}{r} V + A = Z \\ \text{pl. } V - A = X \\ \hline 2V = Z + X \end{array}$$

56 Datis extremis (vel eorundem ſumma & differentia,) cum exceſſu communi, Z,X,E, datur progreſſionis ſummâ. S. Nempe per pr. 18. habetur T, ergo & per pr. 47. $S = \frac{ZX + ZE}{2E}$.

57 Datis extremis, cum ſumma progreſſionis, A,V,S, datur communis exceſſus. E. nempe, per prop. 48. habetur T, ergo & per pr. 17. $E = \frac{ZX}{2S - Z}$.

58 Datis termino minimo, terminorum numero, & communi exceſſu; A,T,E; datur progreſſionis ſumma. S. Nempe per pr. 19. habetur V; ergo & per pr. 47, $S = \frac{2A + TE - E}{2} T$.

59 Datis termino minimo, terminorum numero, & progreſſionis ſumma; A,T,S; datur communis exceſſus. E. nempe per. pr. 51. habetur X; ergo & per pr. 17, $E = \frac{2S - 2TA}{Tq - T}$.

60 Datis termino maximo, terminorum numero, & communi exceſſu; V,T,E; datur progreſſionis ſumma. S. nempe per prop. 20. habetur A; ergo & per prop. 47, $S = \frac{2V - TE + E}{2} T$.

61 Datis termino maximo, terminorum numero, & progreſſionis ſumma; V,T,S; datur communis exceſſus. E. nempe per prop. 53, habetur X; ergo & per prop. 17. $E = \frac{2TV - 2S}{Tq - T}$.

62 Datis terminorum numero, communi exceſſu, & progreſſionis ſumma, T,E,S; datur terminus minimus. A. nempe per pr. 16. habetur X, & per pr. 49, Z; ergo & per prop. 54. $A = \frac{2S - TqE + TE}{2T}$.

63 Datis iiſdem; datur terminus maximus. V. nempe per prop. 16 & 49, habentur Z & X; ergo & per prop. 55. $V = \frac{2S + TqE - TE}{2T}$.

64 Datis termino minimo, communi exceſſu, & progreſſionis ſumma, A, E, S: datur numerus terminorum. T. Nam per pr. 19. $A + TE - E = V$, adeoque $2A + TE - E = A + V = Z$. Ergo, per pr. 45. $2S = TZ = 2TA + TqE - TE$. adeoque $\frac{2S}{E} = Tq + \frac{2A - E}{E}T$. Et (reſolvendo æquationem) $\frac{-A + \frac{1}{2}E + \surd : \frac{1}{4}Eq + Aq - AE + 2SE :}{E} = T$.

65 Datis iiſdem; datur terminus maximus. V. nempe, per præcedentem, habetur T. adeoque V per pr. 19.

Vel ſic. Quia, per pr. 18. $\frac{X+E}{E} = T$; erit per prop. 45. $2S = TZ = \frac{ZX + ZE}{E}$. Et $2SE = ZX + ZE$. Hoc eſt (quia $ZX = Vq - Aq$, & $Z = A + V$;) $2SE = Vq - Aq + VE + AE$. Adeoque $Vq + EV = Aq + 2SE - AE$. Ergo (reſolvendo æquationem) $\surd : \frac{1}{4}Eq + Aq - AE + 2SE : - \frac{1}{2}E = V$.

$$\begin{array}{r} V + A = Z \\ V - A = X \\ \hline Vq + VA \qquad \\ - VA - Aq \\ \hline Vq - Aq = ZX. \end{array}$$

Si autem hac methodo reperiatur V; Inveſtigabitur T, propoſitionis præcedentis, per pr. 48. (alia quidem forma, ſed eodem valore quo prius.)

nempe $T = \frac{2S}{-\frac{1}{2}E + A + \surd : \frac{1}{4}Eq + Aq - AE + 2SE :}$

66 Datis termino maximo, communi exceſſu, & progreſſionis

nis, ſumma; V, E, S; datur numerus terminorum. T. Nam, per prop. 20. $V - TE + E = A$. adeoq; $2V - TE + E = V + A = Z$. Ergo, per prop. 45. $2S = TZ = 2TV - TqE + TE$. adeoq; $\frac{2S}{E} = \frac{2V + E}{E}T - Tq$. Et (reſolvendo æquationem)

$$\frac{V + \frac{1}{2}E \mp \sqrt{:\frac{1}{4}Eq + Vq + VE - 2SE:}}{E} = T.$$

Notandum autem eſt, hujus æquationis (utpote ambiguæ) radicem minorem tunc convenire, cum A major eſt quam $\frac{1}{2}E$, (adeoq; radicem univerſalem $\sqrt{:\frac{1}{4}Eq}$ &c. afficiendum ſigno $-$;) majorem vero (adeoq; $+\sqrt{:}$ &c.) quoties A minor eſt quam $\frac{1}{2}E$. Sin $A = \frac{1}{2}E$; perinde erit utra eligatur; nam hoc caſu totum illud quod nota radicalitatis afficitur, evaneſcit.

67 Datis iiſdem; datur terminus minimus A. Nam, per præcedentem habetur T. adeoq; A per prop 20.

Vel ſic. Quoniam (ut in prop. 65.) $2SE = Vq - Aq + VE + AE$. Tranſponantur termini (ſi ſit $Vq + EV$ plus quam $2SE$; quod tum continget, cum A major eſt quam E;) ad hanc formam, $Aq - EA = Vq + EV - 2SE$: cujus æquationis radix eſt $\frac{1}{2}E + \sqrt{:\frac{1}{4}Eq + Vq + EV - 2SE:} = A$. Vel (ſi ſit $Vq + EV$ minus quam $2SE$; quod tum continget, cum A minor eſt quam E;) tranſponantur ad hanc formam, $EA - Aq = 2SE - Vq - EV$; cujus æquationis radix eſt ambigua, nempe $\frac{1}{2}E \pm \sqrt{:\frac{1}{4}Eq + Vq + EV - 2SE:}$ quarum radicum major convenit quoties A major quam $\frac{1}{2}E$; minor autem quoties A minor eſt quam $\frac{1}{2}E$. Si autem ſit $Vq + EV = 2SE$, manifeſtum eſt (utrovis modo diſponantur termini) $Aq \sim EA = 0$, adeoq; $A = E$.

Si autem hac methodo reperiatur A; inveſtigabitur T, propoſitionis præcedentis, per prop. 48. Nempe

$$T = \frac{2S}{V + \frac{1}{2}E \pm \sqrt{:\frac{1}{4}Eq + Vq + EV - 2SE:}}$$

Ubi non temere factum, quod cùm formâ ſuperius traditâ, fuerit $\mp$, jam ſit $\pm$. Nam quo caſu in illa forma eligenda erat radix major, in hac minor eligenda erit.

Atq; hactenus Progreſſionis Arithmeticæ traditionem ſatis videamur abſolviſſe; cujus breviorem ſynopſin capite ſequente exhibebimus.

Notandum autem eſt, propoſitiones omnes hoc capite de Progreſſione Arithmetica traditas, poſſe item ad Progreſſionem Geometricam (mutatis mutandis) non difficulter accommodari. Nempe ſubſtitutis fere illic Multiplicatione & Diviſione pro hic imperatis Additione & Subductione ; item poteſtatum Cõſtructione & Analyſi, pro Multiplicatione & Diviſione; & denique Rectangulorum aggregato pro Duplo ſummæ; (cum paucis inſuper aliis immutationibus:) Quod ex comparatis his cum primoribus totidem propoſitionibus: Cap. XXXII. (eodem ordine poſitis) videre eſt.

CAP. XXVIII.

Progreſſionis Arithmeticæ brevior Synopſis.

CUm in præcedente Capite doctrinam Progreſſionis Arithmeticæ fuſius proſecuti ſimus : libet hoc Capite ſelectas aliquot propoſitiones, progreſſionem continuam ſpectantes, alio ordine ſummatim tradere; ut uno quaſi intuitu oculo ſubjiciantur. Retentis iiſdem quibus ſupra Symbolis uſi ſumus.

	Theoremata.
1	$D = T - 1.$
2	$V = A + DE$
3	$S = \frac{1}{2} TZ.$

	Problemata.
	Data. Quæſita.
1	$A, V : Z = V + A$
2	$X = V - A.$
3	$A, Z : V = Z - A$
	X per 2.

	Data. Quæſita.
4	$A, X : V = A + X$
	Z per 1.
5	$V, Z : A = Z - V.$
	X per 2.
6	$V, X : A = V - X.$
	Z per 1.
7	$Z, X : A = \frac{Z - X}{2}.$
8	$V = \frac{Z + X}{2}.$
9	$T, E : X = DE$
10	$T, X : E = \frac{X}{D}$

	Data.	Quæſita.	
11	X, E :	$T = \frac{X}{E} + 1$	
12	Z, T :	$S = \frac{ZT}{2}$	
13	Z, S :	$T = \frac{2S}{Z}$	
14	T, S :	$Z = \frac{2S}{T}$	
15	A, V, T :	Z, X,	per 1, 2.
		E, S,	per 10, 12.
16	A, V, S :	Z, X,	per 1, 2.
		T,	per 13.
		E,	per 10.
17	A, V, E :	Z, X,	per 1, 2.
		T,	per 14.
		S,	per 12.
18	A, Z, T :	V, X, S,	per 3, 12.
		E,	per 10.
19	A, Z, S :	V, X, T,	per 3, 13.
		E,	per 10.
20	A, Z, E :	V, X,	per 3.
		T,	per 11.
		S,	per 12.
21	A, X, T :	V, Z, E,	per 4, 10.
		S,	per 12.
22	A, X, S :	V, Z,	per 4.
		T,	per 13.
		E,	per 10
23	A, X, E :	V, Z, T,	per 4, 14.
		S,	per 12.
24	V, Z, T :	A, X, S	per 5, 12
		E,	per 10.
25	V, Z, S :	A, X, T,	per 5, 13.
		E	per 10.

	Data:	Quæſita.	
25	V, Z, E :	A, X,	per 5.
		T,	per 14.
		S,	per 12.
27	V, X, T :	A, Z, E,	per 6, 10.
		S,	per 12.
28	V, X, S :	A, Z,	per 6.
		T,	per 13.
		E,	per 10.
29	V, X, E :	A, Z, T	per 6, 11
		S,	per 12.
30	Z, X, T :	A, V, S, E,	per 7, 8, 12, 10.
31	Z, X, S :	A, V, T,	per 7, 8, 13.
		E,	per 10.
32	Z, X, E :	A, V, T,	per 7, 8, 11.
		S,	per 12.
33	Z, T, E :	X, S,	per 9, 12
		A, V,	per 7, 8.
34	Z, S, E :	T	per 13.
		X,	per 9.
		A, V,	per 7, 8.
35	T, S, A :	Z,	per 14.
		V, X,	per 3.
		E,	per 10.
36	T, S, V :	Z,	per 14.
		A, X,	per 5.
		E,	per 10.
37	T, S, X :	E, Z,	per 10, 14.
		A, V,	per 7, 8.
38	T, S, E :	X, Z,	per 9, 14.
		A, V,	per 7, 8.
39	T, E, A :	X,	per 9.
		V, Z,	per 4.
		S,	per 12.
40	T, E, V :	X,	per 12.
		A, Z,	per 6.
		S,	per 12.

	Data.	Quæſita.	
41	X,E,S :	T,	per 11.
		Z,	per 14.
		A,V,	per 7, 8.
42	S, E, A : V $= -\frac{1}{2}E + \sqrt{:}$ $\frac{1}{4}Eq + Aq - AE + 2SE.$		
		Z, X,	per 1, 2.
		T,	per 13.
43	S, E, V : A $= +\frac{1}{2}E \pm \sqrt{:}$ $\frac{1}{4}Eq + Vq + VE - 2SE.$		
		Z, X,	per 1,2.
		T,	per 13.

Datis.	
A, V, Z, X.	nihil ulterius inde innoteſcit.
vel Z, T, S.	
vel T, E, X.	

Atq; hactenus de Progreſſione Arithmetica dictum eſto.

CAP. XXIX.

Rationum Diſtributio, & nomina. Ratio Multiplex, Super-particularis, Superpartiens, Submultiplex, &c. Rationum Deſignatio, & Notatio.

EXpoſitâ in ſuperioribus capitibus Progreſſione Arithmetica, quæ ex æqualitate Differentiarum ortum ducit: Priuſquam Progreſſionem Geometricam diſtinctius tractandam aggrediar, quæ ex Rationum ſive Æqualitate ſive (ut pleriq; loquuntur) Identitate trahit originem; De Rationibus, ſive proportionibus, quædam adhuc reſtant exponenda; præſertim de Rationum tum Nominibus ſive appellationibus, tum Notatione.

Ratio, quid? Quid ſit Ratio, jam ſatis innoteſcat, tum ex iis quæ ſuperius tradidimus Cap. XXV. tum ex Euclidis definitione 3 d 5. Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις. *Ratio eſt, duarum magnitudinum homogenearum, quæ ſecundum quantitatem eſt, ad invicem (ποιὰ σχέσις) habitudo qualitativa.* Nempe, quâ dicitur, ὁσαπλάσιον, *quantuplum* vel *quotuplum* ſit hoc illius; puta duplum, triplum, dimidium, &c. vel, quoties hoc illud

lud contineat. Adeoque diviſione innoteſcit, (ſicuti ſubductione Differentia,) diviſionis *Quoto* ſive *Quotiente* determinanda. Et propterea, *ex Quotientum identitate, identitas Rationum colligitur, & contra.* Puta, tum numeri quaternarii ad binarium, tum ſenarii ad ternarium, eadem eſt ratio, nempe dupla; quia utrobiq; antecedens conſequentem bis continet; quod antecedentem utrumq; per conſequentem ſuum dividendo innoteſcit. Nam 2) 4 (2, & 3) 6 (2.

Diſtribuitur autem Ratio ſive proportio in *Rationalem & Irrationalem.* Rationalis dicitur, quæ poteſt veris numeris exhiberi: puta ut 6 ad 4, quæ eſt ratio ſeſquialtera. Irrationalis autem quæ veris numeris exhiberi non poteſt: ut, in quadrato, ratio Lateris ad Diagonium. Quamvis enim hujuſmodi ratio utcunq; explicari ſolet per numeros quos *Surdos* vocāt, puta ut 1 ad $\sqrt{2}$; tamen, cum numerus Surdus, proprie loquendo, numerus non ſit, ſed imaginarii cujuſdam numeri nota, ideo nec ea ratio veris numeris explicabilis cenſenda erit. Eſt nempe, $\sqrt{2}$, nota numeri qui ſupponitur in ſe ductus numerum 2 producere; ſicut $\sqrt{4}$, numerum notat (nempe 2) qui in ſe ductus producit 4. Cum autem nullus omnino numerus poſſibilis ſit (vel integer, vel fractus,) qui ſui in ſe multiplicatione producere poſſit numerum 2; eſt igitur $\sqrt{2}$ numeri tantum ſuppoſititii & imaginarii, non veri alicujus numeri, nota. Non eſt itaq; illa ratio veris numeris explicabilis, ideoq; ratio ἄλογος, ἄῤῥητος, *irrationalis.* *Rationalis & Irrationalis.*

Non autem diſſimulandum eſt, *Rationalitatis* appellationem, ab Euclide paſſim in Elemento decimo, etiam eis lineis attribui quæ potentiâ tantum ſunt commenſurabiles; hoc eſt, quarum ſaltem quadrata rationem habent numeris explicabilem, utut longitudine ſint ἀσύμμετροι, incommenſurabiles. Atq; hoc ſenſu Latus & Diagonium quadrati erunt Rationalia, quippe quorum quadrata ſunt ut numerus ad numerum, puta ut 1 ad 2. Verum alibi non raro obtinet, *Rationalia* tantum ea dicere quæ & σύμμετρα ſunt: ut perinde ſit ἄλογον eſſe ſive ἄῤῥητον, atque ἀσύμμετρον.

Sicui vero duriuſcula videri poſſit *Rationis Irrationalis* appellatio; quæ enim λόγον rationem habent ad invicem, qui dici poſſint ἄλογα? aut etiam ipſe λόγος, ἄλογος? Dicendum eſt, hoc ob vocis λόγος apud Græcos homonymiā obtingere, (quos

& Arithmetici Latine ſequuntur.) Quippe λόγ☉ (præter alia ſignificata) etiam *Ratiocinium* ſive *Computum* ſignificat; unde *Logiſta* idem eſt qui *Calculator* ſive *Computator*; atq; illud ἄλογον, quod calculum fugit, nec vero numero eſt explicabile: qua de cauſa & ἄῤῥητον & ἀνεκφώνητον dicitur, inexplicabile, ineffabile, inenarrabile: non quod omnino enarrari non poſſit, ſed non veris numeris poſſit enarrari.

Ratio Æqualitatis, & Inæqualitatis.

Diſtribuitur porro *Ratio*, in rationem *Æqualitatis*, & rationem *Inæqualitatis*. Illa eſt, cum comparata ſunt æqualia. Hæc, cum inæqualia. Sic 2 ad 2, & 4 ad 4, & $\frac{1}{3}$ ad $\frac{2}{6}$, &c. ſunt in ratione Æqualitatis conſtituta. At 2 ad 3, & 5 ad 4, & 4 ad 5, &c. in ratione Inæqualitatis. Sicui interim nomina Æqualitatis & Inæqualitatis, potius ad alteram comparationem, quæ eſt quoad Differentiam, referenda videantur, quam ad hanc quæ eſt quoad Rationem: Ego quidem non repugno. Nam quod, quoad differentiam, alteri *Æquale* dicitur; id forſan, quoad rationem, rectius dicatur *Simplum*. Verum hoc non tanti eſt ut receptas jam appellationes innovandas contendam.

Notandum hic eſt, Rationem Æqualitatis, & Rationalem eſſe; nempe ut 1 ad 1: At non contra, rationem omnem Rationalem, eſſe & rationem Æqualitatis. Item, omnem rationem Irrationalem, eſſe & Inæqualitatis rationem; non autem contra, omnem Inæqualitatis rationem, eſſe & Irrationalem: quippe dupla, tripla, aliæq; infinitæ Inæqualitatis rationes ſunt, Rationales tamen.

Ratio Majoris inæqualitatis, & Minoris.

Ratio Inæqualitatis (ſive Rationalis fuerit ſive Irrationalis) ſubdividitur rurſus in rationem (ſive proportionem) *Majoris inæqualitatis*, & *Minoris*. (Vel in rationem *Majoritatis* & *Minoritatis*.) Illa eſt, quantitatis majoris ad minorem; ut 4 ad 2. Hæc, minoris ad majorem; ut 2 ad 4.

Rationis ſive proportionis Majoris inæqualitatis (Rationalis intellige; nam, de rationum irrationalium nominibus Scriptores nondum fuerunt ſolliciti;) quinque ſolent conſtitui genera. *Multiplex*, *Superparticularis*, *Superpartiens*, *Multiplex-ſuperparticularis*, & *Multiplex-ſuperpartiens*.

Et pariter Minoris inæqualitatis ratio (rationalis) in totidem ſolet genera diſtribui, iiſdem inſignita nominibus, præfixa tantum particula *Sub*. nempe *Submultiplex*, *Subſuperparticularis*, *Subſuperpartiens*, *Submultiplex-ſuperparticularis*, *Submultiplex-ſuperpartiens*.

partiens. Siquem interim terreat nominum barbaries, in vocibus technicis; liberum ipſi erit illis abſtinere; dummodo mihi permittat indicare, quid alii his nominibus intellectum volunt.

Quantitas major minoris *Multiplex* dicitur, (vel multipla,) quæ minorem aliquoties exacte continet; vel, cum minor metitur majorem. *Multiplex.* Πολλαπλάσιον τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος, definiente Euclide 2 *d* 5, & ſpeciatim de numeris 5 *d* 7. Hoc eſt, cum minor aliquoties accepta æquatur majori. Ea enim eſt vocis καταμετρεῖσθαι apud Euclidem ſignificatio. Sic enim Euclides 23 *d* 7. *Numerus numerum metiri dicitur per illum numerum quem multiplicans, vel a quo multiplicatus, illum producit.* Et eodem modo Quantitas quantitatem metiri cenſenda eſt. Si ergo quantitas minor per nullum numerum (integrum intellige) multiplicata producat majorem, hanc illa non metitur. Ita numerus Senarius eſt binarii multiplus; quia binarius aliquoties acceptus, nempe ter, æquatur ipſi ſenario; ſive (ut loquitur Euclides) numerus 2 metitur 6, per 3; quia bis tria ſunt ſex. $2 \times 3 = 6$. At 8 ad 3 non eſſe dicimus in ratione multiplici: quia, quamvis 3 in 8 aliquoties contineantur, nempe bis; non tamen 3 exacte metiuntur 8, quia bis ablata relinquunt 2, ter autem auferri non poſſunt.

Multiplicis correlatum (in proportione minoris æqualitatis conſtitutum) dicitur *Submultiplex.* *Submultiplex.* Apud Euclidem ſimpliciter *Pars* dicitur 1 *d* 5. Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον. *Magnitudo minor majoris Pars eſt, quando exacte metitur majorem.* Ubi autem minor majorem non metitur (at ſaltem in ratione rationali conſtituta ſit,) quantitas illa non hujus *Pars*, ſed *Partes*, ab Euclide dicitur; quippe ille, hic loci, per *partem* non aliam quam *partem aliquotam* intelligit; & per *partes*, partium aliquotarum aggregatum. Quæ autem hic Euclides *partem* & *partes* appellat; appellant alii recentiores, *partem aliquotam*, & *partem aliquantam*. Sic Semiſſis, Triens, Quadrans, Sextans, Uncia, dicuntur ſingulæ, *aliquota pars* Aſſis; quoniã aliquoties acceptæ integrũ Aſſem complent. Nẽpe Semiſſis bis, Triens ter, Quadrans quater, Sextans ſexies, & Uncia duodecies, præciſe, continentur in Aſſe, ſive integro. Eſt autem Quincunx, Aſſis pars aliquanta, non aliquota: Nam quincunx bis acceptus, eſt aſſe minor, nempe decem unciæ; at ter

 acceptus,

acceptus, major erit, nempe 15 Unciæ, quæ aſſem tribus unciis ſuperant. Atq; idem de Septunce, Beſſe, Dodrante, Decunce, Undecunce, (ſive, ut loquuntur alii, Dextante, Deunce,) dicendum eſt. Nam, verbi gratia, Bes, non aſſis aliquota *Pars* dicitur, ſed *Partes*, nempe duæ tertiæ: & Dodrans, tres quartæ: & ſic de cæteris. Sic enim Euclides, 3 & 4 *dd* 7. Pars eſt numerus minor majoris, cum minor metitur majorem: Partes autem, cum non metitur.

Proportionis (ſive Rationis) Multiplicis ſpecies ſunt, *Dupla, Tripla, Quadrupla*, & ſic deinceps in infinitum. Et contra proportionis (ſive Rationis) Submultiplicis ſpecies ſunt, *Subdupla, Subtripla, Subquadrupla*, &c. vel etiam Semiſſis, Triens, Quadrans, &c. vel etiam Pars dimidia, tertia, quarta, decima, centeſima, milleſima, &c. Græce *ἡμιμόριον, τριτημόριον, τεταρτημόριον, δεκατημόριον, ἑκατοστημόριον, χιλιοστημόριον*, &c.

Quantitates autem quantitatum *Æquimultiplices*, Euclidi aliiſque, dicuntur, quas ſuæ reſpective partes per eundem numerum metiuntur. Vel (quod perinde eſt) prima ſecundæ, & tertia quartæ æque-multiplices ſunt, quando prima ſecundam toties præciſe continet, quoties tertia quartam. Sic quaternarius binarii, & ſenarius ternarii ſunt æque-multiplices; utrobique ſcilicet in proportione dupla: quia tum illum binarius, tum hunc ternarius, per binarium metitur; & toties 2 in 4, quoties 3 in 6 continentur, nempe utrobique bis.

$3)\,6\,(2$

$2)\,4\,(2$

Superparticularis. Ratio (ſive proportio) *Superpaticularis*, eſt ratio majoris quantitatis ad minorem, quando major minorem ſemel quidem, nec ſæpius continet, ſed & ipſius partem aliquotam. Sic 3 ad 2, & 6 ad 4, ſunt in ratione ſuperparticulari; uterq; enim numerus antecedens conſequentem ſuum ſemel continet ipſius inſuper ſemiſſem. Diviſo nempe numero majore per minorem, prodibit utrobiq; Quotiens $1\frac{1}{2}$.

$2)\,3\,(1\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$4)\,6\,(1\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

Hujus Rationis ſpecies ſunt, *Seſquialtera, Seſquitertia, Seſquiquarta, Seſquiquinta, Seſquidecima, Seſquicenteſima, Seſquimilleſima*, & ſic deinceps in infinitum: prout ſcilicet major minorem ſemel continet, & inſuper minoris partem dimidiam, tertiam,

quartam,

quartam, quintam, decimam, centeſimam, milleſimam, &c.

$2)3(1\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$	$10)\ 11\ (1,1=\frac{11}{10}$
$3)4(1\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$	$100)\ 101\ (1,01=\frac{101}{100}$
$4)5(1\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$	$1000)\ 1001\ (1,001=\frac{1001}{1000}$
$5)6(1\frac{1}{5}=\frac{6}{5}$	$10000)10001(1,0001=\frac{10001}{10000}$

Ubi autem major ad minorem eſt in ratione *Superparticulari*, ſeſquialtera, ſeſquitertia, &c. erit minor illa quantitas ad majorem in ratione *Subſuperparticulari*, ſubſeſquialtera, ſubſeſquitertia, &c. Sic 18 ad 16 ſunt in ratione ſeſquioctava, (nempe ut 9 ad 8,) ergo 16 ad 18 in ratione ſubſeſquioctava. Et pariter in ſimilibus. Apud Ariſtotelem, ἐπιμόριος & ὑπεπιμόριος hoc ſenſu occurrunt Metaph. 4. & alibi. Et apud alios paſſim. *Subſuperparticularis.*

Ratio ſeu proportio *Superpartiens* ἐπιμερής eſt ratio quantitatis majoris ad minorem, quando major minorem ſemel quidem, nec ſæpius, continet; ſed & aliquot inſuper ipſius partes aliquotas. Sic 5 ad 3, ſũt in ratione Superpartiente: numerus enim quinarius ternarium continet ſemel, & duos inſuper ipſius trientes. Si enim 5 per 3 dividamus, erit quotiens $1\frac{2}{3}$. *Superpartiens.*

$3)5(1\frac{2}{3}$

Hujus proportionis ſpecies duplicem characterem poſtulant. Cum enim major minorem contineat, & inſuper aliquot ipſius partes aliquotas; dicendum eſt, *quot* partes, & quidem *quotas* continet. Priori reſpectu dicitur, *Superbipartiens*, *Supertripartiens*, *Superquadripartiens*, *Superdecupartiens*, &c. prout quantitas major, præter ipſam minorem, contineat inſuper ipſius partes aliquotas, duas, tres, quatuor, decem, &c. Poſteriori reſpectu dicitur *ſuperpartiens tertias*, *ſuperpartiens quartas*, *quintas*, *decimas*, *centeſimas*, &c. prout partes illæ aliquotæ ſint trientes, quadrantes, &c. hoc eſt, partes tertiæ, quartæ, quintæ, decimæ, centeſimæ, &c. Sic ratio numeri 5 ad 3, vel 10 ad 6, eſt ſuperbipartiens tertias: Major enim minorem utrobique ſemel continet, & inſuper duos ipſius trientes, ut ex diviſione liquet. Sic 7 ad 4, eſt ſupertripartiens quartas. Et pariter in ſimilibus.

$3)5(1\frac{2}{3}$	$5)7(1\frac{2}{5}$	$6)11(1\frac{5}{6}$	$10)13(1{,}3 = 1\frac{3}{10} = \frac{13}{10}$
$6)10(1\frac{4}{6}$	$5)8(1\frac{3}{5}$	$7)10(1\frac{3}{7}$	$100)107(1{,}07 = 1\frac{7}{100}$
$4)7(1\frac{3}{4}$	$5)9(1\frac{4}{5}$	$8)15(1\frac{7}{8}$	$100)108(1{,}08 = 1\frac{8}{100}$

Subſuperpartiens. Ubi vero quantitatis majoris ad minorem ratio eſt *Superpartiens*, ſuperbipartiens, ſupertripartiens,&c; Erit minoris hujus ad illam majorem, ratio *Subſuperpartiens*, ſubſuperbipartiens, ſubſupertripartiens,&c. Nempe ratio 3 ad 5, vel 6 ad 10, eſt ſubſuperbipartiens tertias; et 4 ad 7, ſubſupertripartiens quartas. Et in aliis pariter.

Notandum autem eſt, in rationibus ſuperpartientibus, denominatorem partis aliquotæ majorem eſſe debere quam eſt Numerus earundem aliquotarum partium aſſumptarũ. Non igitur dicitur ſupertripartiens tertias, vel ſuperquadripartiens quartas: nam $\frac{3}{3}$, vel $\frac{4}{4}$, tantundem ſunt ac 1. Et $1\frac{3}{3}$, vel $1\frac{4}{4}$, &c. idem eſt atq; 2: ideoq; major minorem ſæpius quam ſemel contineret; (nempe bis,) quod eſt contra definitionem rationis ſuperpartientis. Multo minus dicendum erit, Superquadripartiens tertias vel quartas, &c. (ut denominator aliquotarum partium minor ſit quam earundem numerus;) ita enim major ſaltem bis ſupponetur minorem continere, et aliquid inſuper.

Sed neq; rite dicitur, Ratio ſuperbipartiens quartas, ſextas, &c; vel ſupertripartiens ſextas, nonas, &c. vel ſuperquadripartiens octavas, decimas, duodecimas, &c; et pariter in ſimilibus: ut denominator aliquotarum partium aſſumptarum, et earundem numerus, communem aliquem diviſorem habeant qui utrumq; exacte metiatur. Sunt enim $1\frac{2}{4} = 1\frac{1}{2}$, et $1\frac{2}{6} = 1\frac{1}{3}$, et $1\frac{3}{6} = 1\frac{1}{2}$, et $1\frac{3}{9} = 1\frac{1}{3}$, et $1\frac{6}{9} = 1\frac{2}{3}$, $1\frac{4}{10} = 1\frac{2}{5}$, et $1\frac{4}{12} = 1\frac{1}{3}$ &c. Non igitur dicenda eſt ratio ſuperbipartiens quartas, aut ſupertripartiens ſextas, aut ſuperquadripartiens octavas; ſed ratio ſeſquialtera. Neq; item ſuperbipartiens ſextas, aut ſupertripartiens nonas, aut ſuperquadripartiens duodecimas, ſed ratio ſeſquitertia. Neque, ſuperquadripartiens decimas; ſed ſuperbipartiens quintas. Et ſimiliter alibi.

Siquis urget; per Rationis ſuperpartientis definitionem, hujuſmodi loquendi formulas non excludi: Dicendum erit, Rationum

num definitiones intelligendas eſſe de *Rationibus ad minimos terminos redactis.* Prout enim in Fractionibus, (ut poſt dicetur,) ita & in Rationibus deſcribendis, plerumq; expedit, ut terminis quam fieri poteſt minimis deſcribantur, quo melius animus valorem aſſequatur. Secus enim eadem non raro Ratio et ſuperbipartiens, et ſupertripartiens, et ſuperquadripartiens, &c. dicenda erit. Siquidem ſuperbipartiens quartas, ſupertripartiens ſextas, ſuperquadripartiens octavas, aliaq; hujuſmodi rationum nomina, eandem ipſam rationem deſignabunt. Imo vero eadem ipſa Ratio et ſuperparticularis erit, et ſuperpartiens: ſiquidem illa ipſa nomina nuper recenſita, quæ rationes ſuperpartientes videantur indicare, revera ſuperparticularem rationem ſignificant, nempe ſeſquialteram. Sunt enim $1\frac{2}{4} = 1\frac{3}{6} = 1\frac{4}{8} = 1\frac{1}{2}$.

At ſiquis nihilominus contendat; neque neceſſe eſſe, nec quidem ſemper expedire, ut vel fractiones vel rationes in minimis terminis exprimantur: Neq; etiam magnum eſſe incommodum, eandem ipſam rationem nunc ſuperbipartientem, nunc ſupertripartientem, &c. fortaſſe & nonnunquam ſuperparticularem, vel etiam multiplicem, dici poſſe: Vel etiam, ſi ratio multipla aut quæcunq; alia, tanquam ſi eſſet ſuperparticularis, vel ſuperpartiens, vel cujuſvis generis, proponatur; neutiquam id formidandum eſſe, dummodo utcunq; ſic proponatur ratio ut ipſius valorem mens ſatis aſſequi valeat. Ego quidem fateor, non tanti rem eſſe ut de verbis contendamus: Imo non ſine magno nonnunquam commodo, hujuſmodi rationum quaſi metamorphoſes exerceri poſſe; atq; eandem ipſam quantitatem, Protei inſtar, quacunque libet forma exhiberi poſſe: quod & ubi opus poſtulet faciendum erit. At cæteris paribus, ubi nihil in contrarium ſuadet, tum rationes, tum fractiones, aliave quantitates, terminis quam fieri poteſt ſimplicibus explicari par eſt.

Reſtant adhuc duo Rationum genera explicanda; Multiplex-ſuperparticularis, & Multiplex-ſuperpartiens; cum correlatis.

Multiplex-ſuperparticularis, eſt ratio majoris quantitatis ad minorem, quando major minorem aliquoties continet (ſaltem bis) & unam inſuper ipſius aliquotam partem. Ut 9 ad 4, Quippe novenarius quaternarium bis continet, & ipſius inſuper quadrantem. *Multiplex-ſuperparticularis.*

Hujus

Hujus ſpecies ſunt, Dupla-ſeſquialtera, Dupla-ſeſquitertia, Dupla-ſeſquiquarta, &c. Tripla-ſeſquialtera, Tripla-ſeſquitertia, &c. aliæque ejuſmodi in infinitum. Sic ratio 9 ad 4, eſt dupla-ſeſquiquarta; 7 ad 2, eſt tripla-ſeſquialtera; 42 ad 10 eſt, quadrupla-ſeſquiquinta; 101 ad 10, eſt decupla-ſeſquidecima Et pariter in aliis.

$$4)\ 9\ (2\tfrac{1}{4}$$
$$2)\ 7\ (3\tfrac{1}{2}$$
$$10)\ 42\ (4,2 = 4\tfrac{1}{5}$$
$$10)\ 101\ (10,1 = 10\tfrac{1}{10}$$

Duplici itaq; charactere opus eſt ad hanc rationem exprimendam; altero, quo ſpecies multiplicitatis indicetur, (dupla tripla, &c) altero, quo deſignetur aliquota pars, puta, num dimidia, tertia, &c.

Submultiplex-ſuperparticularis. Ubi autem ratio quantitatis majoris ad minorem eſt multiplex-ſuperparticularis; minoris hujus ad illam majorem dicitur *Submultiplex-ſuperparticularis.* Hujuſque ſpecies ſpeciebus illius correſpondent. Eſt igitur 4 ad 9, ratio ſubdupla-ſeſquiquarta; 2 ad 7, ſubtripla-ſeſquialtera; 10 ad 42, ſubquadrupla-ſeſquiquinta; 10 ad 101, ſubdecupla-ſeſquidecima. Et ſic in aliis.

Multiplex-ſuperpartiens. Ratio multiplex-ſuperpartiens, eſt ratio quantitatis majoris ad minorem, quando major minorem aliquoties continet, & ipſius inſuper aliquot partes aliquotas. Ut 8 ad 3. Nempe numerus ille hunc continet bis & duas inſuper hujus partes tertias, ſive trientes.

Hujus ſpecies ſunt; Dupla-ſuperbipartiens-tertias, Dupla-ſuperquadripartiens-quintas, Tripla-ſupertripartiens-quartas, Quadrupla-ſupertripartiens-ſeptimas, aliæq; ejuſmodi infinitæ. Tales ſunt rationes 8 ad 3; 14 ad 5; 15 ad 4; 31 ad 7. &c.

$$3)\ 8\ (2\tfrac{2}{3}$$
$$5)\ 14\ (2\tfrac{4}{5}$$
$$4)\ 15\ (3\tfrac{3}{4}$$
$$7)\ 31\ (4\tfrac{3}{7}$$

Triplici itaq; charactere opus eſt ad hanc rationem exprimendam: quo tum numerus multiplicitatis, tum numerus partium aliquotarum, tum harum denominatio indicetur. ut patet.

Submultiplex ſuperpartiens. Ubi autem quantitas major ad minorem eſt in ratione Multipla-ſuperpartiente; eſt minor hæc ad illam majorem in ratione *Submultiplici-ſuperpartiente:* et ſpecies hujus ſpeciebus illius correſpondent. Ita ratio 3 ad 8, eſt ſubdupla-ſuperbipartiens-tertias; 5 ad 14, ſubdupla-ſuperquadripartiens-quintas; 4 ad

15,

15, ſubtripla-ſupertripartiens-quartas; 7 ad 31, ſubquadrupla-ſupertripartiens-ſeptimas. Atq; in aliis pariter.

Quæ autem ſuperius notanda monuimus de ratione (ſimplici) ſuperpartiente; eadem & hic, mutatis mutandis, notanda ſunt de ratione multiplici ſuperpartiente. Nec opus eſt ut repetantur.

Eſtq; hæc Rationum diſtributio, quam tradunt Recentiores Arithmetici. Quippe non hæc omnia rationum nomina apud Euclidem occurrunt; ſed quædam eorum præcipua. Cum taman hujuſmodi paſſim apud Mathematicos recentiores occurrant rationum nomina; nequis de illis hæreat, exponenda duxi.

Sicui vero nimis intricatæ videantur hæ rationum appellationes; poterunt illæ ſimplicius deſignari per duos numeros eâ quâ res poſtulet ratione conſtitutos, præſertim qui ſunt in eadem ratione minimas. Puta ſi, pro ratione ſubquadrupla-ſupertripartiente-ſeptimas, eam dicamus rationem quæ eſt 7 ad 31. Ita, qui dicit, ſit A ad B, ut 7 ad 31; tantundem innuit ac ſi diceret, Sit ratio quantitatis A ad quantitatem B, ſubquadrupla-ſupertripartiens-ſeptimas. Atque ad hanc formam rationes ſæpiſſime exponi ſolent.

Rationes itaq; pluribus modis deſignari poſſunt. Nempe — *Rationum Deſignatio.*

Vel, nominibus ſuis, modo indicatis. Ut Duplum, Triplum, Dimidium, Seſquialterum. &c.

Vel quidem, Figuris numericis rationes illas denominantibus: affixa ſaltem, vel quidem ſubintellecta, multiplicationis nota. Puta, 2.3 $\frac{1}{2}$, 1 $\frac{1}{2}$, &c. vel ×2, ×3, ×$\frac{1}{2}$, ×1 $\frac{1}{2}$, &c. Quid enim eſt Duplum, Triplum, Dimidium, Seſquialterum, &c. aliud quam, Multiplicatum in 2, 3, $\frac{1}{2}$, 1 $\frac{1}{2}$ &c.

Vel etiam, per duos numeros in ea ratione conſtitutos. Puta, Ratio ea quæ eſt 2 ad 1; 3 ad 1; $\frac{1}{2}$ ad 1, vel 1 ad 2; 1 $\frac{1}{2}$ ad 1, vel 3 ad 2, &c.

Vel quidem, duabus quibuſvis quantitatibus homogeneis ita conſtitutis; ut lineis, planis, ſolidis, angulis, &c. (quorum ad invicem ratio exponitur ut jam cognita, vel quaſi cognita,) eorumve ſymbolis. Puta, ut V ad A; ut L ad M; ut R ad S, &c.

Vel item, Fractionum inſtar $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{V}{A}$, $\frac{L}{M}$, $\frac{R}{S}$, &c.

Cum enim Rationum denominatores nil aliud ſit quam Diviſionum

ſionum Quotientes, (ut jam ante fuerit expoſitum,) Diviſiones autem indicare ſolenne ſit interjecta virgula, Dividuum inter & Diviſorem, (idq; neceſſario, ubi numerus dividendus eſt dividente minor, ut $\frac{1}{2}$; atq; etiam aliàs, aliis de cauſis, non raro commode,) Quidni & Rationes ita deſignentur? præfixa tamen, ubi opus fuerit multiplicatonis nota. Et quidem ipſæ Fractiones nil aliud ſunt quam Rationes; nempe $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, &c. illam indicant partem, quæ ad integrum ſive unitatem eam habent rationem quam 1 ad 2, 3 ad 5, &c. numerator ad denominatorē: Atq; ut 2 eſt duplum unius, ſic $\frac{1}{2}$ eſt ſemiſſis unius, & ſic in cæteris. Fractionis itaq; Numerator & Denominator, perinde ſunt atq; Rationis Antecedens & Conſequens: Si ſaltem & Fractiones impropriæ (ut loquuntur) unitate quippe majores vel ſaltem æquales ſimul intelligantur, quæ rationem æqualitatis, & majoritatis indicent, ſicut fractiones propriæ indicant rationes minoritatis, ſive minoris inæqualitatis.

Vel etiam, ſi libet, (quodq; non raro expedit,) ſimplicibus ſymbolis, aliarum quantitatum inſtar. puta $\frac{1}{2} = \frac{Y}{A} = R$ &c. Sunt enim Rationes, non minus quam numeri, veræ quantitates.

Perinde igitur eſt, verbi gratia, ſive dicamus, Duplum quantitatis A, ſive 2A vel $2 \times A$ vel $A \times 2$, ſive $\frac{2}{1}A$, vel $A \times \frac{2}{1}$, ſive quod eſt ad A ut 2 ad 1, ſive ad quod A eſt ut 1 ad 2. Sic Triplum A, $= 3A = A \times 3 = \frac{3}{1}A$. Et ſemiſſis A, $= 2)A = \frac{A}{2} = \frac{1}{2}A$. Et ſeſquialterum ipſius A, $= 1\frac{1}{2}A = 1\frac{1}{2} \times A = A \times 1\frac{1}{2} = A \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}A = 2)\,3 \times A = \frac{3A}{2}$ &c.

Similiter in proportionalibus deſignandis; ubi nempe eadem utrobique ratio eſſe ſignificatur. Puta, A ad B ut 1 ad 2, vel $A.B :: 1.2$. vel $A = \frac{1}{2}B$, vel $\frac{A}{B} = \frac{1}{2}$, vel $B)A(\frac{1}{2}$.

Item, Ratio lateris ad diagonium quadrati, $L.D :: 1.\sqrt{2}$, vel $\frac{L}{D} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, vel $L = \frac{1}{\sqrt{2}}D$, vel $L = \frac{D}{\sqrt{2}}$. Diagonii vero ad Latus, $D.L :: \sqrt{2}.1$, vel $\frac{D}{L} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$, vel D =

√.2

$\frac{\sqrt{2}}{1} L = \sqrt{2} \times L = L \times \sqrt{2} = L \sqrt{2} = \sqrt{:2\,Lq} = \sqrt{:2 \times Lq}$.

Item, L ad M ut R ad S, vel L. M : : R. S. vel $L = \frac{R}{S} M$, $\frac{L}{M} = \frac{R}{S}$. Et ſimiliter alibi.

Qui vero ex omnibus deſignandi formulis, Rationes quilibet deſignare velit, penes ſe ſit optio: Liberum quippe cuiq; erit, quam velit eligat; vel etiam nunc hanc nunc illam, prout præſenti negotio magis accommodum videatur.

CAP. XXX.

De Rationum Compoſitione ſive Continuatione, & Imminutione. Ratio Duplicata, Triplicata, &c. Item Subduplicata, Subtriplicata, &c. Et Subduplicatæ-triplicata, &c.

AD pleniorem Rationum traditionem, ſupereſt ut Rationum Compoſitio, ſive Continuatio, & Imminutio exponantur.

Rationum Compoſitionem, ſive Continuationem, ſive (ut nonnulli loquuntur) Additionem, definit Euclides, 5 d 6. Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν, αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι, ποιῶσί τινάς: forte τινά. *Ratio ex rationibus componi dicitur, quando rationum quantitates inter ſe multiplicatæ, aliquas* (vel *rationem aliquam*) *efficiunt.* *Rationum Compoſitio, ſive continuatio, quid.*

Quid per *rationum quantitates* intelligit Euclides non inter interpretes convenit: num ſcilicet ipſos terminos; num quod ex eorum comparatione provenit. Utrumvis autem dicatur perinde eſt. Puta, ſi rationis A ad B termini, in terminos rationis α ad β reſpective ducantur; nempe $A \times \alpha$, $B \times \beta$; ut proveniat ratio $A \times \alpha$ ad $B \times \beta$: ſive etiam ratio $\frac{A}{B}$ ducatur in rationem $\frac{\alpha}{\beta}$, ut proveniat $\frac{A}{B} \times \frac{\alpha}{\beta}$: perinde eſt; nam $\frac{A}{B} \times \frac{\alpha}{\beta}$

$=\frac{A\alpha}{B\beta}$: ut ex fractionum multiplicandarum regulis ſuo loco patebit. Fuſius hæc exponit Eutocius ad prop. 4. lib. 2. Archim. *de Sphæra & Cylindro.*

Quod autem volunt tum Euclides, tum alii, hoc eſt. verbi gratia, *Duplum tripli*, vel *Triplum dupli*, (hoc eſt, Sextuplum,) componi ex *Duplo* & *Triplo*; quippe quæ quantitates invicem ductæ conſtituunt duplum tripli: puta $\frac{2}{1}\times\frac{3}{1}=\frac{6}{1}$, vel $2\times 3=6$. Sic Tripli dimidium, vel Dimidii triplum, (hoc eſt, Seſquialterum,) componitur ex Triplo & Dimidio: puta $3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$. Sic ratio *Dupla*, componi dicitur ex *Seſquialtera* & *Seſquitertia*, (hoc eſt, ut loquuntur Muſici ex Diapente & Diateſſeron componitur Diapaſon,) quia $\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}=\frac{6}{3}=2$. Sic ratio $\frac{ABC}{\alpha\beta\gamma}$ componitur ex rationibus $\frac{A}{\alpha}, \frac{B}{\beta}, \frac{C}{\gamma}$. Item $\frac{A}{D}$ componitur ex $\frac{A}{B}, \frac{B}{C}, \frac{C}{D}$, quia $\frac{A}{B}\times\frac{B}{C}\times\frac{C}{D}=\frac{ABC}{BCD}=\frac{A}{D}$. quæ dicitur λόγος δι' ἴσου, *ex æquo*, ſive *ex æqualitate*. 18 d 5.

Rationis Imminutio. Contra vero, Ratio $\frac{AB}{\alpha\beta}$, imminuta ratione $\frac{A}{\alpha}$, eſt $\frac{B}{\beta}$; quia $\frac{A}{\alpha}\,)\,\frac{AB}{\alpha\beta}\,)\,\frac{B}{\beta}$. Quod nonnulli ſic efferunt, ſi ex ratione $\frac{AB}{\alpha\beta}$ auferatur ratio $\frac{A}{\alpha}$, manebit ratio $\frac{B}{\beta}$.

Cur autem hanc rationum Imminutionem non pariter definiverit Euclides atque Compoſitionem ſive Continuationem; cauſa forſan erat, quoniam id minus videbatur neceſſe, cum utrumq; per compoſitionem fieri poſſit. Perinde enim eſt rationem $\frac{AB}{\alpha\beta}$ ratione $\frac{A}{\alpha}$ imminuere, atq; cum ratione $\frac{\alpha}{A}$ componere. Nam $\frac{A}{\alpha}\,)\,\frac{AB}{\alpha\beta}\,(\,\frac{B}{\beta}=\frac{AB\alpha}{\alpha\beta A}=\frac{AB}{\alpha\beta}\times\frac{\alpha}{A}$.

Hæc autem Rationum Compoſitio, an Additio judicanda ſit an Multiplicatio, haud ſatis videtur apud Arithmeticos (vel etiam Geometricos) conſtare. Utut enim certum ſit quantitates invicem *Multiplicari*, non Addi: (nam verbi gratia, Duplum tripli

tripli non idem eſt atq; *duplum & triplum*, quippe hoc eſt *quintuplum*, nam 3 + 2 = 5; ſed *Triplum in 2 multiplicatum*, adeoque *Sextuplum*. nempe × 3 × 2 = × 6:) Attamen uſu fere obtinet, ut rationum potius *Additio* dicatur, quæ eſt revera multiplicatio. Etquidem ne Multiplicationis nomine jam tandem ex poſtlimino gaudeat, id maxime impedit, quod *Multiplicatio rationum* jam alio ſenſu uſurpetur, adeoq; homonymia metuenda ſit, ſi pro rationum continuatione ſive compoſitione uſurpandam velimus. Nam rationum Duplicatio, Triplicatio, aliaſve multiplicatio, alio plane ſenſu jam ſolet uſurpari, quam quo jam loquimur, ut mox dicetur.

Malim itaq; ut vel *Compoſitio* vel (quod vox Græca συγκεῖσθαι magis innuere videtur) *Continuatio* dicatur, quam vel Additio vel Multiplicatio.

Deſignandam autem malim per notam × Multiplicationis, quam per + Additionis; (nam praxin multiplicando exerceri nemo dubitat:) adeoque quæ ex $\frac{A}{\alpha}$, & $\frac{B}{\beta}$, componitur ratio, ſcribenda eſt $\frac{A}{\alpha} \times \frac{B}{\beta}$, non autem $\frac{A}{\alpha} + \frac{B}{\beta}$. Adeoq; tota illa de Fractionum Multiplicatione & Diviſione tradenda doctrina; de Rationum Continuatione & Imminutione pariter intelligenda erit: ſunt enim ipſiſſima eadem res. Rationum itaque continuendarum praxin in illum locum rejiciendam cenſui.

At cavendum interim ne *Ratio compoſita*, λόγος συγκείμενος, 5 *d* 6 tradita, atq; *Compoſitio rationis*, σύνθεσις λόγου 14 d 5 definita, pro eodem habeantur. Sunt enim res ſatis diverſæ. Quippe illud Additionis, hoc Multiplicationis eſt negotium. Ut ex ipſis definitionibus citatis conſtat. Quod innuiſſe ſufficiat.

Verum hoc omnino ſpectat, quod de Ratione Duplicata, Triplicata, aliáſve multiplicata tradit Euclides 10 *d* 5, & alibi; vel etiam Subduplicata, Subtriplicata, &c. (Eodem plane modo quo ad Multiplicationem referendæ ſunt quadratio, Cubicatio, aliæve multiplicationes poteſtatum generativæ; de quibus deinceps dicetur.) Non enim tantundem ſonant atq; ratio Dupla, Tripla, Subdupla, Subtripla, &c. vel Duplex, Triplex, &c. (neque enim ratio Sextupla, rationis Triplæ, ratio Duplicata dicitur,

Ratio Duplicata, Subduplicata, &c. quid.

dicitur, utut Dupla ſit; quippe Sextuplum eſt Tripli Duplum.)

Ratio ſubduplicata, &c. quid.

Sed cum ratio aliqua (ſive majoris ſive minoris inæqualitatis) cum ſeipſa continuatur, quæ prodit ratio, rationis expoſitæ ratio *Duplicata* dicitur; ſin in eandem iterum continuetur, ratio *Triplicata* dicitur; & ſic deinceps: Quibus, ut correlata, opponuntur ratio *Subduplicata*, *Subtriplicata*, &c. (ſicut quantitas in ſe ducta, expoſitæ *Quadratum* producit; ſin in eandem iterum ducatur, *Cubum*, &c. Sic rationis $\frac{A}{B}$ ratio duplicata eſt $\frac{A}{B} \times \frac{A}{B} = \frac{AA}{BB} = \frac{Aq}{Bq}$; triplicata, $\frac{A}{B} \times \frac{A}{B} \times \frac{A}{B} = \frac{Ac}{Bc}$, &c. Et contra; Rationis $\frac{Ac}{Bc}$, ratio ſubtriplicata eſt $\frac{A}{B}$: Et rationis $\frac{Aq}{Bq}$, ratio ſubduplicata eſt $\frac{A}{B}$. (Ipſius autem $\frac{A}{B}$ rationis, ratio ſubduplicata erit $\sqrt{\frac{A}{B}}$; ſubtriplicata, $\sqrt{c}\,\frac{A}{B}$.

Ut plenius patebit, poſtquam poteſtatum geneſis & analyſis tradita fuerit. Nam ſi expoſita Ratio dicatur Radix, vel poteſtas prima; Ratio Duplicata erit Quadratum, ſive poteſtas ſecunda; Ratio Triplicata Cubus, vel poteſtas tertia; &c. Et Ratio Subduplicata, erit expoſitæ Radix-quadratica, vel poteſtas ſubſecunda; Subtriplicata, expoſitæ Radix-cubica, vel poteſtas ſubtertia. &c.) Sic ratio quadrupla eſt, rationis duplæ, ratio (non modo dupla, quia $2 + 2 = 4$, ſed) duplicata, quia $2 \times 2 = 4$; & hujus illa ſubduplicata. Item rationis triplæ, ratio duplicata eſt (non ſextupla, quod fit $3 + 3 = 6$, ſed) noncupla, quia $3 \times 3 = 9$: triplicata vero vigintiſeptupla, quia $3 \times 3 \times 3 = 27$. Sic rationis $\frac{2}{1}$, duplicata eſt $\frac{2}{1} \times \frac{2}{1} = \frac{4}{1}$; triplicata, $\frac{2}{1} \times \frac{2}{1} \times \frac{2}{1} = \frac{8}{1}$. &c. Et rationis $\frac{1}{2}$, duplicata eſt $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$; triplicata, $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Item rationis $\frac{2}{3}$, ratio duplicata eſt $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$; triplicata, $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$; quadruplicata $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}\,\frac{2}{3} = \frac{4}{9} \times \frac{4}{9}$. &c,

Nec aliud volunt definitiones Euclidis, 10 d 5. Ὅταν τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον· ὅταν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον, τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται ἤπερ πρὸς

τὸ

τὸ δεύτερον· ϰὴ ἀεὶ ἑξῆς ἑνὶ πλεῖον, ἕως ἂν ἡ ἀναλογία ὑπάρχῃ. *Cum tres magnitudines* (continue) *proportionales fuerint, prima ad tertiam, duplicatam rationem habere dicitur ejus quam habet ad ſecundam: At cum quatuor magnitudines* (continue) *proportionales fuerint; prima ad quartam, triplicatam rationem habere dicitur ejus quam habet ad ſecundam: & ſemper deinceps, uno amplius, quamdiu proportio extiterit.* Verbi gratia, ſi quantitas prima A, ſit ſemiſſis ſecundæ B, & hæc tertiæ C, atq; hæc quartæ D, & ſic deinceps, (ubiq; ſcilicet in ratione ſubdupla;) Erit B = 2A, C = 2B = 4 A, D = 2 C = 4B = 8 A, &c. Ideoq; ratio A ad B eſt $\frac{1}{2}$, (cum enim B = 2A, erit A . B : : 1 . 2.) Ratio A ad C (duplicata) $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, (nã propter C = 4 A, erit A . C : : 1 . 4.) Ratio A ad D (triplicata) $\frac{1}{8} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, (nam propter A = 8 D, erit A . D : : 1 . 8.) Et ſic deinceps.

Atq; hic non incommodum erit notare; quod Euclides non διπλοῦν, τριπλοῦν, &c. vel διπλάσιον, τριπλάσιον, &c. dicit, (quibus vocibus alibi id innuere ſolet quod Latini vocibus *duplum, triplum,* &c. vel etiam *duplex, triplex,* &c.) ſed διπλασίονα, τριπλασίονα, &c. (quod & perpetuo hoc ſenſu obſervat,) quem aliquatenus imitari conantur interpretes, dum non tam rationem *duplam, triplam,* &c. vel etiam *duplicem, triplicem,* &c. hoc ſenſu; ſed potius, mutata formâ, *duplicatam, triplicatam,* &c. dicunt: tum ut diverſitatem formarum διπλάσιος, & διπλασίων apud Euclidem, aliquatenus referant; tum ut ὁμωνυμία aliquatenus caveatur.

Verum & hujuſmodi rationes (puta duplicata, triplicata, ſubduplicata, &c.) invicem continuari poſſunt, unde ratio ex illis compoſita emergat. Puta rationis $\frac{A}{B}$, ratio triplicata eſt $\frac{Ac}{Dc}$ hujus autem Subduplicata eſt $\sqrt{\frac{Ac}{Bc}}$: ergo rationis $\frac{A}{B}$ ratio Triplicatæ-Subduplicata, erit $\sqrt{\frac{Ac}{Bc}}$. Sic rationis $\frac{V}{A}$, ratio Triplicatæ-ſubduplicata, erit $\sqrt{\frac{V}{A}c}$. Eodem modo, cum rationis $\frac{V}{A}$ ratio duplicata ſit $\frac{V}{A}q = \frac{V}{A} \times \frac{V}{A}$, atq; hujus triplicata $\frac{V}{A}q \times \frac{V}{A}q \times \frac{V}{A}q = \frac{V}{A} \times \frac{V}{A} \times \frac{V}{A} \times \frac{V}{A} \times \frac{V}{A} \times \frac{V}{A}$; erit hæc, rationis $\frac{V}{A}$ expoſitæ, ratio duplicatæ-triplicata, (ſive triplicatæ

Ratio Subduplicatæ-triplicata. &c.

tæ-duplicata,) nempe ſextuplicata. Vel etiam ſi ratio quævis ſimplici ſymbolo deſignetur, puta R, erit R q vel R^2 ratio duplicata, R^3 triplicata, R^4 quadruplicata, $R^6 = R^3 \times R^2$ ſextuplicata, ſive triplicatæ-duplicata, $\surd$ R ſubduplicata, $\surd 3$ R ſubtriplicata, $\surd 3\, R^2$ duplicatæ ſubtriplicata. Nec ſecus alibi.

Totius autem hujus negotii praxis Arithmetica, (puta datæ rationis rationem duplicatam, triplicatam, ſubduplicatam, ſubduplicatæ triplicatam, &c. invenire, vel numeris aut etiam ſymbolis deſignare,) ex fractionum multiplicatione, quadratione, cubicatione, & radicum cujuſvis poteſtatis analyſi, dependet: quæ deinceps ſuis locis tradentur.

CAP. XXXI.

Progreſſio Geometrica. Continua: Diſjuncta. Inveſtigatio Summæ. Inveſtigatio termini ultimi; vel cujuſvis remoti.

Progreſſio Geometrica, quid?

PRogreſſionis Geometricę originem & naturam ſuperius tradidimus Cap. XXV. Quippe quæ Rationum æqualitatem (ſimilitudinem, identitatem,) reſpicit, ut progreſſio Arithmetica æqualitatem Differentiarum, exceſſuū puta ſive defectuum.

Euclidi dicitur Ἀναλογία: Interpretibus, *Proportio*, *Proportionalitas*, *Progreſſio*. Cicero ἀναλογίαν interpretatur *Comparationem* & *Proportionem*; & quidem primus, ipſo teſte, (in Plat. Timæi interpretatione,) *Quæ Græcè ἀναλογία Latinè (audendum eſt enim, quoniam hæc primum a nobis novantur) Comparatio Proportiove dici poteſt.*

Euclidi definitur Ἀναλογία, ἡ τῶν λόγων ὁμοιότης, *Rationum ſimilitudo.* 4 d 5. vel (ſecundum alios) 8 d 5. Ariſtoteli, Ethic. 5. ἰσότης τοῦ λόγου. *Rationum æqualitas.* Proclus in Plat. de Rep. λόγου ἐστὶν ἀναλογία ταυτότης, *rationis Identitas.* Theo. Smyrnæus ἀναλογία ἐστὶ πλειόνων λόγων ὁμοιότης ἢ ταυτότης, *rationum ſimilitudo ſeu identitas.* Fabius Quintilianus *Similitudinis* vocem comprobat, l. 5. c 11. Ἀναλογίαν *quidem a Simili ſeperaverunt, nos eam ſubjectam huic generi putamus Nam, ut Unum ad Decem, ſic Decem ad Centum, Simile certe eſt.* Euclides ipſe, utut, in Definitione, *Similitudinis*

litudinis vocem adhibeat, alibi tamen paſſim, *Identitatem* potius innuit; nec tam Rationem rationi *æqualem* dicit, aut *ſimilem*, quam *eandem*. Ut per totum lib. 5. paſſim eſt videre. Perinde autem eſt ſive ſimilitudinem, ſive Æqualitatem, ſive etiam Identitatem dicamus; dummodo enim de ſenſu convenit, non eſt ut de verbis admodum litigemus.

Diſtribuitur autem (ut ſupra dictum eſt) in Continuam, & Disjunctam (ſive diſcretam, diſcontinuam; Budæo, hiulcam & interruptam.) Illam appellat Ariſtoteles συνεχῆ: hanc ἀναδιῃρημένην.

Illa eſt, ubi termini ita continue procedunt, ut intermedius quilibet ſit tum antecedentis conſequens, tum conſequentis antecedens, in eadem ratione. Ut 2. 4. 8. 16 ∺ *Continua.*

Hæc, ubi eadem quidem recurrit ratio, non autem continue, ſed disjunctim. Ut 2. 4 :: 3. 6. *Disjuncta.*

Proportio itaq; ſive Progreſſio, tribus ad minimum terminis conſtituitur. Quod & notat Euclides 9 d 5. Ἀναλογία δέ, ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστοις ἐστίν. *Analogia* (proportio, proportionalitas,) *in tribus terminis pauciſſimis conſiſtit*. Nempe, proportio continua, ut 2. 4. 8 ∺ ubi eadem intercedit ratio inter primum & ſecundum, atq; inter ſecundum & tertium. Proportio autem diſcontinua ſive interrupta, nonniſi quatuor ſaltem terminis conſtituitur; puta 2. 4 :: 3. 6. Cum enim ratio quælibet duos terminos poſtulet, quippe qui invicem comparantur; eademq; ratio ſaltem bis occurrat ut conſtituatur analogia, quæ rationes comparat: ſi terminus medius ſit utriq; rationi communis (puta prioris conſequens, & poſterioris antecedens) in tribus terminis eadem bis reperiri poteſt ratio; ſin minus, non niſi in quatuor, cum utriuſq; rationis duo termini, a duobus reliquis terminis alii ſint. Poteſt autem tum analogia continua pluribus adhuc quam tribus; & diſjuncta, pluribus quam quatuor abſolvi. Puta 2. 4. 8. 16. 32 ∺ ſunt continue proportionales; diſcontinue vero 2. 4 :: 3. 6 :: 9. 18 :: 5. 10. Vel etiam (nam & ſic proportionales notare licebit) $\overset{,}{2}.\ \overset{,,}{3}.\ \overset{,,,}{5} :: \overset{,}{4}.\ \overset{,,}{6}.\ \overset{,,,}{10}$. puta, ut ſunt ad invicem 2, 3, 5; ſic & 4, 6, 10.

De Progreſſione Geometrica continua, duo præſertim tradi ſolent operationum compendia; duobus Problematis propoſita.

Primum eſt; Totius progreſſionis ſummã, ſine continua intermediorum omnium terminorum additione, invenire. Alterum eſt; Terminum ultimum, aliumve a primo ſatis remotum, neglectis intermediis, invenire.

Inveſtigatio Summæ.

Primum quod attinet. Continuæ Progreſſionis ſumma ſic reperitur. Si terminus ultimus per communem rationem multiplicetur, (ſive, quod tantundem eſt, progreſſio per unum adhuc gradum continuetur;) atq; inde auferatur terminus primus, & quod reſtat per numerum unitate minorem quam eſt communis ratio dividatur; prodibit progreſſionis ſumma. Hoc eſt, ſi terminus primus ſeu minimus dicatur A, maximus V, communis ratio R, & progreſſionis ſumma S. erit $\frac{VR - A}{R - 1} = S$. Cujus Regulæ demonſtrationem deinceps exponemus.

A	2	0
	6	1
	18	2
	54	3
	162	4
	486	5
	1458	6
	4374	7
	13122	8
V	39366	9
	59048	

Sic in progreſſione adjuncta, decem terminorum. Terminus ultimus 39366 in communem rationem 3 ductus, facit 118098; unde demptis 2 (termino primo) reſtant 118096. Qui numerus per 2 (numerum unitate minorem quam eſt 3, ratio communis) diviſus, quotientem exhibet 59048, totius progreſſionis ſummam, quæ quidem eadem eſt & quæ ex terminis omnibus continue additis emergit.

$$
\begin{array}{r}
39366 \\
\times 3 \\
\hline
118098 \\
-2 \\
\hline
2)\ 118096 \\
59048
\end{array}
$$

Cum autem res tædio plena videri poſſit, in prolixioribus ſaltem progreſſionibus, ſingulos terminos continua multiplicatione ſigillatim inveſtigare; Hujus itaq; operationis compendium quærit problema illud alterum; Nempe

Inveſtigatio termini ultimi.

Progreſſionis cujuſvis inchoatæ, terminum ultimum, aliumve quemvis aſſignatum, a primo ſatis remotum, invenire. Quod hoc pacto faciendum docent. Progreſſio expoſita per aliquot ſaltem gradus inchoetur. Et ſinguli termini notari intelligantur totidem numeris naturali ſerie progredientibus a ciphra inchoatis;

choatis; puta 0,1,2,3.4, &c. (vel etiam quibuſvis aliis, continua progreſſione procedentibus, ab o inchoatis:) qui *Indices* vocari ſolent, ſive *Exponentes*; diſtantiam cujuſq; termini a primo indicantes. Hac præparatione factâ; ſi terminorum jam inventorum quilibet multiplicetur vel in ſe vel eorum alium quemlibet; & productum per terminum primum dividatur: prodibit terminus ille cui reſpondet Index ex invicem multiplicatorum Indicibus additis conflatus. Atq; hoc, quoties opus fuerit, iterandum erit.

Exſempli gratia. In expoſita progreſſione; Inventis terminis primoribus quatuor, 2, 6, 18, 54, quibus reſpondent indices 0, 1, 2, 3. Ductis 54 in 54 (termino quarto in ſeipſum, cujus index 3, 3,) fiunt 54×54 = 2916; quem numerum ſi per 2 terminum primùm dividamus, proveniet 2)2916(1458 terminus ſeptimus cujus index 6 = 3 + 3. Deinde; ſi 1458 terminus ſeptimus jam inventus, (cujus index 6,) ducatur in 54 terminum quartum, (cujus index 3) prodibunt 78732, quæ per 2 (terminum primum) diviſa, exhibebunt 2)78732 (39366 terminum decimum, cujus index 9 = 6 + 3. Et ſic deinceps, quouſq; opus fuerit, progreſſio per ſaltus continuabitur.

2	0	54	3
6	1	×54	+3
18	2	2) 2916	
54	3	1458	6
		×54	+3
1456	6	2) 78732	
		39366	9
39366	9		

Exſemplum hujuſmodi aliud notiſſimum libet adjungere. Sint in equi cujuſdam calceis ſingulis ſex clavi, adeoq; in omnibus 24. Et venum expoſitus equus ea lege ut emptor pro primo clavo denarium ſolvat, pro ſecundo duos, pro tertio 4, & ſic deinceps, ſingulorum clavorum pretium continue duplando. Quæritur, quanti emendus eſt Equus?

Vel etiam, Si quis ſervum conduxerit in annum integrum,

ea lege ut prima ſeptimana recipiat denarium, ſecunda duos, tertia 4, & ſic deinceps, ſingulis ſeptimanis mercedem duplando. Quæritur, quantam habiturus eſt mercedem ſervus anno integro, ſive ſeptimanis 52?

Conſtituantur primo, continua multiplicatione, numeri aliquot primores, puta ſex, 1, 2, 4, 8, 16, 32. quorum Indices 0, 1, 2, 3, 4, 5. Ductis itaque in ſe 32 (termino ſexto cui index 5) fiunt 1024. Quæ cum per terminum primum dividenda ſint, ſitq; ille 1, numerus dividendus inde non mutatur; & propterea 1024 terminus ille eſt cui convenit Index $10 = 5 + 5$, nempe undecimus, ſive poſt primum decimus. Ille autem in ſe ductus producit (eadem ratione,) terminum poſt primum viceſimum, quia $10 + 10 = 20$. Hic autem (eadem ratione) ductus in 16, terminum poſt primum quartum (cui index 4) producit terminum cui index $24 = 20 + 4$. Qui quidem terminus cum ſit ordine viceſimus quintus; adeoq; clavi ultimi, nempe viceſimi quarti, pretium exhibeat uno adhuc gradu auctum; ſive quod tantundem eſt, terminum ultimum in communem rationem ductum; Hinc ſi auferatur terminus primus 1, numerus reſiduus 16777215 (qui, cum per communem multiplicatorem unitate minutum, nempe $2 - 1 = 1$, dividendus ſit; hac diviſione non immutetur,) eſt ipſe numerus denariorum quibus emendus eſt equus: qui millena millia ſuperat.

1	0
2	1.
4	2
8	3
16	4.
32	5
1024	10
1048576	20
16777216	24.
281474976710656	48
4503599627370496	52
− 1	
4503599627370495	

Sin adhuc continuanda ſit progreſſio ad locum uſque quinquageſimum ſecundum; id eodem modo fiet. Nempe ducto in ſeipſum termino modo invento, (cujus index 24,) habebitur ille cujus index $48 = 24 + 24$. Atq; hic item in illum cujus index 4, habebitur ille cujus index 52. (nempe ultimus in communem rationem ductus) qui, unitate minutus, ſummam totius progreſſionis exhibet: mercedem quidem ſatis amplam.

Atq;

Atq; hinc abunde liquet in quam immenſam & plane incredibilem ſummam ab exiguis principiis in continua progreſſione Geometrica perveniatur.

Priuſquam autem hoc negotium dimittam; libet & Exſemplum aliud annectere, ex Authore Arabico deductum; (quod D. *Pocockio* noſtro, ſummæ in linguis Orientalibus Eruditionis viro, debeo:) unde, non modo hujuſmodi computi exſemplum, (fortaſſe, omnium antiquiſſimum, ad cujus imitationem alia fuerint excogitata;) ſed & aliarum aliquot inventionum originem videre licet. Nempe in Commentariis quos ſcripſit *Seláho 'ddín Mohammed Alſéphadi*, in Nobiliſſimi Poetæ *Tograii* Poema, *Lamiato'lAjam* dictum, ad hunc verſum

ان العلي حدثتني *Enna'l ola hadathatni*

hæc habentur

الصحيح ان هذه لفظة عجمية واصلها بالعجمية
شش رنك معناه ستة الوان وهي الشاه والفرزان
والفيل والفرس والرخ والبيدق والناس كثير منهم
من يغلط في الصولي وهو ابو بكر محمد بن يحيى
بن عبد الله بن العباس ابن صول تكين الكاتب
ويزعم انه وضع الشطرنج لما ضرب المثل فيه والصحيح
ان واضعه صصه بن داهر الهندي لان اردشير بن بابك
اول ملوك الفرس الاخيرة قد وضع النرد ولذلك قيل
له نردشير جعله مثلا للدنيا واهلها فرتب الرقعة
اثني عشر بيتا بعدد شهور السنة والمهارك ثلثين
قطعة

قطعة بعدد ايام الشهر والفصوص مثلا لافلاك الدايرة
ورميها مثل تقلبها ودورانها والنقط فيها بعدد الكواكب
السيارة كل وجه منها سبعة الشش ويقابله اليك
والبنج ويقابله الدو والجهار ويقابله السه وجعل ما ياتي
به اللاعب من النقوش كالقضا والقدر تارة له وتارة
عليه وهو يصرف المهارك علي ماجات به النقوش لكنه
اذا كان عنده حسن نظر عرف كيف يتاتي وكيف
يتحيل علي الغلب وقهر خصمه مع الوقوف عند ما
حكمت به الفصوص وهذا هو مذهب اشاعرة اخبرني
من اثق به ان الشيخ تقي الدين احمد بن تيمية كان
يقول اللعب بالنرد خير من اللعب بالشطرنج لان
لاعبه يعترف بالقضا والقدر والشطرنج لاعبه ينفي
ذلك وهو اقرب الي الاعتزال ——— فلما وضعت
الفرس ذلك افتخرت به وكان ملك الهند يوميذ
بلهيب فوضع له صصه المذكور الشطرنج فقضت حكما
ذلك العصر بتفضيله ولما عرضه علي الملك واوضح
له امره ساله ان يتمني عليه فتمني عليه عدد تضعيفه
فعدها فاستصغر الملك ذلك من همته وانكر عليه ما قابله
به من طلب النزر القليل في ذلك المقام فقال ما اريد
غير

فير ذلك فامر له بذلك فلما حسبه ارباب الديوان قالوا
للملك ما عندنا ما يقارب ذلك القليل منه فاذكر ذلك
فاوضحوه له فاعجبه الامر الثاني اكثر من الاول ∴
قال القاضي شمس الدين احمد بن خلكان ولقد كان
في نفسي من هذه المبالغة شي حتي اجتمع بي بعض
حساب الاسكندرية وذكر لي طريقا تبين لي ما ذكروه
واحضر لي ورقة بصحة ذلك وهو انه ضاعف الاعداد الي
البيت السادس عشر فاثبت فيه اثنين وثلثين الفا
وسبع ماية وثمانية وستين حبة وقال نجعل هذه الجملة
مقدار قدح وقد عبرتها وكان كما ذكر والعهدة
عليه من هذا النقل ثم ضاعف السابع عشر الي البيت
العشرين فكان فيه ويبة ثم انتقل من الويبات الي
الارادب ولم يزل يضعفها حتي انتهي في بيت الاربعين
الي ماية الف اردب واربعة وسبعين الف اردب وست
ماية واثنين وستين اردبا وثلثي اردب وهذا المقدار
شونة ثم انه ضاعف الشون الي بيت الخمسين فكانت
الجملة الفا واربعا وعشرين شونة وهذا المقدار مدينة
ثم انه ضاعف ذلك الي البيت الرابع والستين وهو
اخر الابيات فكانت الجملة ستة عشر الف مدينة
وثلث

وثلث مايه واربعا وثمانين مدينة وقد تعلم انه ليس في
الدنيا مدن اكثر من هذا العدد انتهي قلت اخر
ما اقتضاه تضعيف رقعة الشطرنج ثمانية عشر الف الف ست
مرات واربع مايه واربعون الفا خمس مرات وسبع مايه
واربع واربعون الفا اربع مرات وثلثة وسبعون الفا ثلث
مرات وسبع مايه وتسعة الاف مرتين وخمس مايه واحد
وخمسون الفا وستة مايه وخمسة عشر عددا ———

١٨٤٤٦٧٤٤٠٧٣٧٠٩٥٥١٦١٥
٦ ٥ ٤ ٣ ٢ ١

واذا جمع هذا العدد هرما واحدا مكعبا طوله ستين ميلا
وعرضه كذلك وارتفاعه كذلك بالميل الذي هو
اربعة الاف ذراع بالعمل الذي هو ثلثة اشبار معتدلة
علي ان الاردب المصري مساحته ذراع مكعبا وزنته
مايتان واربعون رطلا وكل رطل مايه واربعة
واربعون درهما والدرهم اربعة وستون حبة من القمح
وكل بيت اذا ربعنا ما فيه من العدد حصل من
مربعه ما يجب ان يكون في البيت الذي عدده كضعف
ذلك البيت الا واحدا فاذا ربعنا ما في الثالث مثلا
حصل ما في الخامس واذا ربعنا ما حصل في
الخامس حصل ما في التاسع

فاذا

فاذا ربعناه حصل ما في السابع عشر فاذا ربعناه حصل
ما في الثالث والثلثون فاذا ربعناه حصل ما في
الخامس والستين فاذا انقصنا منه واحدا كان
الباقي جملة ما في البيوت كلها الي البيت الرابع
الستين وان ضعفناه قبل ان ننقص منه واحدا كان
ضعف حاصل البيت الرابع والستين وهذا العمل يحصل
تضعيف رقعة الشطرنج من خمس ضربات ———
ويقال فضايل الهند ثلثة سبقوا بها من سواهم من
الناس كتاب كليلة ودمنة ولعبة الشطرنج والتسعة
احرف التي تجمع انواع الحساب ∴

Quæ Latine ſic ſonant. "Certum eſt, vocabulum hoc
"[ſhetrunge, *Scacchorum ludus*;] Perſicum eſſe, cujus Thema
"Perſice eſt *ſheſh ranc*, quod ſignificat *ſex ſpecies*, quæ ſunt
"*Alſháh, Alpharzân, Alphîl, Alphâras, Alrôch*, & *Bódak*. [Hoc eſt,
"Rex, Regina, Elephas, Equus, Roch, Pedes.] Hominum au-
"tem non pauci falluntur, quod ad *Alſûli*, qui eſt *Aba Beer Ebn*
"*Mohammed Ebn Yahya Ebn Abdollah Ebno'l Abbâs Ebn Sûl Takîn*
"ſcriba, autumantes illum, Scacchorum ludum inveniſſe, eo
"quod Proverbio originem dedit. Certum autem eſt Iudi hu-
"jus authorem fuiſſe *Seſſa Ebn Dahir* Indum. Cum enim
"*Ardſhîr Ebn Babec*, primus Regum Perſiæ Poſteriorum, Calcu-
"lorum ludum [*Tables*] inveniſſet; unde & *Nardſhîr* appella-
"tus eſt [*ludus ille*] quem ad exemplar mundi compoſuit:
"Abacum in duodecim domos diſtinguens, ad numerum men-
"ſium Anni; Calculos triginta, numero dierum menſis; Talos,
"ad inſtar ſphærarum circumrotantium; eorúmq; jactum, ad
"inſtar motus & circulationis earundem; in eiſq; puncta nu-
"mero Planetarum, quorum ſitus quilibet numerum exhibet
"ſeptenarium, (dum ſenioni opponitur monas, quinternioni

وثلث ماية واربعا وثمانين مدينة وقد تعلم انه ليس في
الدنيا مدن اكثر من هذا العدد انتهي قلت اخر
ما اقتضاه تضعيف رقعة الشطرنج ثمانية عشر الف الف ست
مرات واربع ماية واربعون الفا خمس مرات وسبع ماية
واربع واربعون الفا اربع مرات وثلثة وسبعون الفا ثلث
مرات وسبع ماية وتسعة الاف مرتين وخمس ماية واحد
وخمسون الفا وستة ماية وخمسة عشر عددا ————

١٨٤٤٦٧٤٤٠٧٣٧٠٩٥٥١٦١٥
٠ ٢ ٥ ٤ ٣ ٢ ١

واذا تجمع هذا العدد هرما واحدا مكعبا طوله ستين ميلا
وعرضه كذلك وارتفاعه كذلك بالميل الذي هو
اربعة الاف ذراع بالعمل الذي هو ثلثة اشبار معتدلة
على ان الاردب المصري مساحته ذراع مكعبا وزنته
مايتان واربعون رطلا وكل رطل ماية واربعة
واربعون درهما والدرهم اربعة وستون حبة من القمح
وكل بيت اذا ربعنا ما فيه من العدد حصل من
مربعه ما يجب ان يكون في البيت الذي عدده كضعف
ذلك البيت الا واحدا فاذا ربعنا ما في الثالث مثلا
حصل ما في الخامس واذا ربعنا ما حصل في
الخامس حصل ما في التاسع
فاذا

فاذا ربعناه حصل ما في السابع عشر فاذا ربعناه حصل
ما في الثالث والثلثون فاذا ربعناه حصل ما في
الخامس والستين فاذا انقصنا منه واحدا كان
الباقي جملة ما في البيوت كلها الي البيت الرابع
الستين وان ضعفناه قبل ان ننقص منه واحدا كان
ضعف حاصل البيت الرابع والستين وبهذا العمل يحصل
تضعيف رقعة الشطرنج من خمس ضربات ——
ويقال فضايل الهند ثلثة سبقوا بها من سواهم من
الناس كتاب كليلة ودمنة ولعبة الشطرنج والتسعة
احرف التي تجمع انواع الحساب ∴

Quæ Latine ſic ſonant. “Certum eſt, vocabulum hoc
“[ſhetrunge, *Scacchorum ludus*;] Perſicum eſſe, cujus Thema
“Perſice eſt *ſheſh ranc*, quod ſignificat *ſex ſpecies*, quæ ſunt
“*Alſhâh*, *Alpharzân*, *Alphîl*, *Alphâras*, *Alrôch*, & *Bódak*. [Hoc eſt,
“Rex, Regina, Elephas, Equus, Roch, Pedes.] Hominum au-
“tem non pauci falluntur, quod ad *Alſûli*, qui eſt *Aba Beer Ebn*
“*Mohammed Ebn Yahya Ebn Abdallah Ebno'l Abbâs Ebn Sûl Takîn*
“ſcriba, autumantes illum, Scacchorum ludum inveniſſe, eo
“quod Proverbio originem dedit. Certum autem eſt ludi hu-
“jus authorem fuiſſe *Seſſa Ebn Dahir* Indum. Cum enim
“*Ardſhîr Ebn Babec*, primus Regum Perſiæ Poſteriorum, Calcu-
“lorum ludum [*Tables*] inveniſſet; unde & *Nardſhîr* appella-
“tus eſt [*ludus ille*] quem ad exemplar mundi compoſuit:
“Abacum in duodecim domos diſtinguens, ad numerum men-
“ſium Anni; Calculos triginta, numero dierum menſis; Talos,
“ad inſtar ſphærarum circumrotantium; eorúmq; jactum, ad
“inſtar motus & circulationis earundem; in eiſq; puncta nu-
“mero Planetarum, quorum ſitus quilibet numerum exhibet
“ſeptenarium, (dum ſenioni opponitur monas, quinternioni

" dyas, quaternioni ternio opponitur;) notas quas jactu ſorti-
" tur Ludens, inſtar prædeterminationis & decreti divini, quæ
" ipſi aliquando favent, aliquande adverſantur; ipſe autem
" calculos pro ratione notarum movet, ita interim ut, ſi per-
" ſpicaci ſit ingenio, dignoſcere queat res ea arte diſponere, ut
" victoriam conſequatur, atq; adverſarium ſuum ſuperet, ſtante
" quod determinaverint tali; quæ eſt via Aſhariorum.——
" Narravit mihi quidam fide dignus, *Sheich Takioddîn Ahmed*
" *Ebn Tamîmah* dixiſſe, ludum Calculorum præſtantiorem eſſe
" ludo Scacchorum, quod illis ludens agnoſcat Decretum &
" Prædeterminationem: at Scacchiis ludens, eadem neget;
" quod propius accedit at *Matazalorum* ſententiam. ———

" Cum ergo hoc inveniſſent Perſæ, eoq; glorientur; . . . . .
" Regi Indiæ, invenit *Seſſa* prædictus Schaccorum ludum,
" quem iſtius temporis ſapientes iſti præferendum cenſuerunt.
" Quem ergo cum Regi exhibuiſſet, ejuſq; rationem ipſi decla-
" raſſet; ab ipſo juſſus, quicquid liberet, petere; petiit ille
" grana tritici juxta [areolarum] numerum [continue]
" duplicanda. Quod, ut parum quid, exiſtimans Rex, præ eo
" quod animo conceperat; male ab illo tulit, quod eum rei tam
" modicæ ac tenuis petitione exceperit eo in loco. Reſpondit
" ille; ſe nolle aliud. Hoc igitur illi dari juſſit. At ubi, qui Ra-
" tiociniis præerant, illud computaſſent: Regi dixerunt; Non
" eſſe penes ipſos, quod ad illius Exiguum iſtud, prope accede-
" ret. Cui cum Rex haud adhiberet fidem; rem ipſi demon-
" ſtrarunt. Adeo ut, Secundum hoc, majorem ipſi admiratio-
" nem incuteret, quam illud Prius.

" Refert *Al Kâdi Shemſo'ddîn Ahmed Ebn Chalecân*: Hærebat
" mihi animo [ſcrupulus] de hæc ſumma, donec computi-
" ſta quidem Alexandrinus, qui me convenerat, viam mihi o-
" ſtenderat qua manifeſtum mihi factum eſt quod dixerant;
" chartam mihi exhibens, qua veritas ipſius conſtaret. Nempe
" numeros duplicans uſq; ad areolam decimam ſextam, illic
" ſtatuit granorum triginta duo millia, ſeptingenta ſexaginta
" & octo; ſummam hanc, inquit, ſtatuamus menſuram *Kâdah*.
" Quod cum examinaveram, ita ſe habuit uti dixit. ———
" Deinde duplicando decimam ſeptimam & ſic deinceps ad vi-
" ceſimam; in ea fuit menſura *Waibah*. Dein a *Waibis* tranſiit
" ad *Ardubbas*; quas duplicare non deſiit [hoc eſt, continue
duplicavit

" duplicavit] donec in areola quadrageſima pertingeret ad
" centena & ſeptuaginta quatuor millia, & ſeptingenas & ſexa-
" ginta duas Ardubbas, cum duobus trientibus. Atq; hæc ſum-
" ma eſto granarium. Deinde Granaria duplicans ad areolam
" uſq; quinquageſimam, prodiit ſumma, mille & viginti quatu-
" or granariorum. Atq; hæc menſura, pro urbe habeatur. Dein,
" illud duplicans, ad areolam uſq; ſexageſimam quartam, quæ
" eſt omnium ultima, prodiit ſumma urbium, ſexdecim mille
" & tercentum octoginta quatuor. Scias autem non eſſe in u-
" niverſo mundo urbes hiſce plures numero. Atq; hactenus ille.

" Dico ego; ultimam quod producitur duplicando abacum
" Schaccorum, eſt octodecies mille mille, ſexies; quadringen-
" ta quadraginta ſex mille, quinquies; ſeptingenta quadraginta
" quatuor mille, quater; ſeptuaginta tria millia, ter; ſeptingen-
" ta novem mille, bis; quingenta quinquaginta unum mille; atq;
" ſexcenta & quindecim. 1 8 4 4 6 7 4 4 0 7 3 7 0 9 5 5 1 6 15.
6 5 4 3 2 1

" Atq; ſi collecta fuerint illa in unam pyramidem quadratam;
" longitudo erit * ſexaginta milliarium; latitudo, par; altitudo * *potius* Sex.
" etiam, par. ſecundùm milliare quod conſtat quatuor mille
" cubitis vulgo uſitatis: quorum quiſq; eſt trium ſpithamarum
" mediocrium. Cum etiam Ardubbæ Ægyptiacæ menſura ſit
" cubitus cubicus; pondus ipſius erit, Rotalarum ducentarum
" & quatuor: quarum unaquæq; Rotal eſt centum quadraginta
" quatuor drachmarum: Drachma autem eſt granorum tri-
" tici ſexaginta quatuor.

" Porro ſi numerum, in qualibet areola, quadraverimus;
" quadrando producitur qui ſtatuendus eſt in areola cujus nu-
" merus duplus eſt numeri iſtius areolæ, uno minus. Exſempli
" gratia; ubi quadraverimus quod eſt in tertia, prodit quod
" quintæ eſt: Cumq; quadraverimus quod prodiit in quinta,
" producitur quod nonæ eſt: Et cum hoc quadraverimus, pro-
" dit, quod eſt decimæ ſeptimæ: Hoc item quadrato, prodibit
" quod eſt triceſimæ tertiæ: atque hoc quadrato, prodit quod
" eſt [loci] ſexageſimi quinti: Unde ſi unitatem ſubtraxeri-
" mus; reliquum, eſt ſumma iſtius quod eſt in areolis omnibus
" uſq; ad ſexageſimam quartam. Quod ſi, ante ſubductam u-
" nitatem, dimidiaverimus; erit ſemiſſis, id quod prodit in a-

" reola ſexageſima quarta. Atq; hac praxi prodit duplicatio a-
" baci Scacchorum, quinque operationibus.——————

" Dicitur, ex quibus excellunt Indi, quibuſq; reliquis homini-
" bus præiverunt, tria eſſe. viz. Librum *Golailah Wademnah*;
" ludum Scacchorum; atq; novem Figuras numerarias.

Cum autem in ſuperioribus, laudatus ſit *Ebn Chalecan*; gravis apud ſuos author, & magni nominis; lectori forſan non ingratum erit quæ apud ipſum, in vita *Alſuli*, habentur, recitare: quæ, latine reddita, ſic ſonant.

' Vidi multos qui aſſererent, *Alſuli* Scacchorum [ſive *La-*
' *trunculorum*] ludum inveniſſe. Quod error eſt. Ejus enim Au-
' thor fuit *Seſſa Ebn Daher* Indus; Regiſque, cujus gratia illum
' invenit, nomen *Shebrâm*. Siquidem *Ardſhir Ebn Babec*, primus
' Regum Perſiæ poſteriorum, ludum Calculorum invenerat,
' (*Nardſhir* inde dictum, ab Authore ſc. denominatum:) quo
' mundi, ejuſq; incolarum, ſpecimen exhibuit; dum Alveum in
' duodecim domos diſtinxit, menſium anni numero; calculos
' triginta, numero dierum cujuſlibet menſis, ſtatuens; talos au-
' tem, decreti Divini, & mutationum quibus mundi incolas
' agitat, loco poſuit. In ſumma; longus eſſet his de rebus ſer-
' mo, & a propoſito noſtro alienus. Glóriantibus ergo Perſis,
' ludi calculorum inventione; in Regis Indorum gratiam, *Seſſa*
' Scacchorum ludum compoſuit: Quem calculorum [*ludo*]
' longe antecellere cenſuerunt iſtius temporis ſapientes; ob
' multa quæ enarrare longum eſſet. Ferunt autem, quod, ubi
' *Seſſa* ludum iſtum, a ſe inventum, Regi *Shebramo* prædicto ex-
' poſuiſſet, ille de hoc miratus, valideq; lætatus, juſſit ut in
' Ratiocinatorum conſeſſibus uſurpetur, omniumq; quæ noſſet
' præſtantiſsimum judicavit; utpote qui bello inſtrumentum
' eſſet, religioni vitæq; communi ſtabilimentum, omniſq; com-
' menti fundamentum; atq; ſe gratum oſtendit & lætitia affe-
' ctum, ob inſigne quod ſibi in regno ſuo hac ratione contigiſ-
' ſet beneficium. Juſsitq; *Seſſam*, ut, quicquid ſibi libueret, pete-
' ret. Qui ergo, Opto, inquit, ut tritici granum primâ domo
' [areola] poſitum, continue duplicetur, donec ad ultimam
' perventum fuerit; illudq; quicquid fuerit, mihi concedas.
' Rex autem illud, ut parum quid, contemptu accepit; & male
' tulit, quod ille exiguum quid & tenue propoſuiſſet, cum ipſe
' magnum aliquod animo concepiſſet. Cui ille, Nolo, inquit,
aliud

'aliud quam hoc; atq; in ea petitione perſeveravit, donec ipſius 'voto annuens [*Rex*] id ipſi dari juſſit. Quod ubi computi-'ſtis ſuis dictum eſſet; illi, facto computo, retulerunt, non eſſe 'penes ipſos frumentum, quod ſummam iſtam æquaret, vel ad 'eam prope accederet. Quod cum Regi nunciatum eſſet, ip-'ſeq; dictis aſſenſum haud præberet, computiſtas accerſi juſſit. 'Qui, ab illo interrogati, reſponderunt; ſi comportaretur to-'tum quod in mundo eſſet frumentum, id ſummam iſtam 'haudquaquam æquaturũ. Ipſoq; ſibi rem demonſtrari petente; 'cum conſidentes computum feciſſent, apparuit id fuiſſe ve-'rum. Rex ergo dixit, Magis ego te miror, ob eam quam feciſti 'optionem, quàm ob Scacchorum quem inveniſti ludum.

'Ratio autem duplicationis iſtius eſt, ut in domo prima, 'ponatur granum unum; in ſecunda, duo; in tertia, quatuor; 'in quarta, octo; atq; ita deinceps uſq; ad ultimam; & quoti-'eſcunque ad aliam domum tranſeatur, duplum ejus quod in 'priori poſitum fuerat ſtatuatur.

'Eram autem animo ſolicitus de hac ſumma, donec com-'putiſtam quendam Alexandriæ conveniſſem; qui duos mihi 'modos oſtendit quibus dicti veritas pateret: chartamq; mihi 'exhibuit, qua illud delineatum fuit. Hac ſcil. ratione, ut, cum 'numeros duplicaſſet uſq; ad domum decimam ſextam, ſtatue-'ret ibi grana 32768: quam, inquit, ſummam, menſuram '*Kadah* ſtatuas; quod mihi perpendenti ita ſe habere viſum eſt, '———— Dein, *Al Kadah* domo decima ſeptima duplicans, 'eo modo perrexit donec areola viceſima *Waibah* haberet. 'Dein *Waibas* duplicare pergens, ad *Ardobas* pervenit: Quas 'duplicare non deſiit, donec domo quadrageſima *Ardobas* ha-'beret 174762 cum duabus tertiis. Tum dixit, Hanc ſum-'mam ſtatuamus *Granarium*; neq; enim plus eâ continebit Gra-'narium. Dein Granaria iſta, uſque ad domum quinquageſi-'mam duplicata, erant 1024. Atq; hæc inquit, *Urbem* confi-'ciant. Neq; enim urbs plura Granaria continebit; & quæ 'tandem Urbs tot in ſe continebit granaria? Dein, *Urbes* du-'plicatæ uſque ad domum ſexageſimam quartam, quæ in 'Scacchorum Abaco ultima eſt, ad numerum 16384 pertige-'runt. Sciaſque, inquit, non eſſe in toto mundo plures quam 'hæ urbes: Siquidem Sphæræ terræ circuitus, prout ex Geome-'tria conſtat, eſt Paraſangarum 8000; adeo ut ſi quocunq; ter-

‘ ræ loco poneretur funis extremitas, quo totam terræ ſphæ-
‘ ram cingeremus, donec alteram funis extremitatem ad eun-
‘ dem locum perduceremus, ita ut occurrerent utraq; extremi-
‘ tas, funis iſtius menſura eſſet longitudinis milliarium 24000,
‘ quæ Paraſangas 8000, æquant. Atque hoc demonſtrative
‘ verum eſt ſine dubio. ——— Notum autem eſt, partem
‘ terræ habitabilem circiter quartam ejus ſphæræ partem eſſe.
Atq; hęc ſũt quę de hoc negotio habet *Ebn Chalecan*, loco citato.

Hæc autem fuſius recitare operæ pretium duxi, Quoniam, præter elegans præſentis negotii exſemplum, idque admodum vetuſtum, & forte omnium primum; Habemus etiam originem tum ludi Calculorum (Alvei aleatorii,) tum Latrunculorum (Schacchii,) tum etiam Figurarum Numeralium. Nomina vero, quibus Latrunculorum ludus vulgo appellatur, *Cheſſe, Eſches*, &c. ab ipſo authoris nomina *Seſſa*, videntur deducta. *Schacchii* vero nomen, a *Shah*, quod Regem ſignificat. Unde & *Check* ſeu *Shach*; quo, inter ludendum, *Regi cavendum* indicamus: & *Shach mât*, (hoc eſt, *Shah mât*, rex moritur,) quo, adverſo Rege plane victo, victoriam profitemur.

Quod autem ad Calculum, in citatis Authoribus recenſitum, attinet: eſt quidem ille per ſe ſatis clarus, ut multa explicatione non indigeat. Id interim obſervetur, quod ex calculo patet, poni nempe, quoad menſuram capacitatis,

32768 Grana tritici = Kadah.
16 Kadah = Waibah.
6 Waibah = Ardob.
174762 $\frac{2}{3}$ Ardob = Granario.
1024 Granaria = Urbi.
32767 Urbes = Summæ.

Item, quoad pondus,

Ardob = 204 Rotal.
Rotal = 144 Drachmis
Drachma = 64 Granis.

Denique, quoad menſuram longitudinis,

Paraſanga = 3 Milliaribus.
Milliare = 4000 Cubitis.
Cubitus = 3 Spithamis.
Ardob = Cubito cubico.

Ut autem menſuræ iſtæ cum noſtris Anglicanis melius com-
parentur

parentur : libet ſtatutum de menſuris Anglicanis recenſere, Anno 31° Ewardi primi ſancitum, hoc eſt, Anno Domini 1302.

*Conſenſu totius Regni Angliæ, menſura regia ſic conſtituta eſt : ut * Denarius Anglicus, qui vocatur Sterlingus, rotundus ſine abraſione, pendeat triginta duo Grana tritici bene exſiccata, & ex medio ſpicæ collecta : & viginti Denarii, conſtituant Unciam : & duodecim Unciæ, conſtituant Libram : & octo Libræ conſtituant * Congium vini : & octo Congii vini, conſtituant [a] Modium Londinenſem: qui eſt octava pars Quarterii.*

* *Valet, in argento, fere tres denarios monetæ Anglicanæ hodiernæ.*

* A Gallon.

a A Buſhel.

Juxta hanc itaque conſtitutionem, 32 Grana tritici pendent Denarium : 640 Grana, pendent Unciam : 7680 grana, pendent Libram, (adeoque conſtituunt menſuram Pintæ, = $\frac{1}{8}$ Congii:) 61440 grana, conſtituunt vini Congium : & 491520 grana, conſtituunt Modium.

Videtur itaque Modius noſter, cui aſſignantur grana 491520, præter propter æqualis eſſe illorum Waibæ, cui nempe implendæ ſatis ſuperque ſufficiant grana loci viceſimi, hoc eſt, grana 524288. Item eorum Kadah (nempe $\frac{1}{16}$ Waibæ) cui implendæ ſatis ſuperque ſufficiant grana loci decimi ſexti, hoc eſt, grana 32768; perinde fere videtur atq; Semicongius noſter, cui nempe conveniunt grana 30720, quippe toti congio conveniunt grana 61440. Similiter eorum Ardob = 6 Waibis, continebit propterea 6 modios Anglicanos circiter.

Similiter; cum eorum Ardob pendere dicitur 204 Rotalas; adeoq; Waibah, Rotalas 34, hoc eſt, Drachmas 4896, ſive Grana ponderis 313344. Patet vel eorum Grana ponderis, graviora fuiſſe tritici granis ; vel ſaltem grana tritici quæ habentur loco viceſimo, nempe 524288, multo plura eſſe quam contineat Waibah, quæ autem loco decimo nono habentur, pauciora, nempe 262144.

Si autem ponantur illorum grana ponderis, noſtris æqualia, illorum Rotala, (hoc eſt grana 9216) ſuperabit libram noſtram (eam nempe quam *Trojanam* vocant, granorum 7680) duabus unciis & ſemiſſe fere, adeoque prope accedit ad libram quam vocamus *Averdupois*, quæ æquatur unciis Trojanis 14 $\frac{3}{5}$, (nempe libræ Trojanæ, & duabus unciis cum ſemiſſe, & inſuper duobus denariis ; ſive unciis 14 & denariis 12.) Si vero eorum grana majora ſint ; ut nempe eorum Waibah vel æquet

modium

Modium noſtrum; tum illorum fere duas libras, quas vocamus, Trojanas æquabit; ſaltem 34 Rotalæ (pondus Waibæ) æquabit 60 libras Trojanas, nempe modij noſtri pondus. Accuratam vero menſurarum vel ponderum illorum cum noſtris comparationem hinc inſtituere minime valemus; propterea quod (ubi omnium fundamentum jacitur) grana loci decimi ſexti non ſtatuuntur menſuram Kadah præciſe implere, ſed ſaltem implere, & potius ſuperare quam deficere.

Si autem libeat etiã totam quæ emergit granorum molem, ad menſuram milliaris Anglicani redigere: illud haud magno labore fiet. Cum enim conſtat, ex ſuperius dictis, grana loci viceſimi, 524288, ſaltem æquare vel potius ſuperare modium Anglicanum: erit modiorum in tota mole numerus (ut diviſione patebit) 35184372088832 (ſaltem uno grano minus) nempe quantus eſt numerus granorum in loco 46.

Continet autem quilibet modius Congios octo, quilibet autem congius pollices cubicos 231, (de Vini Congio intelligo, nam Congius cerviſiæ continet pollices cubicos $272\frac{1}{4}$ nempe tot cubicos pollices; quot ſunt, in quadrata Pertica, Pedes quadrati; nam $16\frac{1}{2} \times 16\frac{1}{2} = 272\frac{1}{4}$) quod accurate ſe obſervaſſe teſtatur D. *Oughiredus* in libro quem *De Circulis Proportionum* inſcripſit, *Cap.* 9. Et propterea in Modio Anglicano continentur pollices cubici 1848; atque in ſex Modiis Anglicanis pollices 11088; cui cum præterpropter æqualis fuiſſe colligitur Ardoba Ægyptia, quæ illorum cubito cubico æqualis ponitur, erit illorum cubitus cubicus pollicibus Anglicanis 11088 æqualis; adeoq; cubiti longitudo, erit pollicum Anglicanorum $22\frac{1}{3}$ circiter.

Milliare autem Anglicanum continet 8 ſtadia, quorum quodlibet continet 40 perticas, harumque quælibet pedes $16\frac{1}{2}$: adeoq; ſtadii longitudo, eſt pedum 660; milliaris autem, pedum 5280. Et propterea, milliare cubicum continebit pedes cubicos 147197952000; hoc eſt, pollices cubicos 254358061056000; (quippe pes continet 12 pollices, adeoq; pes cubicus pollices cubicos $1728 = 12 \times 12 \times 12$.)

Cum itaque, ut dictum eſt, modius contineat pollices cubicos 1848, diviſo per hunc numerum numero pollicum cubicorum, unius milliaris cubici, prodibit $137639643428\frac{4}{7}$ numerus modiorum in milliari cubico. Per quem itaq; numerum

ſi

ſi dividamus 35184372088832 numerum modiorum in tota mole, prodibit 255⌊62673 numerus milliarium cubicorum. Cum autem Pyramis ſit $\frac{1}{3}$ Parallelepipedi, (ſuper eadem baſe, æque alti;) ſi triplicetur numerus milliarium in expoſita pyramide, habebitur Parallelepipedum ſuper eadem baſe æque altum, nempe 766⌊88019, cujus numeri latus cubicum eſt 9⌊15326. Adeoq; ſummæ triplum, ſuperat corpus cubicum cujus latus 9 milliaria. Et propterea ipſa ſumma (nempe cubi triens) ſuperabit Pyramidem cujus tum longitudo, tum latitudo, tum altitudo, eſt milliarium Anglicanorum 9.

Dum vero in commentario *Alſéphadi*, dicitur æquare Pyramidem longam latam & altam milliaria 60; manifeſtum mendum videtur: vel enim meus me fallit calculus, vel reponendum eſt 6. Cum enim ſtatuitur eorum Ardoba cubito cubico æqualis: Tot erunt in tota mole cubiti cubici, quot Ardobæ; nempe 5864062014805 $\frac{1}{3}$, (nimirum $\frac{1}{6}$ numeri modiorum, ſive Waibarum; ponitur enim Ardoba æqualis ſex Waibis.) Cum itaq; ſtatuitur eorum milliare æquale cubitis 4000; adeoque milliare cubicum, cubitis cubicis 64000000000; Si per hunc numerum dividatur numerus cubitorum cubicorum, ſive Ardobarum, in tota mole pyramidali, prodibit numerus milliariorum cubicorum in pyramide 91⌊62596898 $\frac{1}{2}$; ejuſque triplum 274⌊87-006944 numerus milliarium in Cubo ſuper eadem baſi: cujus latus cubicum eſt 6⌊502 proxime. Adeoque Pyramis (quippe Cubi triens) cujus tum longitudo, tum latitudo, tum altitudo, ſit iſtorum milliarium 6 $\frac{1}{2}$ proxime æquabit totam granorum ſummam Illorum itaque milliaria 6 $\frac{1}{2}$, videntur æquare circiter 9 ex noſtris. Unumque ex eorum milliaribus, æquabit fere unum cum ſemiſſe ex noſtris.

Atque hæc ſunt quæ de Menſuris comparandis, hic loci, dicenda videbantur.

Quo quis autem, de incredibili hoc augmento, minus dubitet; placuit totius operationis proceſſum, ad locum uſq; ſexageſimum quartum continue duplando apponere; termini autem ultimi duplum, unitate minutum, eſt omnium aggregatum: quod, ſiquis dubitet, continue addendo conſtare poterit.

1	1
2	2
4	3
8	4
16	5
32	6
64	7

128	8
256	9
512	10
1024	11
2048	12
4096	13
8192	14
16384	15
32768	16
65536	17
131072	18
262144	19
524288	20
1048576	21
2097152	22
4194304	23
8388608	24
16777216	25
33554432	26
67108864	27
134217728	28
268435456	29
536870912	30
1073741824	31
2147483648	32
4294967296	33
8589934592	34
17179869184	35
34359738368	36
68719476736	37
137438953472	38
274877906944	39
549755813888	40

1099511627776	41
2199023255552	42
4398046511104	43
8796093022208	44
17592186044416	45
35184372088832	46
70368744177664	47
140737488355328	48
281474976710656	49
562949953421312	50
1125899906842624	51
2251799813685248	52
4503599627370496	53
9007199254740992	54
18014398509481984	55
36028797018963968	56
72057594037927936	57
144115188075855872	58
288230376151711744	59
576460752303423488	60
1152921504606846976	61
2305843009213693952	62
4611686018427387904	63
9223372036854775808	64
18446744073709551615	Suinma.

Nota autem, Indices in poſtremo hoc exemplo appoſitos verum locorum ordinem deſignare, nempe ab 1 inchoatos; non autem, diſtantiam a primo, quod faciunt Indices Exſemplorum aliquot præcedentium, inchoati ab o: quod quidem illic factum eſt ob eam quam tradidimus Regulam, de Termino ultimo, vel alio qui aliquanto a Primo diſtet, omiſſis intermediis, inveniendo.

Atq; hactenus de Progreſſione Geometrica hic dictum eſtò. Fuſior autem hujuſce rei tractatio habetur deinceps capite XXXIII. Unde & jam dictorum demonſtrationes ſunt petendæ.

CAP. XXXII.

De Logarithmorum Origine & Uſu.

Logarithmorum Origo. Eſt autem ea, quam ſuperiori capite tradidimus, Regula, (de terminis remotioribus intermediis, quaſi per ſaltum, inveniendis,) maximi quidem momenti Regula: non tam ab eum, quem jam oſtendimus, illius uſum; quam ob inſigniora quæ inde defluxerunt commoda. Ex hoc enim fundamento, dependet, Mirificum illud *Logarithmorum* inventum: Quod inchoavit quidem Nobiliſſimus *Johannes Napperus*, *Merchiſtonii* apud Scotos Baro: perfecit autem & conſummavit, Egregius ille Geometra *Henricus Briggius*, Præceſſor olim meus meritiſſimus, Profeſſorum Geometriæ *Savilianorum* primus; nec hujus tantum ſubſellii, ſed & totius Academæ decus & ornamentum.

Totum, inquam, illud Logarithmorum negotium hoc fundamento nititur. Sunt enim *Logarithmi*, numeri Arithmetice proportionales, totidem Geometrice proportionalium, Indices. Horum autem Indicum, ſive Logarithmorum, ope, per Additionem & Subductionem magna facilitate id perficitur, quod in veris Numeris non niſi per Multiplicationem & Diviſionem faciendum erat. Item, per Bipartitionem, Tripartitionem, Quadripartitionem, &c. id perficitur, quod naturali methodo per Extractionem Radicis Quadraticæ, Cubicæ, Biquadraticæ, &c. perficiendum eſt.

Statuerunt quippe illi, Logarithmorum Magiſtri, (communicatis conſiliis,) numerorum Geometrice proportionalium 1, 10, 100, 1000, &c. Indices, ſive Logarithmos, Arithmetice proportionales, 0, 1, 2, 3, &c. Ad numeros autem iſtis intermedios, his Item intermedios Logarithmos, debita ratione interjectos, aptarunt. Indicibus nempe, ſive Logarithmis, inte-

1	0
10	1
100	2
1000	3
10000	4
100000	5
1000000	6
&c.	&c.

gris

gris, partium decimalium adjectione ita auctis, ut ſingulorum interjectorum numerorum ſedes poſtularunt, ſingulis interjectis numeris ſuos Logarithmos, laborioſo calculo, & indefeſſis vigiliis, inveſtigarunt ad hanc fere formam.

Numeri	Logarithmi	Numeri	Logarithmi.
1	0.00000	500	2.69897
2 ½	0.39794	750	2.87506
5	0.69897	1000	3.00000
7 ½	0.87506	2500	3.39794
10	1.00000	5000	3.69897
25	1.39794	7500	3.87506
50	1.69897	10000	4.00000
75	1.89506	25000	4.39794
100	2.00000	50000	4.69897
250	2.39794	75000	4.87506
		100000	5.00000

Atque eadem methodo omnibus etiam hiſce intermediis numeris, nempe ab 1 ad 100000, aptatos habemus Logarithmos jamjam inveſtigatos, in D. *Briggii Arithmetica Logarithmica* conſpiciendos; nempe ad uſq; centena millia: qui etiam, non magno labore, (ſumptis nempe proportionalibus intermediis) ad uſq; centies millena millia, ſine notabili errore, accommodari poterunt. Sed & ibidem Canones Sinuum, Tangentium, & Secantium, Logarithmice computatos habemus. Quorum omnium fuſiorem traditionem qui poſtulat, tum ibidem quærat, tum in ejuſdem *Trigonometria Britannica*; ab *Henrico Gellibrand*, (Aſtronomiæ in Collegio Greſhamenſi apud Londinenſes tum Profeſſore) edita & aucta.

Logarithmorum uſus; in Multiplicatione.

Logarithmorum autem uſum quod attinet. *Duorum quorumvis, (aut etiam plurium,) Numerorum Logarithmi, ſimul additi, conſtituunt Logarithmum, qui numero ex aſſumptorum numerorum continua multiplicatione facto convenit.* Adeoque invento facti Logarithmo, habetur ipſe numerus factus, ex Canone. Puta ſi numeri 25, Logarithmo 1,39794, adjiciatur numeri 100, Logarithmus 2; horum aggregatum 2 + 1,39749 =

Logar.	Num.
1,39794	25
+2 00000	× 100
3,39794	2500

3,39794, eſt Logarithmus numeri 25 × 100 = 2500. Pariter, ſi numeri 25, logarithmo 1,39794, adjiciatur numeri 75, logarithmus 1,87506; horum aggregatum 3,27300 eſt logarithmus cui in canone convenit numerus 1875.

Logar.	Num.
1,39794	25
× 1,87506	× 75
3,27300	1875

Eodem modo; in continue proportionalibus, 1, 2, 4, &c. cum ad inveniendum locum ſexageſimum quartum, numerus 1, continue multiplicandus eſt in 2 ſexagies & ter; ſi numeri 1 logarithmo 0,00000, adjiciatur numeri 2, logarithmus 0,30103, ſexagies & ter, (hoc eſt, 63 × 0,30103) prodibit 18,96489; cui juxta Canonem Logarithmicũ conveniet numerus 9 2 2 3 3 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0, circiter; vel ſaltem 9223400000000000000; vel potius inter utrumq; : neq; enim in tam vaſtis numeris exſpectandum eſt ut canon Logarithmicus majori ἀκριβείᾳ rem prodat.

In Diviſione. Similiter; *Si ex numeri Dividendi Logarithmo, auferatur Logarithmus Diviſoris, prodibit Logarithmus Quotientis.* Si autem plures continue faciendæ ſint diviſiones; ex propoſiti numeri dividendi Logarithmo, auferendi ſunt Logarithmi omnium continue dividentium. Puta, ſi ex numeri 100, logarithmo 2,00000, auferatur numeri 50 Logarithmus 1,69897; manebit 0,30103 Logarithmus Quotientis 2. Si ex numeri 50 Logarithmõ 1,69897 auferatur 0,69867 logarithmus numeri 5, manebit 1. Logarithmus numeri 10.

Logar.	Num.
2,00000	100 (2
− 1,69897	50
0,30103	
1,69897	50 (10
− 0,69897	5
1,00000	

Item ſi ex numeri 61875 logarithmo 4,79151 auferantur tum 1,39794 logarithmus numeri 25; tum 1,87506 logarithmus numeri 75; (ex canone de promendi) manebit 1,51851 logarithmus numeri 33, duabus diviſionibus per 25 & 75 continue factis provenientis. Et ſimiliter alibi.

Logar.	Num.
4,79151	
− 1,39794	75) $\frac{61875}{25}$ (33
− 1,87506	
1,51851	

In Poteſtatum Geneſi. Atque hinc ſimiliter ſequitur; *Si numeri cujuſvis. Logarithmus dupletur*

dupletur, tripletur, quadrupletur, &c; proveniet Logarithmus *Quadrati, Cubi, Biquadrati,&c. expoſitæ radicis.* Puta numeri 5 logarithmus 0, 69897, triplatus, nempe 2,09691 = 3 × 0,69897 = 0, 69897 + 0, 69897 + 0, 69897, eſt logarithmus numeri 125 = 5 × 5 × 5.

Logar.	Num.
0, 69897	5
+ 0, 69897	× 5
+ 0, 69897	× 5
2, 09691	125

In Ridicum extractione.

Et, vice verſâ; *Si numeri cujuſvis logarithmus fuerit bifariam, trifariam, quadrifariam,&c. diviſus; prodibit logarithmus radicis quadraticæ, cubicæ, biquadraticæ,&c.* Puta 3) 2, 09691 (0, 69897, erit logarithmus numeri 5 = $\sqrt{}^{3}$ 125.

Fractionum Logarithmi.

Quoties autem occurrit numerus minor per majorem dividendus unde oritur numerus fractus, qui unitate minor eſt; prodibit Logarithmus Negativus ſive ablatitius, quippe minor quam 0, 00000 logarithmus unitatis. Puta 3) 2 ($\frac{2}{3}$ numerus, logarithmum poſtulabit — 0, 17609. qui nempe provenit ſubducto logarithmo numeri 3, ex logarithmo numeri 2.

Logar.	Num.
0, 30103	2 ($\frac{2}{1}$
— 0. 47712	3
0, 17609	

Qui plura petit de Logarithmici Canonis ſive Conſtructione ſive uſu, authores adeat ſupra laudatos, Nepperum, Briggium, Gellibrandum, alioſq; qui de hoc negotio ex profeſſo ſcripſerunt. Sufficiat nobis, operationum Logarithmicarum originem & fontem indicaſſe.

CAP. XXXIII.

Progreſſio Geometrica fuſius traditur.

Sicut ſuperius CAP. XXVII & XXVIII, Progreſſionis Arithmeticæ doctrinam fuſius proſecuti ſumus, libet eadem Methodo & Progreſſionem Geometricam aggredi, ſequentibus propoſitionibus explicandam. Quod quò rectius fiat, hæc ſunto quibus ſum uſurus Symbola.

Terminus minimus, quem primum appello, ſit A; maximus, V;

V; extremorum rectangulum $VA = V \times A$; maximi ad minimum ratio $\frac{V}{A}$. Rectangulorum (ipſi VA æqualium) terminis reciproce ſumptis comprehenſorum aggregatum, Z; numerus terminorum, T; communis ratio, R; diſtantia termini cujuſvis a dato, D; ſumma progreſſionis, S. Termini ipſi, a minimo inchoando, dicantur. *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, &c; a maximo vero inchoando, dicantur $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$, &c. Numeros qui cujuſq; termini a primo diſtantiam indicant, *Indices* appello; puta 0, 1, 2, 3, &c. Hjs præmiſſis, ſequuntur propoſitiones.

κ	$R^{9})V$	2	A	*a*	0
ι	$R^{8})V$	6	AR	*b*	1
θ	$R^{7})V$	18	AR^{2}	*c*	2
η	$R^{6})V$	54	AR^{3}	*d*	3
ζ	$R^{5})V$	162	AR^{4}	*e*	4
ϵ	$R^{4})V$	486	AR^{5}	*f*	5
δ	$R^{3})V$	1458	AR^{6}	*g*	6
γ	$R^{2})V$	4374	AR^{7}	*h*	7
β	$R)V$	13122	AR^{8}	*i*	8
α	V	39366	AR^{2}	*k*	9

1. Si ſit $a = A$, erit $b = AR$, $c = AR^{2}$, $d = AR^{3}$, &c. Quilibet enim terminus in communem rationem ductus, producit terminum proxime ſequentem. per def. Progreſſionis Geometricæ.

2. Quilibet ergo terminus producitur ex multiplicatione termini primi in Rationis communis poteſtatem Jndici cognominem; vel (quod idem eſt) cognominem diſtantiæ ipſius a termino primo, ipſum primum non computando. Nempe AR^{d}. Sequitur ex præced.

3. Datis igitur Termino primo ſeu minimo, Ratione communi, & termini quæſiti diſtantia a primo; A, R, D; habetur terminus quæſitus, nempe AR^{d}. per præced. Puta terminus ſextus *f*, cujus index ſive diſtantia a primo 5, fit ex ductu primi in rationis communis poteſtatem 5^{am} diſtantiæ $D = 5$ cognominem. $f = AR^{5}$.

4. Si terminus maximus ſive ultimus ſit V, erit penultimus $\frac{V}{R}$ vel $R)V$; antepenultimus $\frac{V}{R^{2}}$ vel $R^{2})V$; hinc proxime

me minor $R^{3})V$; & ſic deinceps; $V = \alpha$, $R^{1})V = \beta$, $R^{2})V = \gamma$, $R^{3})V = \delta$. &c. Quilibet enim terminus per rationem communem diviſus, dat terminum proxime minorem. per def progr. Geom.

5. Quilibet igitur terminus æqualis eſt, termino maximo per rationis communis poteſtatem diſtantiæ ab ultimo cognominem diviſo. Nempe $R^{d})V$. per præced.

6. Dato ergo termino Maximo, cum Ratione communi, & Diſtantia termini quæſiti a maximo; V, R, D; habetur terminus quæſitus. Puta ſextus a fine, ſive ante ultimum quintus, $\zeta = R^{5})V$. per præced.

7. Dato termino quovis, (ut f) cum ratione communi, & cujuſvis aſſignati majoris diſtantia a dato; f, R, D; invenitur terminus aſſignatus (puta i.) nempe, multiplicando terminum datum in Rationis communis poteſtatem diſtantiæ cognominem. Hoc eſt $i = fR^{d} = fR^{3}$. Nam per def. vel prop. 1. pro ſingulis diſtantiæ gradibus, poteſtas rationis communis unitate augetur; ergo, pro omnibus gradibus, tot unitatibus quot ſunt ipſi diſtantiæ gradus.

8. Dato termino quovis, cum Ratione communi, & cujuſvis aſſignati minoris diſtantia a dato; (puta f, R, D;) invenitur aſſignatus. (ut c.) Nempe dividendo datum per Rationis poteſtatem diſtantiæ cognominem. Puta $R^{d})f = c$, hoc eſt $R^{3})f = c$. Vel $R^{d})\zeta = \iota = R^{3})\zeta$. Sequitur ex def. vel prop. 4.

9. Datâ igitur duorum quorumvis terminorum ab invicem diſtantiâ, cum Ratione communi; D, R; datur eorundem ad invicem ratio. (puta i ad f; vel ζ ad ι) nempe per 7 & 8; majoris ad minorem ratio eſt R^{d}, & hujus reciproca, eſt minoris ad majorem. Puta $\frac{i}{f} = R^{d} = fR$; & ſimiliter $\frac{f}{c} = R^{d} = R^{3}$; vel $\frac{\zeta}{\iota} = R^{d} = R^{3}$;

10. Data vero terminorum quorumvis ad invicem Ratione, cũ eorundem ab invicem diſtantia; (puta i ad f, D) datur communis Ratio. R. Eſt enim (per præced.) datorum terminorum ratio ad invicem, R^{d}, rationis communis poteſtas diſtantiæ cognominis: extracta igitur analogâ radice, habetur communis ratio. Nempe $R = \sqrt[d]{R^{d}}$.

11. Item Data terminorum quorumvis ad invicem ratione; (R^d per prop. 9.) cum ratione communi (R;) datur eorum ab invicem diſtantia. D. Quærendo nempe quota poteſtas R^d ſit ipſius R.

12. Porro; Termini duo quilibet, cum duobus aliis ejuſdem progreſſionis quibuſlibet, in eadem ab invicem diſtantia poſiti; ſunt & in eadem ad invicem ratione conſtituti. Cum enim (per prop. 9.) termini majoris ad minorem ratio ſit R^d; ſi utrobique æqualis ſit tum R, tum D; erit & utrobiq; æqualis R^d, puta (propter æqualem utrobiq; diſtantiam) *i . f : : ζ . ι .*

13. Et contra; Si eadem ſit utrobiq; eorundem majoris ad minorem ratio, eadem eſt & utrobique diſtantia. Nam ſi ſit utrobiq; æqualis tum R, tum R^d; erit & utrobique æqualis D. Puta ſi *i . f : : ζ . ι.* erit & utrobique æqualis diſtantia.

14. Ergo etiam: Si ex terminis quotvis continue proportionalibus, ſeligantur quotlibet in eadem continue ab invicem diſtantia; Puta, ſi *a . b . c . d . e . f . g . h . i . k .* ∺: erunt item tum *a . c . e . g . i .* ∺, tum *b . d . f . h . k .* ∺, tum *a . d . g . k .* ∺, tum *a . e . i .* ∺ continue proportionales: Nam æqualibus continue rationibus progrediuntur per prop. 12.

a . b . c . d . e . f . g . h . i . k . ∺
a .   c .   e .   g .   i . ∺
b .   d .   f .   h .   k . ∺
a .   d .   g .   k . ∺
a .   e .   i . ∺

15. Et contra: ſi ex terminis ita continue proportionalibus ſelecti quotlibet ſint item continue proportionales; æqualibus ab invicem diſtantiis ſumpti ſunt per prop. 13.

16. Data ratione communi, cum numero terminorum; R, T; invenitur extremorum ad invicem ratio. $\frac{V}{A}$. Eſt enim $T - 1 = D$, (extremorum diſtantia, unitate minor quam eſt numerus terminorum.) Ideoq; $\frac{V}{A} = R^d = R^{t-1}$.

17 Et, Data extremorum ratione, cum terminorum numero: $\frac{V}{A}$, T; habetur communis ratio. R. Eſt enim $T - 1 = D$; & $\frac{V}{A} = R^d$: Ergo (extracta radice analoga) $\sqrt[d]{\frac{V}{A}} = \sqrt[d]{R^d} = R$.

18 Et, Data extremorum ratione, cum ratione communi; $\frac{V}{A}$, R; habetur numerus terminorum T. Cum enim $\frac{V}{A} = R^d$: quærendo quota poteſtas eſt $\frac{V}{A}$ vel R^d, ipſius R, habetur extremorum

tremorum diſtantia D; adeoque & $T = D + 1$.

19 Dato termino primo, cum ratione communi, & numero terminorum; A, R, T; habetur ultimus. V. Cum enim, per prop: 16. $\frac{V}{A} = R^d$. Erit $AR^d = A \times \frac{V}{A} = V$.

Nota interim, ob commodiorem notationem, tum hic tum poſtea, pro $T - 1$, poni D, vel *d*.

20 Dato termino ultimo, cum ratione communi, & numero terminorum; V, R, T; habetur primus A. Nam (propter $R^d = \frac{V}{A}$) erit $R^d) V = \frac{V}{A}) V = A$.

21 Continue proportionalium; ſi duorum quorumvis rectangulum per terminum primum dividatur, prodibit terminus cujus index (ſive diſtantia a primo) æquatur illorum indicibus ſimul ſumptis. Sit enim, verbi gratia, terminorem invicem multiplicatorum unius index *m*, alterius *n*: erunt ergo termini illi AR^m & AR^n; per prop. 2. horum ergo rectangulum $AR^m \times AR^n = A^2 R^{m+n}$, quod, per A diviſum, exhibet AR^{m+n}, hoc eſt (per prop: 2.) terminum illum cujus index eſt $m + n$, indicum illorum aggregato æqualis.

$$A)\ \begin{array}{l} ARRR = AR^3 \\ \times ARR = AR^2 \end{array}$$

$$\frac{AARRRRR = A^2R^5}{A} = AR^5$$

22 Eodem modo; Si termini tres, quatuor, quinque, aut plures, continue multiplicentur, productum tot vicibus unâ minus diviſum per terminum primum (ſive ea primi poteſtate diviſum quæ uno gradu minor eſt quam numerus terminorum ſic continue multiplicatorum,) exhibet terminum cujus index illorum indicum aggregato æquatur. Puta, ſi continue multiplicatorum indices ſint *l*, *m*, *n*, termini erunt AR^l, AR^m, AR^n, qui invicem ducti facient $AAAR^{l+m+n}$; quodſi dividantur per AA, vel A^2, prodibit AR^{l+m+n}, terminus nempe cujus index $l + m + n$. per prop: 2.

23 Si itaque continue proportionalium primus terminus ſit 1; (quod in tabulis *Logarithmicis* ponitur;) duobus, pluribuſve, continue multiplicatis, proveniet terminus cujus index illorum indicum aggregato æquatur. Sequitur ex prop. 21, & 22, Quia nempe quæ illic imperatur diviſio per terminum primum (ſive ſemel ſive ſæpius facienda) hoc caſu (cum pri-

mus terminus ponitur 1,) nihil immutabit. Nam $1 \times 1 \times 1 \times R = 1 \times 1 \times R = 1 \times R$.

24 Item; numerorum ab 1 continue proportionalium; erit quilibet terminus, ipſa poteſtas rationis communis, quæ termini illius indici eſt cognominis. per prop. 2. Nam ſi $A = 1$, erit $AR^d = 1\,R^d = R^d$.

Atq; hinc pendet Regula de Multiplicatione Logarithmica; Nempe, *Datorum numerorum Logarithmi ſimul additi, æquantur Logarithmo numeri ex datorum invicem multiplicatorum producti.* per pr. 23. Sunt enim Logarithmi, numerorum ab 1 continue proportionalium Indices.

25 Continue proportionalium; ſi duorum alter per alterum dividatur, & quotiens in terminum primum ducatur; prodibit terminus cujus index æquatur differentiæ indicum terminorum expoſitorum. Sit majoris index $m + n$, minoris m, adeoque eorum differentia n; erunt per pr. 2. ipſi termini AR^{m+n}, & AR^m; facta itaque diviſione, $AR^m) AR^{m+n} (R^n$, ſi quotiens ducatur in A, habetur AR^n, terminus cujus index n per pr. 2.

26 Si itaque continue proportionalium primus terminus ſit 1; quotiens cujuſvis termini per quemvis alium diviſi, eſt ipſe terminus cujus index æquatur illorum indicum differentiæ: (Intelligo, exceſſui indicis diviſi ſupra indicem dividentis; & propterea ſi hic major fuerit, quotientis index erit negativus.) ſequitur ex præced. quia ſi $A = 1$ erit $R^n = AR^n$.

27 Item; numerorum ab 1 continue proportionalium; ſi alter per alterum dividatur, erit quotiens, ipſa poteſtas rationis communis, differentiæ indicum datorum numerorum cognominis. nempe R^n. per præced.

Atque hinc pendet Regula Diviſionis Logarithmicæ. Nempe *Si ex Logarithmo Dividendi auferatur Logarithmus Diviſoris, quod reliquum eſt, eſt Logarithmus Quotientis.* Quippe Logarithmi ſunt numerorum ab 1 continue proportionalium indices.

Aliæ propoſitiones de operationibus Logarithmicis; puta, de extractione Radicis Quadraticæ, per bipartitionem Logarithmi; & Cubicæ, per ejuſdem tripartitionem, &c. aliæque conſimiles ex propoſitionibus jam traditis dependent. Nec opus erit illis fuſius explicandis jam immorari, ne nimis digreſſi videamur. Sufficit digito fontem indicaſſe.

28 In quantitatum continue proportionalium quotcunque progreſſione; Quod fit ex ductu termini primi in ultimum, æquatur facto ex mutuo ductu duorum quorumvis terminorum ab extremis æqualiter utrinq; remotorum. Vel, Rectangulum ſub extremis, æquatur rectangulo ſub duobus quibuſlibet intermediis ab extremis utrinq; æqualiter diſtantibus. (Intellige; quorum unus tot præciſe gradibus ab uno extremo, quot reliquus a reliquo, diſtat.) Cum enim ſit terminorum alter AR^d, per pr. 2. alter $R^d)V$, per pr. 5. ſitque diſtantia D utrobique eadem; erit rectangulum $R^d)V \times AR^d = VA = VA = a\alpha = b\beta = c\gamma = d\delta$ &c. Atque hæc ſunt illa rectangula quorum omnium aggregatum Symbolo Z deſignatum volumus; Et quæ ſimpliciter *Rectangulorum aggregatum* deinceps appellabimus.

29 Sin terminus omnium medius ab utroq; extremo æqualiter diſtet, (quod tum continget quum terminorum numerus eſt impar;) Quadratum medii æquatur extremorum rectangulo. Nam propter $R^d)V = M = AR^d$, (& diſtantiam D utrobiq; æqualem,) erit $R^d)V \times AR^d = M \times M = Mq$.

30 Similiter, In quatuor terminis utut diſcontinuè proportionalibus, Rectangulum extremorum æquatur rectangulo mediorum. Puta A . M :: N . V. Cum enim (propter æqualem utrobique rationem) ſit $AR = M$, & $NR = V$, adeoque $R)V = N$; erit $N \times M = R)V \times AR = VA$. Atque hinc ſequitur Regula quæ dicitur *Aurea*, ſive *Regula Trium*. Nempe

31 Quatuor ergo proportionalium, datis tribus quibuſlibet, datur & reliquus. Cum enim ſit, per præced. $A \times V = M \times N$, erit (æqualiter utrinque dividendo) $V = \frac{MN}{A}$. $A = \frac{MN}{V}$. $M = \frac{AV}{N}$. $N = \frac{AV}{M}$. Eſtq; hæc Regula Infiniti pene uſûs per totam Matheſin, ideoque merito *Aurea* dicta.

Datis.	Datur.
A) M × N (	V
V) M × N (	A
M) A × V (	N
N) A × V (	M

32 Ex tribus autem continue proportionalibus, Rectangulum extremorum æquatur quadrato medii. Puta A . M . V . ∺. Nam, propter æqualem utrobique rationem, eſt $AR = M$, &

$MR = V$; ergo $R)V = M$· Ideoque $R)V \times AR = M \times M = Mq$.

33 Trium ergo continue proportionalium, datis duobus quibuſvis, datur & reliquus. Cum enim, per præced. $AV = Mq$. Erit $A)Mq(V$, & $V)Mq(A$, & $\sqrt{AV} = \sqrt{Mq} = M$.

Datis	Datur.
A)Mq(V	
V)Mq(A	
√AV = M	

34 Atque idem valet de tribus quatuorve terminis progreſſionis continuæ, utut non immediate proximis, modo æqualibus intervallis diſtantibus. Puta ſi *a.b.c.d.e.f g.* ∺ erit $ae = c^2$; nam & *a.c.e* ∺ per 14. Item $af = cd$; & $de = bg$; & ſic alibi. Nam *a.c::d.f.* vel *a.d::c.f.* & *b.d::e.g.* vel *b.e::d.g.* &c. per 12.

35 Sed & præcedentium aliquot converſæ pariter demonſtrantur. Puta converſa prop. 28. In continue proportionalibus, (excepta tantum æqualium progreſſione, ut 1. 1. 1. 1. &c. ∺, quæ & deinceps aliquoties excepta intelligatur;) ſi duorum terminorum intermediorum rectangulum rectangulo extremorum æquetur; ſunt illi ab extremis æqualiter utrinque remoti. (hoc eſt, quot gradibus eorum alteruter ab alterutro extremorum diſtat, tot & reliquus a reliquo.) Puta, ſi ſint *a.b.c.d.e.f.g.* ∺, ſitque $ce = ag$; totidem gradibus diſtant *a, c*, atque *e, g*; item *a, e*, atq; *c, g*. Cum enim duorum *c, e*, alter ſit $a\,R^d$, alter $R^d)\,g$; adeoque $R^d\,)\,g \times a\,R^d = (ce =)\,ag$; æqualis erit utrobique R^d (ut diviſio & multiplicatio ſe mutuo deſtruant) adeoque & diſtantia D utrobique æqualis. per pr. 13.

36. Et converſa Prop. 29. Si continue proportionalium, intermedii alicujus quadratum æquetur rectangulo extremorum; æqualiter ille ab utroque extremo diſtat. Probatur ut præcedens.

37. Item converſa Prop. 32. Si unius termini quadratum æquetur duorum rectangulo, erit ille medius inter hos Geometricus. Si enim $AV = Mq = MM$, Erit (æqualiter utrinque dividendo) $A = \frac{MM}{V}$ & $\frac{A}{M} = \frac{M}{V}$. Ergo A. M. V ∺

38. Similiter & converſa Prop. 30. Si ex terminis quatuor, duorum rectangulum rectangulo reliquorum æque-

tur;

tur; ſunt illi quatuor proportionales. Puta, Si $AV = MN$, erit (æqualiter utrinque dividendo) $A = \frac{MN}{V}$, & $\frac{A}{M} = \frac{N}{V}$ vel etiam $\frac{A}{N} = \frac{M}{V}$; hoc eſt A. M :: N. V. & A. N :: M. V

Item, quia, ut prius, $AV = MN$, erit $\frac{MN}{A} = V$, & $\frac{M}{A} = \frac{V}{N}$, vel etiam $\frac{N}{A} = \frac{V}{M}$: hoc eſt M. A :: V. N. & N. A :: V. M. Nam ſingulis his modis proportio concluditur.

39. Hinc ſequitur; Si quatuor termini ſint proportionales, ſunt & inverſe (ἀνάπαλιν) proportionales. Puta ſi A. M :: N. V. Erit (per pr. 30.) $AV = MN$; ideoque, (ut oſtenſum eſt, Prop. præced.) M. A :: V. N.

40. Item; ſi quatuor termini ſint proportionales, ſunt & alterne (permutatim, viciſſim. ἐναλλάξ,) proportionales. Puta ſi A. M :: N. V. adeoq; $AV = MN$, erit A. N :: M. V, eſt oſtenſum pr. 38. Item, N. A :: M. V. ut ibid. Et Pr. 39.

41. Porro, ſi quatuor proportionalium vel primus & tertius, vel ſecundus & quartus, æqualiter vel multiplicentur vel dividantur, manent adhuc proportionales. Puta ſi A. M :: N. V, hoc eſt A. AR :: N. NR; (ubi communis ratio eſt R;) erit & A. MB :: N. VB, hoc eſt A. ARB :: N. NRB. (ubi communis ratio eſt RB) Item. A. B)M :: N. B)V. hoc eſt A. B)RA :: N. B)RN. ubi communis ratio eſt B)R. Similiter ſi A. M :: N. V. hoc eſt R)M. M :: R)V. V. erit B)A : M :: B)N. V. hoc eſt BR)M. M :: BR, V. V &c. Vel ſic. Si $\frac{A}{M} = \frac{N}{V}$ tum $\frac{A}{M}B = \frac{N}{V}B$, & $B)\frac{A}{M} = B)\frac{N}{V}$. Sive (quod tantundem eſt) $\frac{AB}{M} = \frac{NB}{V}$, & $\frac{A}{BM} = \frac{N}{BV}$.

Vel etiam $C)\frac{A}{M}B = C)\frac{N}{V}B$, ſive $\frac{AB}{CM} = \frac{NB}{CV}$, ſive AB. CM :: NB. CV. &c.

42. Item, ſi proportionales fuerint tum $A . M :: N . V .$ tum $\alpha . \mu :: \nu . \upsilon .$ tum $a . m :: n . u .$ (tum, ſi placet, quaterni plures quotlibet;) erunt item tum facti, tum dividendo orti, (terminis reſpective ſumptis) termini proportionales. Eſto enim in primis ratio R, in ſecundis ρ, in tertiis r. Adeoque $A . M = AR :: N . V = NR$, Item $\alpha . \mu = \alpha\rho :: \nu . \upsilon = \nu\rho$. Et $a . m = ar :: n . u = nr$. Ergo (per Prop. 41.) $A\alpha a . M\mu m = AR\alpha\rho ar :: N\nu n . V\upsilon u = NR\nu\rho nr$. hoc eſt $A\alpha a . A\alpha a R\rho r :: N\nu n . N\nu n R\rho r$. ubi communis ratio eſt $R\rho r$. Pariter & $\frac{A\alpha}{a} . \frac{M\mu}{m} = \frac{A\alpha R\rho}{ar} :: \frac{N\nu}{n} . \frac{V\upsilon}{u} = \frac{N\nu R\rho}{nr}$. ſive $a)A\alpha . ar)A\alpha R\rho :: a)N\nu . nr)N\nu R\rho$, ubi communis utrobique ratio eſt $\frac{R}{r}\rho$ vel $r)R\rho$. Vel ſic

$$\begin{array}{cccc}
A . & M = AR :: & N . & V = NR . \\
\alpha . & \mu = \alpha\rho :: & \nu . & \upsilon = \nu\rho . \\
a . & m = ar :: & n . & u = nr . \\
\hline
A\alpha a . & M\mu m = A\alpha a R\rho r & :: N\nu n . & V\upsilon u = N\nu n R\rho r . \\
\frac{A\alpha}{a} . & \frac{M\mu}{m} = \frac{A\alpha R\rho}{ar} & :: \frac{N\nu}{n} . & \frac{V\upsilon}{u} = \frac{N\nu R\rho}{nr} .
\end{array}$$

43. Sed & idem obtinet in continue proportionalibus: Quod ſimiliter probandum erit. Puta,

Si $A . B . C . D . E$ ∺ vel $A . AR . AR^2 . AR^3 . AR^4$ ∺

Et $\alpha . \beta . \gamma . \delta . \varepsilon$ ∺ vel $\alpha . \alpha\rho . \alpha\rho^2 . \alpha\rho^3 . \alpha\rho^4$ ∺

Erunt $A\alpha . B\beta . C\gamma . D\delta . E\varepsilon$ ∺ vel $A\alpha . A\alpha R\rho . A\alpha R^2\rho^2 . A\alpha R^3\rho^3 . A\alpha R^4\rho^4$ ∺

Et $\frac{A}{\alpha} . \frac{B}{\beta} . \frac{C}{\gamma} . \frac{D}{\delta} . \frac{E}{\varepsilon}$ ∺ vel $\frac{A}{\alpha} . \frac{AR}{\alpha\rho} . \frac{AR^2}{\alpha\rho^2} . \frac{AR^3}{\alpha\rho^3} . \frac{AR^4}{\alpha\rho^4}$ ∺

44. Et quidem, licet altera progreſſio creſcens fuerit altera decreſcens. Ut ſi tum $A . AR . AR^2 . AR^3 . AR^4 .$ ∺ tum $\alpha . \rho)\alpha . \rho^2)\alpha . \rho^3)\alpha . \rho^4)\alpha .$ ∺ erit etiam $A\alpha . \rho)\alpha AR . \rho^2)$

$\varrho^{2})\alpha AR^{2}.\ \varrho^{3})\ \alpha AR^{3}.\ \varrho^{4})\alpha AR^{4}.$ ∺ ut patet, quippe communis ratio eſt $\varrho\ )R$.

Atque hujuſmodi complures proportionalium immutationes & comparationes facile eſſet tum comminiſci tum demonſtrare. Verum illud haud eſt neceſſe, ſed cujuſlibet potius arbitrio permittendum, ut id, prout opus fuerit, pro re nata curet, ſuiſque uſibus accommodet. Quæ autem huc ſpectant non pauca deinceps, ubi Euclidis Elementum quintum explicaturus ſum, tradentur.

45. In continue proportionalibus extremorum Rectangulum ductum in numerum terminorum, æquatur aggregato Rectangulorum omniũ æqualiũ (ſenſu quo pr. 28) cũ enim per pr. 28. ſit $VA = a\alpha = b\beta = c\gamma = d\delta = e\varepsilon$ &c. ſintq; hæc totidem quot termini; (nam ſinguli termini ordine directo ſumpti in reſpectivos terminos ordinis retrogradi duci ſupponuntur; adeoque tot erunt rectangula quot termini;) erit $T\,VA = a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta + e\varepsilon$ &c.

Notandum autem eſt rectangulum $a\alpha$, & $k\varkappa$, (ſi nempe k ponatur terminus ultimus) & in reliquis ſimiliter, revera idem eſſe rectangulum (nam a & $\varkappa$, item α & k, ſunt idem terminus,) ſed cum id non ſtatim appareat, atque aliis item de cauſis, commodius putavimus tanquam ſi eſſent diſtincta bis numerare; adeoque tot reputare rectangula quot ſunt termini:) cum tamen ſi $a\alpha$ & $k\varkappa$ (& ſimiliter de reliquis) pro eodem habeamus rectangulo, erit numerus rectangulorum diverſorum $\frac{1}{2}$ T, ubi termini ſunt numero pares; at $\frac{1}{2}$ T $+ \frac{1}{2}$, ubi numero impares; nam hoc caſu, ne noſtro quidem computo quadratum medii bis ponitur. Quod monuiſſe ſufficiat. Nos itaque priorem loquendi formulam potius ſelegimus: quo ſenſu & deinceps loqui intelligamur.

46. Idem valet in quatuor diſcontinue proportionalibus. Puta A.M :: N.V. Nam $AV + MN + NM + VA = 4VA$ Per P. 30.

47. Dato itaque in continue proportionalibus quotlibet, extremorum rectangulo, & numero terminorum VA, T; datur Rectangulorum aggregatum. Z. Nempe $Z = T\,VA$. per Prop. 45.

48. Item dato extremorum rectangulo, & rectangulorum Aggregato; VA, Z; datur numerus terminorum. T. Nam, quia $Z = T\,VA$, erit $VA)Z = T$.

49. Et Dato numero terminorum, cum rectangulorum aggregato; T, Z; datur rectangulum extremorum. VA. Cum enim ſit Z = T VA. erit T) Z = VA.

50. Datis numero terminorum, rectangulorum aggregato, & termino minimo; T, Z, A; datur maximus. V. Nam per præced. T) Z = VA. Ergo A T) Z = V.

51. Datis iiſdem; datur extremorum ad invicem ratio. $\frac{V}{A}$. Nam per præced. A T) Z = V. Ergo A^2 T) Z = $\frac{V}{A}$.

52. Datis numero terminorum, rectangulorum aggregato, & termino maximo; T, Z V; datur minimus. A. Nam per Prop. 49. T) Z = VA. Ergo VT) Z = A.

53. Datis iiſdem; datur extremorum ratio. $\frac{V}{A}$. Nam, per præced. V T) Z = A. Ergo $\frac{V}{A} = \frac{V}{VT)Z} = \frac{V^2 T}{Z}$. Vel etiam Z) V^2 T ($\frac{V}{A}$. vel V^2 T. Z: : V. A.

54. Datis extremorum tum ratione, tum rectangulo $\frac{V}{A}$, VA; datur terminus minimus A. Nam $\frac{V}{A}$) VA (A^2. Cujus radix, A.

55. Datis iiſdem; datur terminus maximus. V. Nam VA × $\frac{V}{A}$ = V^2. Ergo $\surd$: VA × $\frac{V}{A}$: = V.

56. Datis extremis (vel eorundem ratione, & rectangulo) cum communi ratione; $\frac{V}{A}$, VA, R; habetur rectangulorum aggregatum. Z. Nam per Prop. 18. habetur T. ergo et (per Prop. 47.) Z = T VA.

57. Datis extremis (vel eorundem ratione & rectangulo,) cum rectangulorum aggregato; $\frac{V}{A}$, VA, Z; habetur communis ratio. R. Nam per prop. 48. habetur T; ergo & R. per Prop. 17.

58. Datis termino minimo, numero terminorum, & ratione communi; A, T, R; datur rectangulorum aggregatum. Z. Nam per Pr. 19. V = A R^d. Ergo per Pr. 47. T V A = Z = T A^2 R^d. (per *d* intellige T − 1.0)

59. Datis termino minimo, numero terminorum, & rectangulorum aggregato; A, T, Z; datur ratio communis.

R

R. Nam per Prop. 51. habetur $\frac{V}{A} = \frac{Z}{A^2 T}$. Ergo per Pr. 17.

$R = \sqrt{d}\ \frac{Z}{A^2 T}$.

60 Datis termino maximo, numero terminorum, & communi ratione; V, T, R; datur rectangulorum aggregatum. Z. Nam per Prop. 20. $A = R^d)V$. Ergo per Prop. 47. $TVA = Z = R^d)TV^2$.

61. Datis termino maximo, numero terminorum, & rectangulorum aggregato; V, T, Z; datur communis ratio. R. Nam, per Prop. 53. $\frac{V}{A} = Z)V^2T$. Ergo per Prop. 17. $R = \sqrt{d}\ \frac{V^2 T}{Z}$.

62 Datis numero terminorum, ratione communi, & Rectangulorum aggregato; T, R, Z; datur terminus minimus. A. Nam per pr. 16. $\frac{V}{A} = R^d$. Et per pr. 49. $T)Z = VA$. Ergo per pr. 54. $TR^d)Z = \frac{V}{A})VA = A^2$. Ideoque $A = \sqrt{\frac{Z}{TR^d}}$.

63 Datis iiſdem; datur terminus maximus. V. Nam per 16 & 49 habentur $\frac{V}{A}$ & VA, ut prius. Ergo per 55. $V = \sqrt{:}VA \times \frac{V}{A}: = \sqrt{\frac{ZR^d}{T}}$.

64 Datis termino minimo, ratione communi, & rectangulorum aggregato; A, R, Z; invenitur terminorum numerus T. Nam per pr. 45. $Z = TVA$. adeoque $A)Z = TV$. Item per pr. 19. $V = AR^d$. adeoq; (cum ſit $D + 1 = T$) erit $RV = ARR^d = AR^t$. Et $RVT = TAR^t = A)ZR$. (quia nempe $A)Z = TV$.) Ideoque $TR^t = A^2)ZR$. Quærendum igitur, quota poteſtas datæ rationis communis R, ducta in ſuum indicem ſive exponentem poteſtatis, æquabitur quantitati datæ $A^2)ZR$. quippe poteſtatis iſtius index ſive exponens eſt T, numerus terminorum.

65 Iiſdem datis; reperitur terminus maximus, V. nam per præced. habetur T. adeoque V per pr. 19.

66 Datis termino maximo, ratione communi, & rectangulorum aggregato; V, R, Z; invenitur numerus terminorum, T. Eſt enim per pr. 45. $Z = TVA$. adeoque $V)Z = TA$. Item per pr. 20. $A = R^d)V$, adeoque $R)A = R^t)V$. Et $R)AT =$

$R^t)VT = RV)Z$. Et $R^t)T = RV^2)Z$. Quærendum igitur quota poteſtas datæ rationis communis R, ſuam denominationem dividens, exhibebit quantitatem datam $RV^2)Z$. quippe poteſtatis iſtius exponens ſive index eſt T, numerus terminorum quæſitus. Vel etiam (nam eodem recidit) mutatis ſedibus, $T)R^t = Z)RV^2$. Ut quærendum ſit, quota poteſtas datæ rationis communis, per ſuum indicem ſive exponentem diviſa, exhibebit quantitatem cognitam $Z)RV^2$. quippe poteſtatis iſtius exponens eſt T, quæſitus numerus terminorum.

67 Datis iiſdem, reperitur terminus minimus, A. nam per præced. habetur T. adeoq; A, per pr. 20.

Atque hæ quidem propoſitiones omnes hactenus traditæ, reſpondent totidem propoſitionibus Cap. XXVII. de Progreſſione Arithmetica; ſinguli ſingulis eodem ordine.

Sequitur Theorema, quo, in Geometricæ progreſſionis ſumma inveſtigandâ, utuntur fere omnes Arithmetici. Nempe

68 Si terminus maximus in communem rationem ducatur, & ex producto auferatur terminus minimus, reſiduumque per rationem communem unitate minutam dividatur; quotiens exhibet progreſſionis totius ſummã. Hoc eſt, $\frac{VR - A}{R - 1} = S$.

Quis hanc primus invenerit regulam, aut quibus mediis, ego plane ignoro; & quidem, utut ea pleriq; utantur, non memini tamen me illam uſpiam demonſtratam vidiſſe; cum tamen vel maxime demonſtratione indigeat. Nobis itaque hanc libuit demonſtrati comminiſci.

Cum ſit, per pr. 19. $V = AR^d$, adeoque (propter $T = D+1$) $VR = AR^t$; & propterea $\frac{VR - A}{R - 1} = \frac{AR^t - A}{R - 1}$. Facta diviſione quantitatis $AR^t - A$, per quantitatem $R - 1$, (eo modo quo ſupra oſtendimus dum diviſionem Symbolicam docuimus,) quotientis loco prodibit ſeries expoſita $A + AR + AR^2$ &c. hoc eſt, quantitas S, ſive terminorum omnium ſumma.

Exſempli gratia. Ponamus numerum terminorum $T = 4$. adeoque $AR^t = AR^4$. Et dividenda proponatur $AR^4 - A$, per $R - 1$. Cum igitur ſit $R)AR^4(AR^3$; Erit quotientis membrum primum AR^3, quod in diviſorem ductum dat $AR^4 - AR^3$. hoc ex dividendo ſubductum relinquit $AR^3 - A$.

Deinde

Deinde, cum ſit $R)\,AR^3\,(AR^2$: erit quotientis membrum ſecundũ $+AR^2$ quod ductum in diviſorẽ dat $AR^3 - AR^2$. hoc ex dividendo ſubductum relinquit $AR^2 - A$. Eodem modo, quotientis membrum tertium erit $+AR$. adeoque

$$
\begin{array}{l}
R-1)\,AR^4 - A\,(AR^3 + AR^2 + AR + A \\
\quad AR^4 - AR^3 \\
\hline
\quad AR^3 - A \\
\quad AR^3 - AR^2 \\
\hline
\quad AR^2 - A \\
\quad AR^2 - AR \\
\hline
\quad AR - A \\
\quad AR - A \\
\hline
\quad 00 \quad 0
\end{array}
$$

facta tum multiplicatione tum ſubductione, manebit $AR - A$. Denique quotientis membrum quartum, eodem modo repertum, eſt $+A$. Et peracta tum multiplicatione tum ſubductione ut prius, nihil reſtabit. Totaque operatione ſic peracta, habetur quotiens $\frac{AR^4 - A}{R-1} = AR^3 + AR^2 + AR + A = S$. Et ſimiliter continget quantuſcunque ponatur numerus terminorum; nempe quotiens ſingulos exhibebit. Adeoq; univerſaliter $\frac{VR - A}{R-1} = \frac{AR^t - A}{R-1} = A + AR + AR^2$ &c. $= S$. quod erat demonſtrandum.

Id ipſum pariter oſtendetur, ſi juxta prop. 20. exponamus $A = Rd)V$. adeoq; $\frac{VR - A}{R-1} = \frac{VR - Rd)V}{R-1} = \frac{VR^t - V}{R^t - R^d}$

$V + \frac{V}{R} + \frac{V}{R^2} + \frac{V}{R^3}$ &c $= S$. ut ex adjuncta diviſionis operatione manifeſtum eſt.

$$
\begin{array}{l}
R^4 - R^3)\,VR^4 - V\,(V + \frac{V}{R} + \frac{V}{R^2} + \frac{V}{R^3} \\
\quad VR^4 - VR^3 \\
\hline
\quad VR^3 - V \\
\quad VR^3 - VR^2 \\
\hline
\quad VR^2 - V \\
\quad VR^2 - VR \\
\hline
\quad VR - V \\
\quad VR - V \\
\hline
\quad 00 \quad 0
\end{array}
$$

Libet autem aliam methodum, ſummam pro-

progreſſionis Geometricæ colligendi, ex D. Oughtredo adjungere, poſtquam hoc lemma oſtendero. Nempe

69 Si ſint quotlibet termini proportionales; erit ut unus antecedentium ad ſuum conſequentem, ſic antecedentium omnium aggregatum, ad aggregatum omnium conſequentium. (quæ eſt 12 e 5.) Puta ſi $A . \alpha :: B . \beta :: C . \gamma :: D . \delta$. &c. hoc eſt $A . RA :: B . RB :: C . RC :: D . RD$. &c. Erit $A . \alpha :: A + B + C + D$ &c. $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ &c. hoc eſt $A . RA :: A + B + C + D$ &c. $RA + RB + RC + RD$ &c. propter communem utrobiq; rationem communem R.

70 Ideoque; In continue proportionalibus, ut terminus primus, ad ſecundum, (hoc eſt, ut 1 ad rationem communem R;) ſic ſumma terminorum omnium præter ultimum, ad ſummam omnium præter primam. Puta ſi $A . B . C . D . V$ ∺ hoc eſt $A . B :: B . C :: C . D :: D . V$. Erunt $A + B + C + D = S - V$, omnes antecedentes; & $B + C + D + V = S - A$, omnes conſequentes. Ergo per præced. $A . B (:: 1 . R) :: S - V . S - A$.

71. Et conſequenter; Si ex rectangulo ſecundi & ultimi, auferatur quadratum primi; reſiduumque dividatur per terminum ſecundum dempto primo; prodibit ſumma terminorum omnium. Cum enim per præced. ſit $A . B :: S - V . S - A$. adeoque per pr. 30. $SB - VB = SA - Aq$, & tranſponendo, $SB - SA = VB - Aq$. Erit (utrinque dividendo)

$$S = \frac{VB - Aq}{B - A}.$$

Sed & ex eodem lemmate demonſtratur Prop. 68. cum enim ſit per Prop. 70. $S - V . S - A :: (A . B :: A . AR ::) 1 . R$. adeoque per prop. 30. $SR - VR = S - A$. Et tranſponendo. $SR - S = VR - A$: erit (utrinque dividendo)

$$S = \frac{VR - A}{R - 1}.$$

Vel ſic, per præſentem, $S = \frac{VB - Aq}{B - A} = \frac{VAR - Aq}{AR - A} = \frac{VR - A}{R - 1}.$

72. Datis igitur extremis & ratione communi; A, V, R, habetur terminorum omnium ſumma S. Nempe $S = \frac{VR - A}{R - 1}$. per Prop. 68. vel 71.

73. Idem habetur, ſi, pro extremis A, V, darentur A, VA. Nempe $S = \frac{A)VA\,R - A}{R - 1}$. Nam $A)VA = V$.

74. Vel A, $\frac{V}{A}$: Nempe $S = \frac{\frac{V}{A}A\,R - A}{R - 1}$. Nam $\frac{V}{A}A = V$.

75. Vel V, VA. Nempe $S = \frac{VR - V)VA}{R - 1}$. Nam $V)VA = A$.

76. Vel V, $\frac{V}{A}$. Nempe $S = \frac{VR - \frac{V}{A})V}{R - 1}$. Nam $\frac{V}{A})V = A$.

77. Vel denique VA, $\frac{V}{A}$. Nempe $S = \frac{R\sqrt{\frac{V}{A}}VA - \sqrt{:}\,\frac{V}{A})VA}{R - 1}$. Nam $\frac{V}{A}VA = V^2$. Et $\frac{V}{A})VA = A^2$.

78. Et, datis extremis, cum terminorum omnium ſumma; A, V, S; habetur communis ratio. R. Nam per Prop. 68, vel 72. $S = \frac{VR - A}{R - 1}$. hoc eſt, $SR - S = VR - A$; adeoque $SR - VR = S - A$, & $\frac{S - A}{S - V} = R$. Vel brevius; per Prop 70. $\frac{S - A}{S - V} = \frac{B}{A} = \frac{R}{1} = R$.

79. Idem habetur, ſi, pro *A*, V, darentur *A*, VA Nempe $R = \frac{S - A}{S - A)VA}$.

80. Vel, *A*, $\frac{V}{A}$. Nempe $R = \frac{S - A}{S - \frac{V}{A}A}$.

81. Vel V, VA. Nempe $R = \frac{S - V)VA}{S - V}$.

82. Vel, V, $\frac{V}{A}$. Nempe $R = \frac{S - \frac{V}{A})V}{S - V}$

83. Vel denique, VA, $\frac{V}{A}$. Nempe $R = \frac{S - \sqrt{:}\,\frac{V}{A})VA}{S - \sqrt{\frac{V}{A}}VA}$.

84

84. Item, datis termino minimo, ratione communi, & terminorum omnium ſumma; A, R, S; datur maximus. V. Nam (ut in Prop. 78.) $SR - S = VR - A$. Ergo $SR - S + A = VR$, & $\frac{SR - S + A}{R} = V$.

85. Et, datis termino maximo, ratione communi, & terminorum omniũ ſumma; V, R, S; datur minimus. A. Cum enim (ut in præced.) $SR - S + A = VR$; erit (tranſponendo) $VR - SR + S = A$.

86. Item, datis termino minimo, ratione communi, & terminorum numero; A, R, T; datur terminorum omnium ſumma. S. Nam, per Pr. 19. $V = AR^d$, & $VR = AR^t$; Ergo per Prop. 68. $S = \frac{VR - A}{R - 1} = \frac{AR^t - A}{R - 1}$.

87. Et, datis termino minimo, ratione communi, & progreſſionis ſumma; A, R, S; datur numerus terminorũm. T. Eſt enim (ut in Prop. 84.) $SR - S + A = VR = AR^t$ (per P. 19.) Adeoque $\frac{SR - S + A}{A} = R^t$. Quærendum igitur quota poteſtas rationis communis R, æquatur quantitati cognitæ $\frac{SR - S + A.}{A}$

88 Et, Datis termino minimo, progreſſionis ſumma, & numero terminorum; A, S, T; datur communis ratio. R. Nam (ut in præced.) $SR - S + A = AR^t$. adeoque $SR - AR^t = S - A$. Et $\frac{S - A}{A} = \frac{S}{A} R - R^t$. Cujus æquationis radix eſt R, communis ratio quæſita.

89 Et datis Ratione communi, numero terminorum, & ſumma progreſſionis; R, T, S; datur terminus minimus. A. Cum enim (ut in præced.) $SR - S + A = AR^t$. adeoq; $SR - S = AR^t - A$. Erit $A = \frac{SR - S}{R^t - 1} = \frac{R - 1}{R^t - 1} S$.

90 Pari modo; Dato termino maximo, cum ratione cõmuni, & numero terminorum; V, R, T; datur ſumma progreſſionis. S. Nam per pr. 20. $A = R^d)V$. Ergo per pr. 68. $S = \frac{VR - A}{R - 1} = \frac{VR - R^d)V}{R - 1} = \frac{VR^t - V}{R^t - R^d.}$

91 Et; Dato termino maximo, cum ratione communi, & progreſſionis ſumma; V, R, S: datur numerus terminorum. T. Nam per pr. 85. $A = VR + S - SR$; adeoque per pr. 16. $\frac{V}{VR + S - SR} = \frac{V}{A} = R^d$. Quærendum itaque quota poteſtas datæ rationis R, æquatur datæ quantitati. quippe iſtius poteſtatis index unitate auctus, eſt quæſitus numerus terminorum $T = D + 1$.

92 Et; Datis termino maximo, progreſſionis ſumma, & numero terminorum; V, S, T; datur communis ratio. R. Eſt enim, per pr. 90. $S = \frac{VR^t - V}{R^t - R^d}$, adeoq; $SR^t - SR^d = VR^t - V$, & $V = SR^d - SR^t + VR^t$, & $\frac{V}{S - V} = \frac{S}{S - V} R^d - R^t$. Cujus Æquationis radix R, eſt communis ratio quæſita.

93 Et, Datis ratione communi, numero terminorum, & progreſſionis ſumma; R, T, S; datur terminus maximus. V. Eſt enim, (ut in præced.) $SR^t - SR^d = VR^t - V$. Ergo $\frac{SR^t - SR^d}{R^t - 1} = V$.

94 Porro; (ut compendio utar,) Datis A, V, S; datur T. Nam, per pr. 78. $\frac{S - A}{S - V} = R$. Et, per pr. 18 $\frac{V}{A} = R^d$. Quærendum itaque, quota poteſtas R cognitæ, æquatur cognitæ R^d, ut habeatur $D = T - 1$, adeoq; $D + 1 = T$.

95 Idem habetur, ſi pro A, V, darentur A, VA. Nam habetur *R*, per pr. 79. Et T ut prius.

96 Vel A, $\frac{V}{A}$. Nam habetur *R*, per pr. 80. & T, ut prius.

97 *V*el V, VA. Nam habetur *R*, pr. 81. & T, ut prius.

98 *V*el V, $\frac{V}{A}$. nempe *R*, per pr. 82. & T, ut prius.

99 *V*el denique VA, $\frac{V}{A}$. Nempe *R*, per pr. 83. Et T, ut prius.

100 Datis A, V, T, datur S. Nam per pr. 17. habetur $R = \sqrt{d}\,\frac{V}{A}$. Ergo per pr. 68. $\frac{V\sqrt{d}\,\frac{V}{A} - A}{\sqrt{d}\,\frac{V}{A} - 1} = S$.

101 Idem habetur, ſi, pro A, V, darentur *A*, VA Nempe

$\frac{A)\mathrm{VA}\sqrt{d}:A^2)\mathrm{VA}:-A}{\sqrt{d}:A^2)\mathrm{VA}:-1} = S.$ Nam $A)\mathrm{VA}(_{,}V.$ Et $A^2)\mathrm{VA}(\frac{V}{A}.$

102 *Vel* A, $\frac{V}{A}$. Nempe $\frac{\frac{V}{A}A\sqrt{d}\frac{V}{A}:-A}{\sqrt{d}\frac{V}{A}:-1} = S.$ Nam $\frac{V}{A}A = V.$

103 *Vel* V, VA. Nempe $\frac{V\sqrt{d}:\mathrm{VA})V^2:-V)\mathrm{VA}}{\sqrt{d}:\mathrm{VA})V^2:-1} = S.$ Nam $\mathrm{VA})V^2(\frac{V}{A}.$ Et $V)\mathrm{VA}(A.$

104 *Vel* V, $\frac{V}{A}$. Nempe $\frac{V\sqrt{d}\frac{V}{A}-V)\mathrm{VA}}{\sqrt{d}\frac{V}{A}-1} = S.$ Nam $V)\mathrm{VA}(A.$

105 *Vel* denique VA, $\frac{V}{A}$. Nempe $\frac{\sqrt{d}\frac{V}{A}\sqrt{:}\frac{V}{A}\mathrm{VA}:-\sqrt{:}\frac{V}{A})\mathrm{VA}:}{\sqrt{d}\frac{V}{A}-1}$ $= S.$ Nam $\sqrt{:}\frac{V}{A}\mathrm{VA}: = V.$ Et $\sqrt{:}\frac{V}{A})\mathrm{VA}: = A.$

106 Datis *A*, T, *S*; datur *V*. Nam habetur R, per pr. 88. adeoque *V*, per pr. 19.

107 Datis *V*, T, *S*; datur A. Nam habetur *R*, per pr. 92. Et *A*, per pr. 20.

108 Datis A, V, Z: datur S. Nam per pr. 48. habetur $T = \mathrm{VA})Z$. Et deinde S per pr. 100.

109 Idem habetur, ſi pro A, V, dentur A, VA. per prop. 48, 101.

110 vel A, $\frac{V}{A}$. per pr. 48, 102.

111 vel V, VA. per pr. 48, 103.

112 vel V, $\frac{V}{A}$. per pr. 48, 104.

113 vel VA, $\frac{V}{A}$. per pr. 48, 105.

114 Datis A, V, S; datur Z. Nam per prop. 78. habetur $R = \frac{S-A}{S-V}$. adeoq; Z per pr. 56.

115 Idem habetur, ſi, pro A, V, dentur. A, VA, per pr. 79, 56.

116 vel A, $\frac{V}{A}$. per pr. 80, 56.

117 vel V, VA, per pr. 81, 56.

118 vel V, $\frac{V}{A}$, per pr. 82, 56.

119 vel denique VA, $\frac{V}{A}$. per pr. 83, 56.

120 Datis A, R, Z; datur S. Quippe habetur T, per pr 64. & deinde S, per pr. 86.

121 Datis A, R, S; datur Z. Nam per prop. 84. habetur V. adeoq; Z per pr. 56.

122 Datis A, T, Z; datur S Nam per pr. 59. habetur R, adeoq; S per pr. 86.

123 Datis A, T, S; datur Z. Nempe R per pr. 88. adeoque Z per pr. 58.

124 Datis V, R, Z; datur S. Nempe T per pr. 66. adeoque S per pr. 90.

125 Datis V, R, S; datur Z. Nempe A per pr. 85. & Z per pr. 58.

126 Datis V, T, Z; datur S. Nempe R per pr. 61. & S per pr. 90.

127 Datis V, T, S; datur Z. Nempe R per pr. 92. & Z per pr. 60.

128 Datis R, T, VA; datur A. Nempe $\frac{V}{A}$ per pr. 16. & A per pr. 54.

129 Datis iiſdem; datur V. Nempe $\frac{V}{A}$ per pr. 16. & V per pr. 55.

130 Datis iiſdem; datur S. Nempe A per pr. 128. & S per pr. 86.

131 Datis VA, R, Z; datur A. Nempe T per pr. 48, & A per pr. 128.

132 Datis iiſdem; datur V. Nempe T ut prius. & V per pr 129.

133 Datis iiſdem; datur S. Nempe T, ut prius. & S per pr. 130.

134 Datis VA, R, S; datur A. Eſt enim per pr. 68. R $-$ 1) VR $-$ A (S. ideoque SR $-$ S $=$ VR $-$ A. Et SRA $-$ SA $=$ VAR $-$ A². adeoque $A^2 + SRA - SA = VAR$. Cujus æquationis radix eſt A $=$

$$= \frac{\sqrt{: S^2R^2 - 2S^2R + S^2 + 4VAR :} - SR + S}{2}.$$

135 Datis iiſdem; datur V. Nam (ut in præced.) SR $-$ S $=$ VR $-$ A. adeoque SRV $-$ SV $=$ V²R $-$ VA. Et VA $=$ RV² $-$ SRV $+$ SV. Et R) VA $=$ V² $-$ SV $+$ R) SV. Cujus æquationis radix eſt V $=$

$$= \frac{\sqrt{: S^2R^2 - 2S^2R + S^2 + 4VAR :} + SR - S.}{2R}$$

136 Datis iiſdem; datur T. Nempe per pr. 134, habetur A; adeoq; T per pr. 87.

137 Datis iiſdem, datur Z. Nempe per præced. habetur T; adeoq; Z per pr. 47.

138 Datis $\frac{V}{A}$, R, Z; datur A. Nam per pr. 18. habetur T; adeoque A per pr. 62.

139 Datis iiſdem; datur V. Nempe T ut in præced. & V per pr. 63.

140 Datis iiſdem, datur S. nempe A & V per duas præcedentes, adeoq; S per pr. 72.

141 Datis $\frac{V}{A}$, R, S; datur A. Nam per pr. 18. habetur T. adeoque A per pr. 89.

142 Datis iiſdem; datur V. Nempe T ut in præced. & V per pr. 93.

143 Datis iiſdem; datur Z. Nempe T ut prius, & A, V, per duas præcedentes; & tandem Z per pr. 47.

144 Datis $\frac{V}{A}$, T, Z; datur A. Nam habetur R per pr. 17. & VA per pr. 49. adeoq; A per pr. 54.

145 Datis iiſdem; datur V. nempe VA ut in præced. adeoq; V per pr. 55.

146 Datis iiſdem; datur S. Nempe inventis R per pr. 17. & A, V, per duas præcedentes; habetur S per pr. 72,

147 Datis $\frac{V}{A}$, T, S: datur A. Nempe habetur R per pr. 17; adeoq; A per pr. 89.

148 Datis iiſdem; datur V. Nempe R ut prius; & V per pr. 93.

149 Datis iiſdem; datur Z. Nempe inventis A, V, per duas præcedentes, habetur Z per pr. 47.

150 Datis R, T, Z; datur *S*. Nempe A per pr. 62. adeoq; *S* per pr. 86.

151 Datis R, T, *S*; datur Z. Nempe A & V per pr. 89 & 93. adeoq; Z per pr. 47.

Atque hactenus Progreſſionem Geometricam fuſius explicavimus; & Problemata, pleraq; ſaltem, eo ſpectantia expedivimus. Libet autem ſequente capite (quod de Progreſſione Arithmetica ſupra factum eſt cap. XXVIII.) in breviorem ſynopſin, quæ jam tradidimus, præcipua problemata compingere.

CAP.

CAP. XXXIV.

Progreſſionis Geometricæ brevior Synopſis.

QUæ in præcedente Capite fuſius tradimus, de Progreſſione Geometrica, Problemata; libet his in breviorem formam, ſed & alio ordine, redigere: Retentis tamen iiſdem quibus ibidem uſi ſumus *Symbolis.*

Theoremata.

1	$D = T - 1.$
2	$V = AR^d.$
3	$A = \frac{V}{R^d}.$
4	$Z = TVA = TA^2R^d = \frac{TV^2}{R^d}$
5	$S = \frac{VR - A}{R - 1} = \frac{AR^t - A}{R - 1}$
	$= \frac{R^t - 1}{R - 1} A = \frac{VR - : R^d)V}{R - 1}$
	$= \frac{VR^t - V}{R^t - R^d} = \frac{R^t - 1}{R^t - R^d} V.$
6	$A = \frac{R - 1}{R^t - 1} S.$
7	$V = \frac{R^t - R^d}{R^t - 1} S.$
8	$SR - S = VR - A.$
9	$R = \frac{S - A}{S - V}.$
10	$A = VR + S - SR.$
11	$VR = AR^t = A + SR - S.$
12	$V = \frac{A + SR - S.}{R}$
13	$SR^t - SR^d = VR^t - V.$
14	$V = SR^d - SR^t + VR^t$
15	$\frac{V}{S - V} = \frac{S}{S - V} R^d \cdot R^t.$

Problemata.

Data.	Quæſita.
1	$A, V : VA = VA.$
2	$\frac{V}{A} = A)V.$
3	$A, VA : V = A)VA.$
	$\frac{V}{A}$ per 2.
4	$A, \frac{V}{A} : V = \frac{V}{A} A.$
	VA per 1.
5	$V, VA : A = V)VA.$
	$\frac{V}{A}$ per 2.
6	$V, \frac{V}{A} : A = \frac{V}{A})V.$
	VA per 1.
7	$VA, \frac{V}{A} : A^2 = \frac{V}{A})VA.$
8	$V^2 = \frac{V}{A} VA.$

9

	Data	Quæſita.
9	T, R :	$\frac{V}{A}$
10	T, $\frac{V}{A}$:	R.
11	$\frac{V}{A}$, R :	T.
		Nam $\frac{V}{A}$ = Rd
12	VA, T :	Z = T VA.
13	VA, Z :	T = VA) Z.
14	T, Z :	VA = T) Z.
15	A, V, R :	S = $\frac{VR - A}{R - 1}$
		VA . per 1.
		$\frac{V}{A}$. per 2.
		T . per 11.
		Z . per 12.
16	A, V, T :	VA . per 1
		$\frac{V}{A}$. per 2
		R . per 10
		Z . per 12
		S . per 15
17	A, V, Z :	VA . per 1
		$\frac{V}{A}$. per 2
		T . per 13
		R . per 10
		S . per 15
18	A, V, S :	VA, per 1
		$\frac{V}{A}$. per 2
		R = $\frac{S - A}{S - V}$
		T . per 11
		Z . per 12
19	A, VA, R :	V, per 3
		$\frac{V}{A}$. per 2
		T . per 11
		Z . per 12
		S . per 15

	Data.	Quæſita.
20	A, VA, T :	V, per 3
		$\frac{V}{A}$. per 2
		R . per 10
		Z . per 12
		S . per 15
21	A, VA, Z :	V, per 3
		$\frac{V}{A}$. per 2
		T . per 13
		R . per 10
		S . per 15
22	A, VA, S :	V, per 3
		$\frac{V}{A}$. per 2
		R . per 18
		T . per 11
		Z . per 12
23	A, $\frac{V}{A}$, R :	V . per 4
		VA . per 1
		T . per 11
		Z . per 12
		S . per 15
24	A, $\frac{V}{A}$, T :	V, per 4
		VA . per 1
		R . per 10
		Z . per 12
		S . per 15
25	A, $\frac{V}{A}$, Z :	V, per 4
		VA . per 1
		T . per 13
		R . per 10
		S . per 15
26	A, $\frac{V}{A}$, S :	V, per 4
		VA per 1
		R per 18
		T . per 11
		Z . per 12

27

	Data	Quæſita.
27	V, VΛ, R :	A, per 5
		$\frac{V}{\Lambda}$. per 2
		T. per 11
		Z. per 12
		S. per 15
28	V, VΛ, T :	A, per 5
		$\frac{V}{\Lambda}$. per 2
		R. per 10
		Z. per 12
		S. per 15
29	V, VΛ, Z :	A, per 5
		$\frac{V}{\Lambda}$: per 2
		T. per 13
		R: per 10
		S. per 15
30	V, VΛ, S :	A, per 5
		$\frac{V}{\Lambda}$. per 2
		R. per 18
		T. per 11
		Z. per 12
31	V, $\frac{V}{\Lambda}$, R :	A, per 6
		VΛ. per 1
		T. per 11
		Z. per 12
		S. per 15
32	V, $\frac{V}{\Lambda}$, T :	A, per 6
		VΛ. per 1
		R. per 10
		Z. per 12
		S. per 15
33	V, $\frac{V}{\Lambda}$, Z :	A, per 6
		VΛ. per 1
		T. per 13
		R. per 10
		S. per 15
34	V, $\frac{V}{\Lambda}$, S :	A, per 6
		VΛ. per 1
		R. per 18
		T. per 11
		Z. per 12
35	VΛ, $\frac{V}{\Lambda}$, R :	A, per 7
		V. per 8
		T. per 11
		Z. per 12
		S. per 15
36	VΛ, $\frac{V}{\Lambda}$, T :	A, per 7
		V. per 8
		R. per 10
		Z. per 12
		S. per 15
37	VΛ, $\frac{V}{\Lambda}$, Z :	A, per 7
		V. per 8
		T. per 13
		R. per 10
		S. per 15
38	VΛ, $\frac{V}{\Lambda}$, S :	A, per 7
		V. per 8
		R. per 18
		T. per 11
		Z. per 12
39	A, R, T :	V = ARd
		VΛ, per 1
		$\frac{V}{\Lambda}$. per 2
		Z. per 12
		S. per 15
40	A, R, Z : T.	
	Nam A²)ZR = TRᶜ.	
		V. per 39
		VΛ. per 1
		$\frac{V}{\Lambda}$. per 2
		S. per 15

41

	Data	Quæſita.
41	A, R, S:	$V = \frac{A + SR - S}{R}$.
		VA. per 1
		$\frac{V}{A}$. per 2
		T. per 11
		Z. per 12
42	A, T, Z:	V = AT)Z.
		VA. per 1
		$\frac{V}{A}$. per 2
		R. per 10
		S. per 15
43	A, T, S:	R.
		Nam $R^t = \frac{RS - S + A}{A}$.
		V: per 39
		VA. per 1
		$\frac{V}{A}$: per 2
		Z. per 12
44	V, R, T:	$A = R^d$)V.
		VA. per 1
		$\frac{V}{A}$. per 2
		Z. per 12
		S. per 15
45	V, R, Z:	T.
		Nam $R^d \frac{T}{} = \frac{Z}{V^z}$.
		A. per 44
		VA. per 1
		$\frac{V}{A}$. per 2
		S. per 15
46	V, R, S:	A = VR + S - SR.
		VA. per 1
		$\frac{V}{A}$. per 2
		T. per 11
		Z. per 12

	Data.	Quæſita.
47	V, T, Z:	VA, per 14
		A. per 5
		$\frac{V}{A}$. per 2
		R. per 10
		S. per 15
48	V, T, S:	R. Nam
		$\frac{V}{S - V} = \frac{S}{S - V} R^d. R^t$.
		A. per 44
		VA. per 1
		$\frac{V}{A}$. per 2
		Z. per 12
49	R, T, Z:	$\frac{V}{A}$, per 9
		VA. per 14
		A. per 7
		V. per 8
		S. per 15
50	R, T, S:	$\frac{V}{A}$, per 9
		$A = \frac{R - 1}{R^t - 1} S$.
		V. per 4
		VA. per 1
		Z. per 12
51	VA, R, T:	$\frac{V}{A}$, per 9
		A. per 7
		V. per 8
		Z. per 12
		S. per 15
52	VA, R, Z:	T, per 13
		$\frac{V}{A}$. per 9
		A. per 7
		V. per 8
		S. per 15

	Data.	Quæſita.
53	VA, R, S :	A. Nam $A^2 + SRA - SA = VAR$.
		V, per 3
		$\frac{V}{A}$. per 2
		T. per 9
		Z. per 12
54	$\frac{V}{A}$, R, Z:	T. per 11
		VA per 14
		A. per 7
		V. per 8
		S. per 15
55	$\frac{V}{A}$, R, S :	T, per 11
		A. per 50
		V. per 4
		VA. per 1
		Z. per 12
56	$\frac{V}{A}$, T, Z :	R, per 10
		VA. per 14
		A. per 7
		V. per 8
		S. per 15
57	$\frac{V}{A}$, T, S :	R, per 10
		A. per 50
		V. per 4
		VA. per 1
		Z. per 12

Reliqui fere caſus, parum aut nihil pandunt, ultra quod datum eſt.

CAP. XXXV.

Euclidis Elementum quintum Arithmeticè demonſtratur,

PRiuſquam Rationum doctrinam dimittam, libet & Euclidis Elementum quintum, quod de Rationibus & proportionibus agit breviter explicare. Cujus quidem utilitas in tota paſſim Matheſi, nemini vel leviter exercitato non innoteſcit.

Eſt autem illud Elementum quintum, ut & tota rationum Doctrina, Arithmetica potius quam Geometrica, (ſaltem prout Arithmetices fines nunc Dierum ampliari ſolent, ut non ſolos numeros integros, ſed & fractos, & ſurdos recipiant, totamque Algebræ, & Arithmeticæ, ut loquuntur, Specioſæ vel Symbolicæ praxin.) Quid quod & ipſa Arithmetica tota, ſi intimius ſpectetur, vix aliud videatur quam Rationum doctrina. Ipſique Numeri rationum totidem indicia quarum communis conſequens eſt 1, Unitas, Ubi enim 1, ſive Unitas, habetur pro *quantitatè expoſita*; reliqui omnes numeri (ſive integri, ſive

fracti, ſive etiam ſurdi) ſunt rationum totidem aliarum ad expoſitam quantitatem indices ſive exponentes.

Cur autem Lineis potius quam numeris rationum doctrinam tradere maluerint veteres; cauſa fuit non una. Partim ſcilicet, quod illi, vix alios numeros quam Integros admiſerint; (nec enim materiam Arithmeticam ſicut Geometricam, in infinitum diviſibilem admiſerunt, ſed in unitate ſiſtendum voluere;) adeoque non pariter numeris atque Lineis rationes omnes denotari poſſe perſpexerint; Et propterea doctrinæ alioqui univerſalis, ſpecimen ſaltem in lineis tradere maluerunt, eamque prout opus fuerit, inde in aliam quamvis materiam rationum capacem pro re nata transferre. Maxime autem uti mihi ſaltem videtur, quia non modo methodus Symbolica nondum obtinuerat, ſed ne quidem figuræ numerariæ, quæ jam paſſim uſitatæ ſunt, ab Indis inventæ, fuerunt introductæ; ut non niſi difficulter admodum numerorum praxin exercere valuerint. Licet revera, ipſa ſive linearum, ſive planarum, vel etiam ſolidarum, aliarumve quantitatum, literis alphabeticis deſignatio, (puta A, B, &c. quibus deſignantur in textu anguli lineæve &c. in ſchemate conſpecta,) ſymbolica deſignatio non minus dici poterit quam ubi ſimilibus ſymbolis qnantitates (non tam in charta conſpectæ, quam) mente conceptæ indicantur.

Utut fuerit; nihil impedit quin nos, ut reliquam Rationum doctrinam, ita ſpeciatim totum illud quod Elemento quinto de rationibus traditur, Arithmetice (adeoque ſimpliciter & Univerſaliter) tradamus, quod ut opus fuerit (ſicut & Arithmetica univerſa) cuivis ſubjecto poterit applicari.

Definitiones autem quas illic præmiſſas habemus, hic libet intactas tranſire; quoniam illæ, partim ſuperius, Cap. XXV, XXIX, XXX, explicantur, partim etiam cum ipſa propoſitionum traditione, ubi opus fuerit, obiter exponentur.

Id ſaltem monendum erit de definitione 5ª, ſive juxta Clavium 6ª, quæ eſt *magnitudinum*, ſive quantitatum, *in eadem ratione* conſtitutarum: quam Euclides his verbis effert, Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι, πρῶτον πρὸς δεύτερον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον· ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια, τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων, καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν, ἑκάτερον ἑκατέρου, ἢ ἅμα ἐλλείπῃ, ἢ ἅμα ἴσα ᾖ, ἢ ἅμα ὑπερέχῃ ληφθέντα κατάλ-

κατάλληλα. In eadem ratione magnitudines eſſe dicuntur, prima ad ſecundam & tertia ad quartam, quando primæ & tertiæ æque multiplices, ſecundæ & quartæ æque multiplices, juxta quamvis multiplicationem, utraq; utramq; vel unà ſuperant, vel unà æquales ſunt, vel unà deficiunt, inter ſe comparatæ. Nos hanc definitionem, quamvis veram quidem & Euclidis ſuſcepto ſatis accommodam, in noſtris demonſtrationibus omittendam duximus; neq; ad hoc *κριτήριον* proportionalia examinamus. Quippe quod perplexius videtur, nec adeo forſan, tyronibus præſertim, perſpicuum. Nec quidem tam proportionalium naturam immediate reſpicit, quam eorundem affectionem aliquam ſatis remotam. Nobis autem, qui Rationes ſuperius docuimus *Quoto* æſtimandas, ad rationum ſive æqualitatem ſive identitatem probandam ſufficere videtur, ſi fuerit æqualitas ſive identitas quotorum. Puta ſi ſit $\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta}$, eſt & $a . \alpha :: b . \beta$. Et contra. Quod nobis erit, definitionis loco, ejuſdem æqualiſve rationis. Ubi autem quotus major eſt, ibi & major ratio; ubi minor, minor. Puta, ſi $\frac{a}{\alpha} > \frac{b}{\beta}$, erit illa ratio major; ſi $\frac{a}{\alpha} < \frac{b}{\beta}$, hæc major erit, illa minor. Siquis tamen mallet affectionis alicujus opem in auxilium advocare, quo demonſtrationes commodius procedant; ego nullam potiorem novi quam quæ a nobis prop. 30
Cap. XXXIII demonſtrata eſt; Et quidem (ſpeciatim de lineis) ab ipſo Euclide 16 e 6. Nempe *Si quatuor quantitates fuerint proportionales, factum ab extremis æquatur facto a mediis; & contra.* Puta ſi $A . \alpha :: B . \beta$; erit $A\beta = \alpha B$, & contra, Quod ſic oſtenditur. Cum ſit $A . \alpha :: B\beta$. hoc eſt $\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta}$, erit (æqualiter utrinq; multiplicando) $A = \frac{\alpha B}{\beta}$ & $A\beta = \alpha B$. Contra vero; ſi $A\beta = \alpha B$, erit (æqualiter utrinq; dividendo) $A = \frac{\alpha B}{\beta}$ & $\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta}$, hoc eſt, $A . \alpha :: B . \beta$ Atque ex hoc *Lemmate*, facilius quam ex illa Euclidis definitione memorata, demonſtrari

 poſſent

poſſent omnes illæ propoſitiones ubi illam adhibet Euclides: quod itaque non incommode pro illa Euclidis definitione ſubſtitui poterit,

His præmonitis, Propoſitiones aggredior: poſtquam monuero, quod, pro *Magnitudinibus* (de quibus ſolis agit Euclides), nos ſimpliciter *Quantitates* ubiq; ſubſtituimus. Quippe de quantitatibus aliis non minus procedunt tum propoſitiones tum demonſtrationes quam de magnitudinibus.

1 *Si fuerint quotcunq; quantitates, quotcunq; quantitatum ſigillatim æque multiplæ; quotupla eſt una unius, totuplæ erunt & omnes omnium.* Puta ſi $A = M\alpha$, $B = M\beta$, $C = M\gamma$, &c. Erunt $A + B + C$ &c. $= (M\alpha + M\beta + M\gamma$ &c.$)$ $= M$ in $\alpha + \beta + \gamma$ &c, ut multiplicando patebit. Idem igitur eſt communis multiplicator M, quod erat probandum. Hic idem demonſtratur univerſaliter pr. 12. de ratione qualibet, non minus quam multiplici.

$$\begin{array}{c} \alpha+\beta+\gamma \\ M \\ \hline M\alpha+M\beta+M\gamma \end{array}$$

2. *Si prima ſecundæ æque multipla fuerit, & tertia quartæ,* $(A = M\alpha$. $B = M\beta,)$ *ſitq; quinta ſecundæ æquemultipla ac ſexta quartæ;* $(C = N\alpha$, $D = N\beta$:$)$ *erunt item prima & quinta ſimul, ſecundæ; atque tertia & ſexta ſimul, quartæ, æque multiplices.* Nempe $A + C = M\alpha + N\alpha$, $= M + N$: in α. & $B + D = M\beta + N\beta = M + N$: in β Communis itaque utrobique multiplicator, $M + N$. Idem oſtenditur in quacunque ratione, utut non multiplici. prop. 24.

3. *Si fuerit prima ſecundæ æquemultipla atque tertia quartæ,* $(A = M\alpha$, $B = M\beta,)$ *& ſumantur æque multiplices primæ & tertiæ* (NA, NB; hoc eſt $NM\alpha$, $NM\beta$,) *erunt & æque multiplices, illa ſecundæ, atque hæc quartæ.* Quippe utrobique eſt NM communis multiplicator. Eſtque hæc una ſpecies argumentationis *ex æquo,* ſive *ex æquali,* δι' ἴσου.

4. *Si prima ad ſecundam, eandem habeat rationem, atque tertia ad quartam,* $(A . \alpha :: B . \beta.)$ *Eandem item rationem habebunt æque multiplices primæ & tertiæ ad æquemultiplices ſecundæ & quartæ, juxta quamlibet multiplicationem, reſpective ſumptæ.* Puta $AM . \alpha\mu ::$ $BM . \beta\mu$. $A, \alpha :: B . \beta$. hoc eſt $\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta}$; erit, æqualiter utrinq;

trinque multiplicando ($\frac{A}{\alpha} \times M$, vel) $\frac{AM}{\alpha} = (\frac{B}{\beta} \times M$ vel) $\frac{BM}{\beta}$; &, æqualiter utrinque dividendo μ) $\frac{AM}{\alpha}$ vel $\frac{AM}{\alpha\mu} = \mu) \frac{BM}{\beta}$ vel $\frac{BM}{\beta\mu}$. adeoque $AM.\alpha\mu :: BM.\beta\mu$. Quod erat demonſtrandum. Vel brevius, per Lemma noſtrum, Si $A.\alpha :: B.\beta$, erit ($A\beta = \alpha B$, adeoque $A\beta M\mu = \alpha BM\mu$ vel $AM\beta\mu = \alpha\mu BM$, & propterea) $AM.\alpha\mu :: BM.\beta\mu$.

Euclides Corollarium, hoc (ut in demonſtrationis ſuæ curriculo demonſtratum) adjungit; *Si quatuor quantitates proportionales ſint, ſunt & inverſe* (ἀνάπαλιν) *proportionales.* Hoc eſt, ſi $A.\alpha :: B.\beta$. erit $\alpha.A :: \beta.B$. (Præterquam quod ex ſe videtur manifeſtum, puta ſi utrobique eadem ſit Relatorum ad correlata, eadem erit & correlatorum ad illa, reſpective ſumpta, relatio: vel, verbi gratiâ, ſi quoties A continet α, toties & B contineat β; vice verſa, quoties α continetur in A, toties & β in B.) Sequitur directe ex lemmate noſtro. Sive enim A β ſint extremæ, & αB mediæ; ſive hæ extremæ, & illæ mediæ; erit utroque modo, ſi utrovis, $A\beta = \alpha B$; adeoque utrobique proportionalitas.

Hæc argumentatio ab Euclide definitur 13 d 5 (juxta Clavium;) *Inverſa ratio eſt ſumptio conſequentis, ceu antecedentis, ad antecedentem velut ad conſequentem.*

5. *Si quantitas quantitatis æque multipla ſit, atq; ablata ablatæ; erit & reliqua reliquæ æque multipla atq; tota totius.* Puta ſi $A + B = M$: in $\alpha + \beta$: $= M\alpha + M\beta$, ſitque $A = M\alpha$ erit & $B = M\beta$. Nam, propter æqualia æqualibus ablata, erunt & reliqua æqualia. Idem univerſaliter oſtenditur pr. 19. de quacunq; ratione, utut non multiplici.

$$A + B = M\alpha + M\beta$$
$$\text{mi: } A = M\alpha$$
$$B = M\beta$$

6. *Si duæ quantitates* (A + B, & C + D,) *ſint duarum quantitatum* (α, & V,) *æque multiplæ,* (puta per M + μ,) *ſintque ablatæ quædam* (A, C,) *earundem* (α, γ,) *æque multiplæ,* (puta per M:) *erunt & reliquæ* (B, D,) *vel ejuſdem æquales* (ſi nempe μ per 1) *vel ipſarum*

ipſarum æque multiplæ; (nempe per μ) Propter æqualia æqualibus ablata; ut patet.

$$A + B = M\alpha + \mu\alpha \qquad C + D = M\gamma + \mu\gamma$$
$$-A = M\alpha \qquad -C = M\gamma$$
$$B = \mu\alpha \qquad D = \mu\gamma$$

7 *Æquales ad eandem, eandem habent rationem, & eadem ad æquales.* Puta ſi $A = B$, erit (æqualiter dividendo) $\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\alpha}$, adeoque $A . \alpha :: B . \alpha$. Item $\frac{\alpha}{A} = \frac{\alpha}{B}$, adeoque $\alpha . A :: \alpha . B$; Vel ſic (ſi opus) per lemma noſtrum; Quia ſi $A = B$ erit & $A\alpha = \alpha B$.

8. *Inæqualium major ad eandem, majorem habet rationem quam minor. Et eadem ad minorem, majorem habet rationem quam ad majorem.* Nam $\frac{A + E}{\alpha}$ $(= \frac{A}{\alpha} + \frac{E}{\alpha} > \frac{A}{\alpha}$. Item $\frac{\alpha}{A + E} < \frac{\alpha}{A}$. Quippe creſcente Dividendo creſcit quotus, ſed creſcente Diviſore, minuitur.

9. *Quæ ad eandem eandem habent rationem, ſunt inter ſe æquales: & ad quas eadem eandem habet rationem, ipſæ item æquales ſunt.* Nam, ſi $\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\alpha}$, erunt (multiplicando per α) $B = A$. Item, ſi $\frac{\alpha}{A} = \frac{\alpha}{B}$ adeoque (per coroll. pr. 4.) $\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\alpha}$, erunt & $A = B$, ut prius. Vel, per lemma noſtrum, ſi $A . \alpha :: B . \alpha$. vel $\alpha . A :: \alpha . B$. erit $A\alpha = \alpha B$, adeoq; $A = B$.

10. *Quantitatum rationem ad eandem habentium, quæ majorem habet rationem eſt major; ad quam vero eadem majorem habet rationem, illa minor eſt.* Nam ſi $\frac{A}{B}$ major quam $\frac{\alpha}{B}$, puta æqualis $\frac{\alpha + \epsilon}{B}$; erit, æqualiter multiplicando, $A (= \alpha + \epsilon) > \alpha$. Item, ſi $\frac{B}{A}$ minor ſit quam $\frac{B}{\alpha}$, puta æqualis $\frac{B}{\alpha + \epsilon}$ (per pr. 8.) erit per cor. pr. 4. $\frac{A}{B} = \frac{\alpha + \epsilon}{B}$, adeoque $A > \alpha$.

11 *Quæ eidem eædem ſunt rationes, inter ſe ſunt eædem.* Nam ſi $\frac{A}{\alpha}=\frac{B}{\beta}=\frac{C}{\gamma}$ erit $\frac{A}{\alpha}=\frac{C}{\gamma}$

12. *Si ſint quotcunque quantitates proportionales; ut eſt una antecedentium ad ſuam conſequentem, ita & omnes antecedentes ad omnes conſequentes.* Eſto $\frac{A}{\alpha}=\frac{B}{\beta}=\frac{C}{\gamma}$ &c. $=$ R. Erit igitur A $=$ Rα B $=$ Rβ, C $=$ Rγ &c. adeoq; A + B + C &c. $=$ Rα + Rβ + Rγ &c. $=$ R in $\alpha+\beta+\gamma$ &c. Ideoque (æqualiter dividendo) $\frac{A+B+C\ \&c.}{\alpha+\beta+\gamma\ \&c.} = R = \frac{A}{\alpha}$. Vel ſic A . RA :: A + B + C &c. (R in A + B + C &c $=$) RA + RB + RC &c. ut patet. Aut per lemma noſtrum, quia A in RA + RB + RC &c $=$ (ARA + ARB + ARC &c $=$) RA in A + B + C &c, Eſt autem hæc univerſalis propoſitio ad prop. 1. Quod enim illic oſtenditur ſpeciatim de Ratione multipla; hic oſtenditur univerſaliter de qualibet ratione.

13. *Si prima* A, *ad ſecundam* α, *eandem habeat rationem quam tertia* B, *ad quartam* β; *tertia autem ad quartam majorem habeat rationem quam quinta* C *ad ſextam* γ: *habebit & prima ad ſecundam majorem rationem quam quinta ad ſextam.* Nam $\frac{A}{\alpha}(=\frac{B}{\beta}) > \frac{C}{\gamma}$. Vel ſic, $\frac{B}{\beta}(> \frac{C}{\gamma}) = \frac{C+E}{\gamma} = \frac{A}{\alpha} > \frac{C}{\gamma}$.

14. *Si prima ad ſecundam eandem habeat rationem, quam tertia ad quartam, ſitq; prima major quam tertia; & ſecunda quam quarta major erit: ſi æqualis, æqualis; ſi minor, minor.* Eſto $\frac{A}{\alpha}=\frac{B}{\beta}$. Si autem A $>$ B, erit & $\frac{A}{\alpha} > \frac{B}{\alpha}$, ergo & $\frac{B}{\beta}(=\frac{A}{\alpha}) > \frac{B}{\alpha}$, adeoque $\alpha > \beta$ per pr. 10. Vel ſic, quia A . B :: α . β. ut deinceps oſtenditur prop. 16.

15. *Partes* (aliquotæ) *inter ſe comparatæ, eandem habent rationem quam habent earum æque multiplices inter ſe.* Hoc eſt $\frac{A}{\alpha}=$

A+

$\frac{A + A + A \&c}{\alpha + \alpha + \alpha \&c} = \frac{MA}{M\alpha}$. per pr. 12. Vel, per lemma noſtrum, $A . \alpha :: MA . M\alpha$. quia $A \times M\alpha = \alpha \times MA$.

16. *Si quatuor quantitates proportionales ſint, ſunt & alternè* (permutatim, viciſſim, ἐναλλὰξ,) *proportionales.* Hoc eſt, ſi $A . \alpha :: B . \beta$, erit & $A . B :: \alpha . \beta$. Per lemma noſtrum. nam utroque modo, ſi utrovis, erit $A\beta = \alpha B$.

Eſtq; hæc ea argumentatio quam definit Euclides 12 d 5. *Alterna ratio eſt ſumptio antecedentis ad antecedentem, & conſequentis ad conſequentem.*

Notandum autem eſt, hanc propoſitionem ſolummodo illic obtinere, ubi quatuor quantitates ſunt invicem homogeneæ; non autem ubi bina binis heterogenea Puta, ſi ſit, ut pondus A, ad pondus α; ſic linea B ad lineam β non tamen dicendum erit, ut pondus A, ad lineam B; ſic pondus α, ad lineam β. Quia ponderis ad lineam, quippe quantitatem illi heterogeneam, nulla eſt Ratio; ut quæ inter homogeneas ſolas conſiſtit. Atq; eadem de cauſa, prop. 14. de ſolis homogeneis procedit; ut & prop. 1. 5. 6. 7. 8. 9 10. 12. 15 19. 25. 27. 33. proprie loquendo.

Verùm ſiquando alternatione opus fuerit, ubi de quantitatibus invicem heterogeneis agitur: poterit utraque ratio aliis exponi terminis invicem homogeneis; in quibus alternatione inſtituta, aliiſque ut opus fuerit operationibus peractis, nova alternatione reſtituendi ſunt in priſtinum ordinem termini mutuati, & deinde deponendi, reſumptis a principio poſitis. Ut ad prop. 19. mox oſtendetur.

17. *Si quantitates compoſitæ* (συγκείμενα) *proportionales ſint, erunt & diviſæ* (διαιρεθέντα) *proportionales.* Puta ſi ſit $A + \alpha . \alpha :: B + \beta . \beta$. erit & $A . \alpha :: B . \beta$ Manifeſtum enim eſt tum quantitatem $A + \alpha$ una vice pluries continere quantitatem α, quam eandem continet A: & ſimiliter $B + \beta$, una vice pluries quam B, continere β: Et propterea ab æqualibus quotientibus detracta utrobique unitate, manet adhuc æqualitas. Vel ſic. Quia $\frac{A + \alpha}{\alpha} = \frac{A}{\alpha} + 1$, & $\frac{B + \beta}{\beta} = \frac{B}{\beta} + 1$. Si ſit $\frac{A + \alpha}{\alpha}$ ſive $\frac{A}{\alpha} + 1$ $= \frac{B + \beta}{\beta}$ ſive $\frac{B}{\beta} + 1$; erit (detracta utrinque unitate)

$\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta}$. hoc eſt $A . \alpha :: B . \beta$. Vel ſic, ſi $\frac{T}{A} = \frac{\tau}{\alpha}$, erit ($\frac{T}{A} - 1 = \frac{\tau}{\alpha} - 1$, hoc eſt) $\frac{T - A}{A} = \frac{\tau - \alpha}{\alpha}$. Vel etiam per lemma noſtrum, Si $A + \alpha . \alpha :: B + \beta . \beta$. erit ($A\beta + \alpha\beta = \alpha B + \alpha\beta$, adeoque $A\beta = \alpha B$, &) $A . \alpha :: B , \beta$

Definitur autem hæc argumentatio 15 d 5. *Diviſio rationis* (διαίρεσις λόγου) *eſt ſumptio exceſſus, quo antecedens ſuperat conſequentem, ad ipſum conſequentem.*

Adjungit hic Clavius duas alias *Diviſionis Rationis* formas; Primam vocat *Diviſionem rationis converſam; quando conſequens ad exceſſum quo conſequentem ſuperat antecedens refertur.* Si $A . \alpha :: B . \beta$. Erit $\alpha . A - \alpha :: \beta . B - \beta$. Quæ non alia eſt, quam prop. 15. Euclidis inverſio. Nam per illam erit $A - \alpha . \alpha :: B - \beta . \beta$. adeoque inverſe (per cor. prop. 4.) $\alpha . A - \alpha :: \beta . B - \beta$. Vel ſic, ſi $A . \alpha :: B . \beta$. Erit ($A\beta = \alpha B$, & $\alpha B - \alpha\beta = A\beta - \alpha\beta$; hoc eſt, α in $B - \beta := A - \alpha :$ in β. & propterea) $\alpha . A - \alpha :: \beta . B - \beta$.

Ateram vocat *Diviſionem Rationis contrariam; quando confertur antecedens cum exceſſu quo conſequens antecedentem ſuperat.* Si $A . \alpha :: B . \beta$. Erit $A . \alpha - A :: B . \beta - B$. Quæ continet Euclidis diviſionem rationis, duaſque inverſiones. Nam primo invertendo erit $\alpha . A :: \beta . B$. tum dividendo, ſive per diviſionem rationis, $\alpha - A . A :: \beta - B . B$. Et tandem iterum invertendo $A . \alpha - A :: B . \beta - B$. Vel ſic, per lemma noſtrum, Si $A . \alpha :: B . \beta$. erit ($A\beta = \alpha B$, & $A\beta - AB = \alpha B - AB$, hoc eſt, A in $\beta - B := \alpha - A :$ in B. adeoque) $A . \alpha - A :: B . \beta - B$.

18. *Si quantitates diviſæ* (διῃρημένα) *proportionales ſint, erunt & compoſitæ* (συντεθέντα) *proportionales.* Si $A . \alpha :: B . \beta$, erit item $A + \alpha . \alpha :: B + \beta . \beta$. Nam cum ſit $\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta}$, erit item (addendo utrobique 1) $\frac{A}{\alpha} + 1 = \frac{B}{\beta} + 1$. hoc eſt $\frac{A + \alpha}{\alpha} =$

$\frac{B+\beta}{\beta}$; ideoq; $A+\alpha.\alpha::B+\beta.\beta$. vel ſic; Si $\frac{T}{A}=\frac{\tau}{\alpha}$, erit ($\frac{T}{A}+1=\frac{\tau}{\alpha}+1$, hoc eſt) $\frac{T+A}{A}=\frac{\tau+\alpha}{\alpha}$. Imo vero, & $\frac{T}{A}+2=\frac{\tau}{\alpha}+2$, ſive $\frac{T+2A}{A}=\frac{\tau+2\alpha}{\alpha}$. Et quidem univerſim. Si ſit $\frac{T}{A}=\frac{\tau}{\alpha}$, erit etiam $\frac{T}{A}\pm M=\frac{\tau}{\alpha}\pm M$, ſive $\frac{T\pm MA}{A}=\frac{\tau\pm M\alpha}{\alpha}$. Quomodo tum hæc, tum præcedens junctim & univerſaliter demonſtrantur. Sed & per Lemma noſtrum, hæc junctim cum præcedente, ſic demonſtratur; Si $A\pm\alpha.\alpha::B\pm\beta.\beta$; erit ($A\beta\pm\alpha\beta=\alpha B\pm\alpha\beta$, & $A\beta=\alpha B$, ideoque) $A.\alpha::B.\beta$.

Definitur hic argumentandi modus, præſente propoſitione demonſtratus, ab Euclide $14^{d}5$. *Compoſitio rationis* (σύνθεσις λόγου) *eſt ſumptio antecedentis cum conſequente tanquam unius, ad ipſam conſequentem.*

Atq; hic etiam Clavius duas alias Rationis compoſitiones adjungit. Primum appellat *Compoſitionis rationem converſam; quando ſumitur antecedens & conſequens veluti una, quæ cum antecedente conferatur.* Puta ſi $A.\alpha::B.\beta$, erit $A+\alpha.A::B+\beta.\beta$. Quæ duas involvit Euclidis operationes. Nam invertendo, erit $\alpha.A::\beta.B$. & componendo $\alpha+A.A::\beta+B.B$. vel $A+\alpha.\alpha::B+\beta.\beta$. Vel ſic; ſi $A.\alpha::B.\beta$. erit ($A\beta=\alpha B$, &, $A\beta+\alpha\beta=\alpha B+\alpha\beta$, hoc eſt, $A+\alpha$ in $\beta=\alpha$ in $B+\beta$, adeoq;) $A+\alpha.\alpha::B+\beta.\beta$.

Alteram vocat: *Compoſitionem rationis contrariam; quando refertur eadem antecedens ad antecedentem & conſequentem ceu ad unam.* Puta ſi $A.\alpha::B.\beta$, erit $A.A+\alpha::B.B+\beta$. Eſtque hæc præcedentis inverſio; & tres Euclidis operationes conjungit. Nam invertendo erit $\alpha.A::\beta.B$ & componendo $A+\alpha.A::B+\beta.B$. iterumq; invertendo $A.A+\alpha::B.B+\beta$. Vel etiam per Lemma noſtrum; Si $A.\alpha::B.\beta$. erit ($A\beta=\alpha B$, adeoque $AB+A\beta=AB+\alpha B$, hoc eſt A in $B+\beta=A+\alpha$ in B, ideoque) $A.A+\alpha::B.B+\beta$.

19 *Si ſit ut tota ad totam, ſic ablata ad ablatam; erit & reliqua ad reliquam ut tota ad totam.* Eſto enim $\frac{A+B}{\alpha+\beta} = \frac{A}{\alpha} = R$. Erit itaque cum $A+B = R$ in $\alpha + \varsigma = R\alpha + R\varsigma$, tum $A = R\alpha$, adeoque & reſiduum $B = R\varsigma$. Et, (utrinque æqualiter dividendo) $\frac{B}{\varsigma} = R = \frac{A+B}{\alpha+\beta}$. Eſtque hæc propoſitio univerſalis ad prop. 5.

$$\begin{array}{r} A+B = R\alpha + R\varsigma \\ -A = R\alpha \\ \hline B = R\varsigma \end{array}$$

Euclides illam ſic demonſtrat. Quoniam ut $A+B \,.\, \alpha+\varsigma :: A \,.\, \alpha$. erit alterne (ſeu permutando) $A+B \,.\, A :: \alpha+\varsigma \,.\, \alpha$. Et dividendo (ſive per diviſionem rationis) $B \,.\, A :: \varsigma \,.\, \alpha$. iterumq; permutando, $B \,.\, \varsigma :: A \,.\, \alpha :: A+B \,.\, \alpha+\varsigma$.

Atque colligit hoc πόρισμα ſeu corollarium, *Si compoſitæ magnitudines ſint proportionales; & per converſionem rationis proportionales erunt.* Cum enim oſtenderit $A+B \,.\, \alpha+\varsigma :: B \,.\, \varsigma$. Et permutando $A+B \,.\, B :: \alpha+\varsigma \,.\, \varsigma$. quæ ſunt quantitates compoſitæ proportionales; ſed & oſtenſum eſt $A+B \,.\, \alpha+\varsigma :: A \,.\, \alpha$. adeoq; permutando $A+B \,.\, A :: \alpha+\varsigma \,.\, \alpha$. quæ eſt converſio rationis. Quippe 16 d 5, definitur *Converſio rationis* (ἀναστροφὴ λόγου) *ſumptio antecedentis ad exceſſum, quo antecedens ipſam conſequentem ſuperat.*

Clavius hanc demonſtrationem improbat, propter adhibitam alternationem, quæ in ſolis homogeneis obtinet, cum tamen converſio rationis etiam ubi bina binis ſunt heterogenea locum habet; adeoque hanc ſubſtituit. Si $A+B \,.\, B :: \alpha+\varsigma \,.\, \varsigma$. erit (dividendo) $A \,.\, B :: \alpha \,.\, \varsigma$, & (invertendo) $B \,.\, A :: \varsigma \,.\, \alpha$. & tandem (componendo) $A+B \,.\, A :: \alpha+\varsigma \,.\, \alpha$. quæ eſt converſio rationis. Nempe ſi ut tota prima ad ſui partem ablatam, ſic tota ſecunda ad ſui ablatam; erit ut tota prima ad ſui reliquam, ſic tota ſecunda ad ſui reliquam. Vel brevius, ſi ut tota ad ablatam, ſic tota ad ablatam; erit & tota ad reliquam, ut tota ad reliquam.

More noſtro ſic demonſtrabitur; Si $\frac{A+B}{B} \left(= \frac{A}{B} + 1\right) = \frac{\alpha+\varsigma}{\varsigma} \left(= \frac{\alpha}{\varsigma} + 1\right)$ erit $\left(\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\varsigma}\right.$, adeoque $\frac{B}{A} = \frac{\varsigma}{\alpha}$, &

$\frac{B}{A}+1=\frac{\beta}{\alpha}+1$, hoc eſt) $\frac{B+A}{A}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha}$.

Vel, ſi libet, ſic; Si $\frac{T}{A}=\frac{\tau}{\alpha}$, erit ($\frac{T}{A}-1=\frac{\tau}{\alpha}-1$, hoc eſt $\frac{T-A}{A}=\frac{\tau-\alpha}{\alpha}$ adeoque $\frac{A}{T-A}=\frac{\alpha}{\tau-\alpha}$, & $\frac{A}{T-A}+1=\frac{\alpha}{\tau-\alpha}+1$, hoc eſt $\frac{A+T-A}{T-A}=\frac{\alpha+\tau-\alpha}{\tau-\alpha}$, vel) $\frac{T}{T-A}=\frac{\tau}{\tau-\alpha}$. Et ſimiliter inſtitui poterunt demonſtrationes non modo prop. 17, & 18. ut ſupra, ſed & earum quas illis ſubjungit Clavius. Quod obiter dictum eſto.

Vel etiam per lemma noſtrum; Si $A+B.B::\alpha+\beta.\beta$, erit ($A\beta+B\beta=B\alpha+B\beta$, adeoque $A\beta=B\alpha$, & $A\alpha+B\alpha=A\alpha+A\beta$, ideoque) $A+B.A::\alpha+\beta.\alpha$.

Sed & reſtitui poterit eadem hujuſce propoſitionis demonſtratio quam modo repudiavit Clavius, eo adhibito remedio quod ad prop. 16. innuimus: Puta, ſi ſit, verbi gratia, ut $A+B$ numerus pedum in linea tota, ad B numerum pedum in ablata; ſic $\alpha+\beta$ numerus unciarum in toto pondere, ad β numerum unciarum in ablato; (ut Symbola jam non lineas & pondera, quantitates heterogeneas, immediate ſignificent, ſed utrobique numeros, adeoque homogeneas:) erit permutando $A+B.\alpha+\beta::B.\beta$. ut numerus totus ad totum ſic ablatus ad ablatum; ideoq; &, per pr. 19. ſic reliquus ad reliquum, nempe $A+B.\alpha+\beta(::B.\beta)::A.\alpha$. iterumq; permutando $A+B.A::\alpha+\beta.\alpha$. ut pedum numerus totus ad reliquum, ſic unciarum numerus totus ad reliquum; & propterea etiam, ut linea tota ad reliquam, ſic pondus totum ad reliquum. Quod erat probandum. Vel ſic; ſi ſit linea tota ad ablatam, ut numerus T ad A, & pondus totum ad ablatum, ut numerus τ ad α; ſitq; eadem utrobiq; ratio; hoc eſt $T.A::\tau.\alpha$; adeoque permutando (quippe jam de numeris agitur) $T.\tau::A.\alpha$; ideoq; per pr. 19, $T.\tau::T-A.\tau-\alpha$. iterumq; permutando $T.T-A::\tau.\tau-\alpha$. Ergo & (quia ponuntur numeri illic lineis, hic ponderibus proportionales) ut linea tota ad reſiduam, ſic & pondus totum ad reſiduum. Quod erat probandum. Atq; hoc pacto

cto licebit alternationem adhibere etiam in proportionalibus non homogeneis. Ubi nempe ſecundâ permutatione reſtituitur quod primâ deturbatum erat: aut etiam, ſi plures, modo item quartâ reſtituatur quod tertiâ deturbatur; & ſic toties quoties. Hoc enim ſi caveatur, nihil abſurdi ſequitur in quantitatibus, utut heterogeneis, alternandis.

20. *Si ſint tres quantitates, A,B,C; aliæq; ipſis numero æquales, α, β, γ; quæ binatim ſumptæ ſunt in eadem ratione,* (puta A . B :: α . ϐ . & B . C :: ϐ . γ.) *ex æquali* (*διίσου*) *autem prima major ſit quam tertia; & quarta quam ſexta major erit: Et ſi æqualis, æqualis: ſin minor, minor.* Nam A . C :: α . γ ut oſtendemus ad prop. 22.

21. *Si ſint tres quantitates, A, B, C; aliæq; ipſis numero æquales, α, ϐ, γ; quæ binatim ſumptæ ſint in eadem ratione; ſit autem perturbata earum proportio* (puta A . B :: ϐ . γ. & B . C :: α . ϐ.) *ſitq; ex æquali prima major quam tertia; erit & quarta quam ſexta major: &, ſi æqualis, æqualis; ſin minor, minor.* Nam & hic A . C :: α . γ. ut oſtendemus prop. 23.

Sunt enim hæ duæ propoſitiones, Lemmata ad duas ſequentes, quas cum nos ſine harum ope demonſtraturi ſimus, erunt eadem opera & hæ a fortiori demonſtratæ. Quid autem ſignificent illæ voces *ex æquali*, ſive *ex æquo*, & *proportio perturbata*; oſtenditur 17, 18, 19, def. 5.

Ex æqualitate ratio, (ſive ex æquali, vel ex æquo, *διίσου*) *eſt, ubi plures ſunt quantitates, ſumptio extremorum per ſubtractionem mediorum*; ſive, omiſſis mediis. 17 d. 5.

Ordinata proportio (*τεταγμένη ἀναλογία*) *eſt, quando eſt ut antecedens ad conſequentem, ſic antecedens ad conſequentem; ut autem conſequens ad aliam quampiam, ſic conſequens ad aliam quampiam.* 18 d 5. Cujus exſemplum habemus per 20, & 22.

Perturbata vero proportio (*τεταραγμένη ἀναλογία*) *eſt, quando, cum tres ſint quantitates aliæq; illis numero æquales, eſt, ut in primis quantitatibus antecedens ad conſequentem, ita in ſecundis quantitatibus antecedens ad conſequentem; ut autem in primis quantitatibus conſequens ad aliam quampiam, ita in ſecundis alia quæpiam ad antecedentem.* 19 d 5. Cujus exſemplum habetur prop. 21, & 23. Vel ſic; ſi ut in primoribus prima ad ſecundam, ſic in alteris ſecunda ad tertiam; ut autem in primoribus ſecunda ad tertiam, ſic in alteris prima ad ſecundam.

22 *Si ſint quotcunque quantitates* A, B, C, &c. *aliæque ipſis numero æquales*, α, β, γ, &c. *quæ binatim ſumptæ ſint in eadem ratione*, (puta $A . B :: \alpha . \beta$, & $B . C :: \beta . \gamma$. &c.) *& ex æquali in eadem ratione erunt*; Nempe $A . C :: \alpha . \gamma$. Nam quia $\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$ & $\frac{B}{C} = \frac{\beta}{\gamma}$ erit $\frac{A}{B} \times \frac{B}{C} \left(= \frac{AB}{BC} = \frac{A}{C} \right) = \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\beta}{\gamma} \left(= \frac{\alpha\beta}{\beta\gamma} = \frac{\alpha}{\gamma} . \right)$ adeoque. $A . C :: \alpha . \gamma$. Et ſimiliter quotcunque fuerint utrobique quantitates. Habetur autem hic exſemplum rationis compoſitæ; ut & prop. ſequente.

23 *Si ſint tres quantitates* A, B, C, &c. *aliæque ipſis numero æquales* α, β, γ; *quæ binatim ſumptæ ſint in eadem ratione, ſit autem perturbata earum proportio*; (nempe $A . B :: \beta . \gamma$. & $B . C :: \alpha . \beta$.) *& ex æquali in eadem ratione erunt*, Nempe $A . C :: \alpha . \gamma$. Nam quia $\frac{A}{B} = \frac{\beta}{\gamma}$, & $\frac{B}{C} = \frac{\alpha}{\beta}$; erit $\frac{A}{B} \times \frac{B}{C} \left(= \frac{AB}{BC} = \frac{A}{C} \right) = \frac{\beta}{\gamma} \times \frac{\alpha}{\beta} \left(= \frac{\beta\alpha}{\gamma\beta} = \frac{\alpha}{\gamma} . \right)$ adeoque $A . C :: \alpha . \gamma$.

24 *Si prima ad ſecundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam*; $A . \alpha :: B . \beta$: *quinta item ad ſecundam eandem habuerit rationem quam ſexta ad quartam*: $C . \alpha :: D . \beta$ *habebit etiam compoſita ex prima & quinta ad ſecundam, eandem rationem quam tertia cum ſexta ad quartam.* $A + C . \alpha :: B + D . \beta$. Nam ſi $\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta}$, & $\frac{C}{\alpha} = \frac{D}{\beta}$: erit $\frac{A}{\alpha} + \frac{C}{\alpha} \left(= \frac{A + C}{\alpha} \right) = \frac{B}{\beta} + \frac{D}{\beta} \left(= \frac{B + D}{\beta} . \right)$ adeoque $A + C . \alpha :: B + D . \beta$. Vel ſic, ſi opus, per lemma noſtrum; Si $A . \alpha :: B . \beta$. & $C . \alpha :: D . \beta$. erit (tum $A\beta = \alpha B$, tum $C\beta = \alpha D$, ergo $A\beta + C\beta = \alpha B + \alpha D$, ideoque) $A + C . \alpha :: B + D . \beta$. Eſtque hæc propoſitio, univerſalis ad prop. 2.

25 *Si quatuor magnitudines proportionales fuerint* $A + B . \alpha + \beta$: $A . \alpha$. (ſitque $A + B$ omnium maxima, adeoque & α minima;) *maxima & minima reliquis duabus majores erunt.* ($A + B + \alpha > \alpha + \beta + A$.) Nam per prop. 19. $A + B . \alpha + \beta (:: A . \alpha) :: B . \beta$ adeoque, ex hypotheſi, $B > \beta$. Ideoque $A + \alpha + B > A + \alpha + \beta$.

Atque

Atque hactenus propoſitiones Euclidis tradidimus. Sequuntur aliæ quæ, a Clavio aliiſque, his ſubjungi ſolent; eadem facilitate demonſtrandæ: quæ & Euclidéis virtualiter contentæ videantur.

26 *Si prima* A *ad ſecundam* B, *majorem habuerit rationem, quam tertia* α *ad quartam* β; *habebit, invertendo, ſecunda ad primam minorem rationem quam quarta ad tertiam.* Nam quo major eſt ratio quævis, eo minor ipſius converſa. Vel ſic. Quoniam $\frac{A}{B} > \frac{\alpha}{\beta}$, eſto per prop. 8. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{A}{B+E}$; ideoque invertendo $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{B+E}{A} > \frac{B}{A}$. vel $\frac{B}{A} < \frac{\beta}{\alpha}$. Vel ſic; Si $\frac{A+E}{B} > \left(\frac{A}{B} = \right)\frac{\alpha}{\beta}$; erit inverſe $\frac{B}{A+E} < \left(\frac{B}{A} = \right)\frac{\beta}{\alpha}$. per Cor. pr. 4.

27 *Si prima ad ſecundam, majorem habeat rationem, quam tertia ad quartam; habebit viciſſim prima ad tertiam, majorem rationem quam ſecunda ad quartam.* Nam ſi $\frac{A}{B} > \frac{\alpha}{\beta}$, eſto $\frac{A}{B+E} = \frac{\alpha}{\beta}$, ideoque, viciſſim, $\frac{A}{\alpha} = \frac{B+E}{\beta} > \frac{B}{\beta}$. Vel ſic; Si $\frac{A+E}{B} > \left(\frac{A}{B} = \right)\frac{\alpha}{\beta}$; erit alterne $\frac{A+E}{\alpha} > \left(\frac{A}{\alpha} = \right)\frac{B}{\beta}$. per pr. 16.

28 *Si prima ad ſecundam, majorem habeat rationem, quam tertia ad quartam; habebit quoq; compoſita prima cum ſecunda ad ſecundam, majorem rationem, quam compoſita tertia cum quarta ad quartam.* Nam ſi $\frac{A}{B} > \frac{\alpha}{\beta}$, erit quoque ($\frac{A}{B} + 1 > \frac{\alpha}{\beta} + 1$, hoc eſt) $\frac{A+B}{B} > \frac{\alpha+\beta}{\beta}$. Vel ſic; Si $\frac{A+E}{B} > \left(\frac{A}{B} = \right)\frac{\alpha}{\beta}$; erit componendo $\frac{A+E+B}{B} > \left(\frac{A+B}{B} = \right)\frac{\alpha+\beta}{\beta}$. per pr. 18.

29 *Si compoſita prima cum ſecunda, ad ſecundam, majorem habeat rationem, quam compoſita tertia cum quarta, ad quartam; habebit quoq; d[illegible]idendo prima ad ſecundam [illegible] quam tertia ad quartam.*

Nam

Nam ſi $\frac{A+B}{B} > \frac{\alpha+\beta}{\beta}$, (hoc eſt $\frac{A}{B}+1, > \frac{\alpha}{\beta}+1$,) erit quoque $\frac{A}{B} > \frac{\alpha}{\beta}$. Vel ſic; $\frac{\text{Si } A+E+B}{B} > \left(\frac{A+B}{B} = \right)$ $\frac{\alpha+\beta}{\beta}$; erit dividendo $\frac{A+E}{B} > \left(\frac{A}{B} = \right)\frac{\alpha}{\beta}$. per pr. 17.

30 *Si compoſita prima cum ſecunda, ad ſecundam, majorem rationem habeat, quam compoſita tertia cum quarta, ad quartam; habebit, per converſionem rationis, prima cum ſecunda ad primam, minorem rationem quam tertia cum quarta, ad tertiam.* Nam ſi $\frac{A+B}{B} > \frac{\alpha+\beta}{\beta}$, adeòque dividendo (ut prop. præced.) $\frac{A}{B} > \frac{\alpha}{\beta}$; erit inverſe (per pr. 26.) $\frac{B}{A} < \frac{\beta}{\alpha}$, & componendo (ut prop. 28.) $\frac{A+B}{A} < \frac{\alpha+\beta}{\alpha}$.

31 *Si ſint tres quantitates* A, B, C; *aliæq; ipſis numero æquales* α, β, γ; *ſitq; major ratio primæ priorum ad ſecundam, quam primæ poſteriorum ad ſecundam; item ſecundæ priorum ad tertiam* (ſive æqualis, ſive) *major quam ſecundæ poſteriorum ad tertiam; erit quoq; ex æqualitate major ratio primæ priorum ad tertiam, quam primæ poſteriorum ad tertiam.* Nam ſi $\frac{A}{B} > \frac{\alpha}{\beta}$, & $\frac{B}{C} \geqq \frac{\beta}{\gamma}$; erit $\frac{A}{B} \times \frac{B}{C} \left(= \frac{AB}{BC} = \frac{A}{C}\right) > \left(\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{B}{C} \geqq \right) \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\beta}{\gamma} \left(= \frac{\alpha\beta}{\beta\gamma} = \frac{\alpha}{\gamma}.\right)$ Hoc eſt $\frac{A}{C} > \frac{\alpha}{\gamma}$. Vel ſic; Si $\frac{A+E}{B} > \left(\frac{A}{B} = \right) \frac{\alpha}{\beta}$, & $\frac{B}{C} = \frac{\beta}{\gamma}$; erit ex æquali, $\frac{A+E}{C} > \left(\frac{A}{C} = \right) \frac{\alpha}{\gamma}$. per pr. 22.

32 *Si ſint tres quantitates* A, B, C; *aliæq; ipſis numero æquales* α, β, γ. *Sitq; major ratio primæ priorum ad ſecundam, quam ſecundæ poſteriorum ad tertiam; item ſecundæ priorum ad tertiam* (five æqualis, five) *major quam primæ poſteriorum ad ſecundam: erit quoque ex æqualitate major ratio primæ priorum ad tertiam, quam primæ poſteriorum ad tertiam.* Nam, ſi $\frac{A}{B} > \frac{\beta}{\gamma}$, & $\frac{B}{C} \geq \frac{\alpha}{\varsigma}$; erit $\frac{A}{B} \times \frac{B}{C} \left(= \frac{AB}{BC} = \frac{A}{C}\right) > \left(\frac{\varsigma}{\gamma} \times \frac{B}{C} \geq\right) \frac{\varsigma}{\gamma} \times \frac{\alpha}{\varsigma} \left(= \frac{\varsigma\alpha}{\gamma\varsigma} = \frac{\alpha}{\gamma}\right.$. Vel ſic; Si $\frac{A+E}{B} > \left(\frac{A}{B} =\right) \frac{\varsigma}{\gamma}$, & $\frac{B}{C} = \frac{\alpha}{\varsigma}$, erit ex æquali, $\frac{A+E}{C} > \left(\frac{A}{C} =\right) \frac{\alpha}{\gamma}$, per pr. 23.

33 *Si ſit major ratio totius ad totam, quam ablatæ ad ablatam; erit & reliquæ ad reliquam major ratio quam totius ad totam.* Nam ſi $\frac{A+B}{\alpha+\varsigma} > \frac{B}{\varsigma}$, erit permutando (per pr. 27.) $\frac{A+B}{B} > \frac{\alpha+\varsigma}{\varsigma}$, & per converſionem rationis, (pr. 30.) $\frac{A+B}{A} < \frac{\alpha+\varsigma}{\alpha}$ iterumque permutando, $\frac{A+B}{\alpha+\varsigma} < \frac{A}{\alpha}$, vel $\frac{A}{\alpha} > \frac{A+B}{\alpha+\varsigma}$. Vel ſic; Quoniam $\frac{A+B}{\alpha+\varsigma} > \frac{B}{\varsigma}$ adeoque $\frac{A+B}{B} > \frac{\alpha+\beta}{\varsigma}$ & $\frac{A}{B} > \frac{\alpha}{\varsigma}$, adeoque $\frac{B}{A} < \frac{\varsigma}{\alpha}$ erit quoque $\frac{A+B}{A} < \frac{\alpha+\varsigma}{\alpha}$, & $\frac{A+B}{\alpha+\varsigma} < \frac{A}{\alpha}$.

Vel ſic; Si $\frac{A+E+B}{\alpha+\varsigma} \left(= \frac{A+B}{\alpha+\varsigma} + \frac{E}{\alpha+\beta}\right) > \left(\frac{A+B}{\alpha+\beta} =\right) \frac{B}{\beta} \left(= \frac{A}{\alpha}\right.$. per prop. 19.) Erit $\frac{A+E}{\alpha} \left(= \frac{A}{\alpha} + \frac{E}{\alpha} = \frac{A+B}{\alpha+\beta} + \frac{E}{\alpha}\right) > \left(\frac{A+B}{\alpha+\beta} + \frac{E}{\alpha+\varsigma}\right.$ per prop. 8. $=\Big)$ $\frac{A+E+B}{\alpha+\varsigma}$.

Supereſt adhuc apud Clavium, alia propoſitio, quæ quorſum hic loci inſeratur, ego plane non video; Cum tamen illic reperiam, etiam & hic apponam.

34 *Si ſint quotcunq; quantitates,* A, B, C, &c. *aliæq; ipſis numero æquales,* α, β, γ, &c; *ſitq; major ratio primæ priorum ad primam poſteriorum, quam ſecundæ ad ſecundam, & hæc major quam tertiæ ad tertiam, & ſic deinceps:* $\frac{A}{\alpha} > \frac{B}{\beta} > \frac{C}{\gamma}$ &c. *Habebunt omnes priores ſimul, ad omnes poſteriores ſimul, majorem rationem quam omnes priores relicta prima, ad omnes poſteriores relicta prima; Minorem autem quam prima priorum ad primam poſteriorum; Majorem deniq; etiam, quam ultima priorum ad ultimam poſteriorum.*

Sunto primum utrinque duæ, A, B, & α, β. Quoniam igitur $\frac{A}{\alpha} > \frac{B}{\beta}$, adeoque permutando $\frac{A}{B} > \frac{\alpha}{\beta}$, & componendo $\frac{A+B}{B} > \frac{\alpha+\beta}{\beta}$; Erit, permutando, & per prop. 33. $\frac{A+B}{\alpha+\beta} \left(> \frac{B}{\beta}\right) < \frac{A}{\alpha}$. Quæ erant probanda. Et ſimiliter probandum erit $\frac{B+C}{\beta+\gamma} \left(> \frac{C}{\gamma}\right) < \frac{B}{\beta} < \frac{A}{\alpha}$. Item $\frac{C+D}{\gamma+\delta} \left(> \frac{D}{\delta}\right) < \frac{C}{\gamma} < \frac{B}{\beta} < \frac{A}{\alpha}$: Et ſic ubivis.

Secundo, ponantur utrinque tres, $\frac{A}{\alpha} > \frac{B}{\beta} > \frac{C}{\gamma}$. Quoniam per membrum primum $\frac{A}{\alpha} \left(> \frac{B}{\beta}\right) > \frac{B+C}{\beta+\gamma}$, erit permutando $\frac{A}{B+C} > \frac{\alpha}{\beta+\gamma}$, & componendo $\frac{A+B+C}{B+C} > \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\beta+\gamma}$, iterumque permutando, & per membrum primum, & per pr. 33. Erit $\frac{A+B+C}{\alpha+\beta+\gamma} \left(> \frac{B+C}{\beta+\gamma} > \frac{C}{\gamma}\right) < \frac{A}{\alpha}$ · quæ erant demonſtranda. Et ſimiliter probabitur $\frac{B+C+D}{\beta+\gamma+\delta} \left(> \frac{C+D}{\gamma+\delta} > \frac{D}{\delta}\right) < \frac{B}{\beta} < \frac{A}{\alpha}$;

Eodem

Eodem modo, poſitis utrobiq; quatuor, $\frac{A}{\alpha} > \frac{B}{\beta} > \frac{C}{\gamma} > \frac{D}{\delta}$. Erit per membrum præcedens, $\frac{A}{\alpha} \left(> \frac{B}{\beta} \right) > \frac{B+C+D}{\beta+\gamma+\delta}$. ideoq; (permutando, & componendo, iterumq; permutando, &c. ut prius,) $\frac{A+B+C+D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta} \left(> \frac{B+C+D}{\beta+\gamma+\delta} > \frac{C+D}{\gamma+\delta} > \frac{D}{\delta} \right) < \frac{A}{\alpha}$. Quæ erant probanda. Et ſimiliter $\frac{B+C+D+E}{\beta+\gamma+\delta+\epsilon} \left(> \frac{C+D+E}{\gamma+\delta+\epsilon} > \frac{D+E}{\delta+\epsilon} > \frac{E}{\epsilon} \right) < \frac{B}{\beta} < \frac{A}{\alpha}$:

Et pari modo, poſitis utrobiq;, quinq; ſex, ſeptem, &c. demonſtratio gradatim procedet. Conſtat itaq; propoſitum.

Atque hactenus Euclidis Elementum quintum, cum propoſitionibus adjunctis, expoſuimus: ſuccincte quidem, ſed nec propterea minus dilucide.

Si quem interim male habeat, quod in demonſtrationibus non raro, ea quæ ad Fractionum Diviſionem, Multiplicationem &c. attinent, adhibuerim; quarum doctrinam nondum ex profeſſo tradiderim: Poterit ille totum hoc caput, cum ſequente, Fractionum tractationi poſtponere, vel ſaltem quaſi eſſent poſtpoſita reputare. Quanquam revera vix quicquam eorum hic aſſumitur, quod non & in ſuperioribus exponitur; præſertim ubi de Fractionum notatione dictum eſt, & de Multiplicatione Diviſioneq; Algebrica ſive Specioſa.

CAP. XXXVI.

Elementi Quinti Synopſis.

QUod præcedente Capite fuſius traditum eſt, in brevem Synopſin redigemus.

Ubi $\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$, ibi $A . B :: \alpha . \beta$, Definitio.

$$\text{Ergo}\left\{\begin{array}{l} A \;.\; B \;::\; \alpha(=A) \;.\; B. \\ A \;.\; B \;::\; A \;.\; \beta(=B). \end{array}\right\}\text{prop. 7. 9.}$$

$$\left\{\begin{array}{c} A \;.\; B \\ :: \\ \alpha \;.\; \beta \end{array}\right\} \begin{array}{c} > \\ :: \\ < \end{array} \left\{ C \;.\; D \right. \;.\; \text{prop. 11. 13.}$$

$$A \;.\; B \;::\; RA \;.\; RB \;.\; \text{prop. 15.}$$

Item $\frac{A+E}{B} > \frac{A}{B}$ Et $\frac{A}{B+E} < \frac{A}{B}$. prop. 8. 10.

Suntque hæ propoſitiones Intellectui ſatis obviæ. Sequuntur aliæ.

$$\text{Si}\quad A \;.\; B \;::\; \alpha \;.\; \beta \;.$$

$$\text{Erit}\left\{\begin{array}{ll}
A \times \beta = B \times \alpha \;. & \text{Lemma.} \\
B \;.\; A \;::\; \beta \;.\; \alpha \;. & \text{Cor. pr. 4.} \\
A \;.\; \alpha \;::\; B \;.\; \beta \;. & \text{pr. 14. 16.} \\
RA \;.\; B \;::\; R\alpha \;.\; \beta \;. & \\
A \;.\; \varrho B \;::\; \alpha \;.\; \varrho\beta \;. & \text{prop. 3. 4.} \\
RA \;.\; \varrho B \;::\; R\alpha \;.\; \varrho\beta \;. & \\
A \;.\; B \;::\; \left\{\begin{array}{l} A \overset{+}{\sim} \alpha \;.\; B \overset{+}{\sim} \beta \;. \\ RA \overset{+}{\sim} \varrho\alpha \;.\; RB \overset{+}{\sim} \varrho\beta \;. \end{array}\right. & \text{prop. 1. 5. 12. 19.} \\
A \overset{+}{\sim} B \;.\; \left\{\begin{array}{c} B \\ A \end{array}\right\} \;::\; \alpha \overset{+}{\sim} \beta \;.\; \left\{\begin{array}{c} \beta \\ \alpha \end{array}\right. \;. & \\
\left.\begin{array}{c} A \\ B \end{array}\right\} \;.\; A \overset{+}{\sim} B \;::\; \left\{\begin{array}{c} \alpha \\ \beta \end{array}\right\} \;.\; \alpha \overset{+}{\sim} \beta \;. & \text{pr. 17. 18.} \\
MA \overset{+}{\sim} RB \;.\; \left\{\begin{array}{c} \varrho A \\ \varrho B \end{array}\right\} \;::\; M\alpha \overset{+}{\sim} RB \;.\; \left\{\begin{array}{c} \varrho\alpha \\ \varrho\beta \end{array}\right. \;. & \text{cor. pr. 19.} \\
\left.\begin{array}{c} \varrho A \\ \varrho B \end{array}\right\} \;.\; MA \overset{+}{\sim} RB \;::\; \left\{\begin{array}{c} \varrho\alpha \\ \varrho\beta \end{array}\right\} \;.\; M\alpha \overset{+}{\sim} RB \;. &
\end{array}\right.$$

Suntq; & hæ propoſitiones, earumque converſæ, vel per ſe ſatis

ſatis obviæ, vel per Lemma noſtrum facile demonſtrantur; adeoque ſi de harum analogiarum una quavis conſtiterit, conſtabit & de omnibus. Sequuntur aliæ.

$$\text{Si} \left\{ \begin{matrix} A \\ C \end{matrix} \right\} . \; B \; :: \; \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \gamma \end{matrix} \right\} . \; \beta$$
$$\text{Erit } A \pm C \; . \; B \; :: \; \alpha \pm \gamma \; . \; \beta \qquad \text{prop. 2. 24.}$$

$$\text{Si} \left\{ \begin{matrix} A \pm C \\ A \end{matrix} \right\} . \; B \; :: \; \left\{ \begin{matrix} \alpha \pm \gamma \\ \alpha \end{matrix} \right\} . \; \beta$$
$$\text{Erit } \; C \; . \; B \; :: \; \gamma \; . \; \beta \qquad \text{prop. 6.}$$

$$\text{Si } A \pm \alpha \; . \; B \pm \beta \; :: \; A \; . \; B$$
$$\text{Erit } A \pm \alpha \; . \; B \pm \beta \; (:: A \; . \; B) :: \alpha \; . \; \beta \qquad \text{pr. 5. 19.}$$

$$\text{Si } \overbrace{A \; . \; B} \; . \; C \; : \; \overbrace{\alpha \; . \; \beta} \; . \; \gamma \quad (A . B :: \alpha . \beta;\; B . C :: \beta . \gamma)$$

$$\text{Vel } A \; . \; \overbrace{B \; . \; C} \; : \; \alpha \; . \; \overbrace{\beta \; . \; \gamma} \quad (A . B :: \beta . \gamma;\; B . C :: \alpha . \beta)$$

$$\text{Erit } A \; . \; C \; :: \; \alpha \; . \; \gamma \qquad \text{pr. 20. 21. 22. 23.}$$

$$\text{Si maxima } A \; . \; B \; :: \; \alpha \; . \; \beta \; . \text{ minim.}$$
$$\text{Erit } \; A + \beta > B \; . \; \alpha \; . \qquad \text{prop. 25.}$$

Harum item propoſitionum demonſtrationes, vel ex ſupe-

riore

riore Lemmate, vel aliunde, ſunt ſatis obviæ, vel ſaltem ex ſupra traditis illarum expoſitionibus peti poſſunt. Adeoque Euclidis Elementum quintum, compendio traditum eſt; locis interim aliquammultis locupletatum.

Quæ ſequuntur, apud interpretes, propoſitiones de non-proportionalibus; ad alias ab Euclide traditas facile reducuntur, in quibus quaſi virtualiter continentur. Puta prop. 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33. In Cor. pr. 4 Pr. 16, 17, 18, 19, 22, 23. Cor. pr. 19. ut cap. præced. oſtenſum eſt.

De Marci Meibomii Dialogo, Monitio.

De Meibomii Dialogo. Ubi hactenus perveneram, incidi in *Marci Meibomii, De Proportionibus Dialogum*; anno ſuperiori editum. Quo, novam de Proportionibus doctrinam ſpondet. Atque tum *Pythagoram, Eudoxum, Euclidem, & quotquot unquam Pythagorici floruere*; tum *Archimedem, Apollonium, Pappum*; *Theonem* item, atque *Eutocium*; *Commandinum* deniq; & *Clavium, omniumq; juniorum Mathematicorum filios*; ſive, ſummatim, tum *totam antiquitatem*, tum *recentiores omnes*; ſive, *totam Mathematicorum cohortem ad noſtra uſque tempora*; *hallucinatos eſſe*, contendit: *Nec tantum ignoraſſe authores illos, quid ſit rationum compoſitio; ſed &, quid ſit ratio*: Quodque *ipſe primus, omnem eruditam vetuſtatem, ingenti molimine, ſuperaverit*; *Pluraq;* tradiderit, *quam ab ullo Geometra exſpectari poſſe, putandum erat.* Quippe *is præcipuus*, inquit, *narrationis ſcopus eſt, ut totam antiquitatem ignoratæ in quibuſdam Elementis Geometriæ convincat*; *deinde autem juniorum pravas explicationes, & monſtroſas hallucinationes demonſtret.* Cum enim, tum veteres, *Pythagoras, Eudoxus, &c. ad rei veritatem non omnino penetrarint*; tum, *quæ veteres recte docuerant, ſiniſtra recentiorum interpretatione ſint depravata*: *Itaque*, inquit, *& recentiores omnes reprehendam; qui antiquos non intellexerunt: & antiquos corrigam; qui male quædam prodiderunt: utroſq; inſuper non docturus.*

Ejuſdem ſumma. Totius autem novæ doctrinæ ſuæ, hoc eſt, erratorum ſuorum, originem, qui examinat, hanc eſſe deprehendet; quod inter λόγον διπλάσιον, & λόγον διπλασίονα; ſive, (ut loquuntur interpretes) inter *rationem duplam*, & *duplicatam*; vel neſciat, vel nolit, diſtinguere. Quæ cum ille pro eodem habere velit; tum ſeparanda perperam commiſcet; tum, quæ ab authoribus de utriſque vere tradita ſunt, quaſi inter ſe pugnantia committit. Adeoque Theonem, alioſque, graviter culpat, quod putaverint

tripli duplum eſſe ſextuplum: Dum ille, *tripli duplum, noncuplum eſſe*, contendit; quia nempe, rationis triplæ, ratio duplicata, eſt, noncupla.

Deinde; cum ratio $\frac{1}{4}$, rationis $\frac{1}{2}$, ſit *ratio duplicata*; quam ille pro eodem habet atque *rationem duplam*; nec interim dubitaverit; quin dupla ſit major, quam ſimpla: ſtatuit, *rationem* 1 *ad* 4, *majorem eſſe quam* 1 *ad* 2.

Adeoque rationem illam *majorem* eſſe vult, non quam definit Euclides, 8 *d* 5. ſed, quæ ab æqualitate magis recedit; ſive, ut loquitur ille, *cujus termini longius inter ſe diſtant*. (Quaſi quidem, idem eſſet *Ratio*, atq; *Inæqualitas*.) Ipſamque *Æqualitatis* rationem, *Rationem nihili* appellat; utpote ubi nulla eſt Inæqualitas.

Et propterea *Prop.* 8. & 10. e 5. (& quæ inde dependent omnes) falſas eſſe contendit; quod per eas, dicenda eſſet ratio $\frac{1}{2}$, major quam ratio $\frac{1}{4}$. Adeoque & 8 def 5. (cui innituntur) falſam eſſe.

Rationes autem $\frac{2}{1}$ & $\frac{1}{2}$, item $\frac{4}{1}$ & $\frac{1}{4}$, (atque de aliis pariter,) æquales invicem dicendas vult: Tum; quod idem ſit intervallum inter 1 & 2, atque inter 2 & 1; adeoque, ſecundum illum, eadem ratio: Tum quod utraque, ab æqualitatis ratione æque recedat. Sicuti enim $+1$ & -1 (ſi ipſi credamus) ſunt inter ſe æquales; quia uterque ab 0, ſeu nihilo, (numeri omnis initio,) æqualiter diſtat: ita & ratio $\frac{2}{1}$ & $\frac{1}{2}$ æquales erunt dicendæ; cum utraque ab æqualitatis (ſive nihili) ratione $\frac{1}{1}$, æque recedat.

Eſtque hæc totius novæ ſuæ doctrinæ ſumma; breviter quidem, ſed fideliter recenſita; & magis forſan perſpicuè quam ipſe vellet. Cujus quidem ego refutationem, putaſſem, primo, hic loci inſeruiſſe; tum quod hanc novam ſuam doctrinam non antea viderim, quam præcedentia deſcripta fuerant, & prope omnia jam impreſſa; tum, quod locus hic ſit ſatis opportunus. Cum vero refutationem, quam, currente prelo, paravi, prolixiorem videam, quam ut uno capiti inſeratur; totumq; hoc de proportionibus negotium jam ſupra ſatis dilucidè tradatur, ut, qui a nobis tradita intelligat, non admodum ſolicitus ſit futurus de nova ipſius traditione: Lectorem hic nimia digreſſione detinendum non cenſui. Adeoque Refutationem illam ſeorſim potius, vel, ſi opus ſit, huic tractatui ſubjungendam reliqui. Ut

ſicui

ſicui videatur illius nova doctrina quicquam in ſe habere ponderis; videre poſſit, & quid nobis illi reponendum eſſe duximus.

Refutatio brevis.

Interim vero dicimus 1°. λόγον διπλάσιον, aliud plane eſſe quam λόγον διπλασίονα, ut ſupra oſtenſum eſt; &, quid inter ſe diſtent. 2°. λόγον διπλάσιον, rationem duplam, ſimplâ majorem eſſe, agnoſcimus: ſed non ita ſemper λόγον διπλασίονα. (quippe quoties expoſita ratio, ſeu radix, ſupponitur minor quam 1 vel $\frac{1}{1}$; ratio duplicata, triplicata, &c; hoc eſt, quadratum, Cubus, &c. perpetuo decreſcunt.) 3° Adeoque non inde ſequi dicimus, rationem $\frac{1}{4}$ majorem eſſe quam $\frac{1}{2}$, utut illa ſit hujus duplicata. adeoque tum 8 *d* 5, tum 8 & 10 *e* 5, (cum quæ hinc dependent,) ſatis conſtare. 4°. Æqualitatis rationem $\frac{1}{1}$, non rationem *nihili* dicendam eſſe, ſed ſimplam. quippe, ut, ubi terminus antecedens conſequentem bis continet, duplus dicitur; ubi ter, triplus, &c; ita, ubi ſemel, ſimplus dicendus eſt: adeoque $\frac{1}{1}$ ratio ſimpla. 5°. Negamus item, tum $+1$ & -1, eſſe æquales numeros; tum $\frac{2}{1}$ & $\frac{1}{2}$ æquales eſſe rationes. quippe $+1$, binario major eſt quam -1, (nam $+1 = -1 + 2$) & ratio $\frac{2}{1}$ eſt rationis $\frac{1}{2}$ (non inquam, quadruplicata, ſed) quadrupla: nempe $\frac{2}{1} = 4 \times \frac{1}{2}$. 6° Negamus item, *Rationem* tantundem eſſe atq; *Inæqualitatem*, (quippe & æqualium ad invicem eſt ratio, non minus quam inæqualium:) Aut etiam idem atq; *Intervallum*. Uti enim, in ratione, ut loquuntur, Arithmetica; eadem eſt Differentia (quæ ſubductionem ſpectet) inter 5 & 3, atque inter 3 & 5; non autem eadem ratio Arithmetica, 5 ad 3, & 3 ad 5; quippe illic, exceſſus binarii; hic, binarii Defectus: Ita, in ratione Geometrica, idem eſt intervallum (diviſione æſtimandum) inter 2 & 1, atque inter 1 & 2: non autem eadem ratio; ſed illic, dupla; hic, ſubdupla: ſive, illic innuitur duplo majus; hic, duplo minus. Et quidem, ut illic, licet eadem Differentia, non tamen idem Reſiduum; ſed $5 - 3 = +2$, $3 - 5 = -2$: ita & hic, licet idem Intervallum, non tamen idem Quotiens; ſed 1) 2 (2, 2) 1 ($\frac{1}{2}$ Neque magis ſequitur, Quoniam inter 2 & 1, atque 1 & 2, eſt idem intervallum, ergo & eadem Ratio, ſive Relatio: quam, Quoniam inter Patrem & Filium, atq; Filium & Patrem, eadem eſt diſtantia, Ergo & eadem Relatio. Et quidem, ut, Generatio, commune Fundamentum eſt tum Paternitatis, tum

Filiationis

Filiationis, relationum ſibi mutuo oppoſitarum: Ita & Intervallum idem, eſt commune Fundamentum Rationis (quæ ipſa eſt Relatio) tum Duplæ tum Subduplæ; quæ interim ipſæ ſunt Rationes oppoſitæ, ſive Inverſæ. Sed de his hactenus.

CAP. XXXVII.

De Aurea Regula. Ejuſdem praxis & Demonſtratio. Exempla varia. Altitudinum per umbras menſuratio. Horæ diei, ſub diverſis meridianis, comparatio. Terminorum proportionalium præparatoria Reductio. Cautela, de non-proportionalibus Gravium deſcenſus acceleratus. Effluentis aquæ vis langueſcens. Terminorum proportionalium ordinatio. Terminorum præparatio; per Diviſionem: per multiplicationem. Dubii, de quantitatibus Heterogeneis, ſolutio. Operationis probatio.

AD Proportionum doctrinam, (quam in ſuperioribus fuſius tradidimus,) ſpectat, quæ dicitur, *Aurea Regula*; ſive *Regula Trium* (Quæ ob inſignem ſuam, quam, in tota Matheſi, uſum habet, *Aurea* dici ſolet.) Qua nempe, *Terminorum quatuor proportionalium, datis Tribus, Quartus inveſtigatur.* *Aurea Regula.*

Si enim, *Tertius per ſecundum multiplicetur* (vel hic per illum,) *& productum dividatur per primum; Quotiens exhibebit Quartum quæſitum.* *Praxis.*

Sunto enim quatuor termini proportionales $A . B :: \alpha . \beta$ Datis A, B, α, prodibit $\beta = \frac{B\alpha}{A}$. Cum enim ſit, ex hypotheſi, $A . B :: \alpha . \beta$. adeoque (invertendo) $B . A :: \beta . \alpha$. hoc eſt. $\frac{B}{A} = \frac{\beta}{\alpha}$. Utrinque multiplicando in α, prodibit $\frac{B\alpha}{A} = \beta$. vel $A) B\alpha (\beta$. *Demonſtratio.*

Vel item (ab origine) ſic. Quoniam eſt, ex hypotheſi, $A . B :: \alpha . \beta$. hoc eſt $\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$ multiplicando utrinque in $B\beta$, erit $A\beta = B\alpha$. Adeoque, dividendo utrinque per A, erit $\beta = \frac{B\alpha}{A}$.

Vel, ut tyronibus ſit magis adhuc perſpicuum, cum ſit A . B :: α . β. hoc eſt (per def. proportionalium, ſive, ejuſdem rationis) $\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$. Si æqualia æqualiter multiplicentur, prodibunt æqualia. Adeoq; ſi tum $\frac{A}{B}$, tum $\frac{\alpha}{\beta}$, ducantur in B; fiet, illic $\frac{A}{B} \times B = A$; hic, $\frac{\alpha}{\beta} \times B = \frac{B\alpha}{\beta}$: adeoque $A = \frac{B\alpha}{\beta}$. Iterumque, ductis utriſque in β; fiet, illic $A \times \beta = A\beta$; hic, $\frac{B\alpha}{\beta} \times \beta = B\alpha$: adeoque $A\beta = B\alpha$. (Hoc eſt; Ex quatuor proportionalibus, factum ab extremis æquatur facto a mediis: quod & ſuperius aliquoties demonſtravimus.) Denique, ſi æqualia æqualiter dividantur, orta erunt æqualia. Adeoque, ſi tum Aβ, tum Bα, dividatur per A; erit, illic A) Aβ (β; hic, A) Bα ($\frac{B\alpha}{A}$. adeoque $\beta = \frac{B\alpha}{A}$. quod erat demonſtrandum.

Exſempla. Per hanc Regulam ſolvi ſolent hujuſmodi Problemata.

Si 3 pondo mercium conſtant 5 ſolidos, quot ſolidos conſtabunt earundem mercium pondo 15. Quoniam in quæſtione ſupponitur, merces eſſe æque charas; erit, ut merx ad mercem, ſic precium ad precium; Adeoque ut 3, numerus mercium emptarum; ad 15, numerum emendarum: ita 5 numerus pretii dati; ad numerum pretii quæſiti.

	pondo.	pondo.	ſol.	ſol.
Nempe	3 .	15 ::	5 .	Q.

Vel, quia jam de numeris ubique agitur, erit, alternando, ut merx, ad pretium; ſic merx, ad pretium. Nempe

pondo.	ſol.	pondo	ſol.
3 .	5 ::	15 .	Q.

Solvitur autem, juxta præſentem regulam, ducendo terminum ſecundum in tertium, (ſive, quod perinde eſt, tertium in ſecundum,) unde fit $5 \times 15 = 75$:
& dividendo per primum, 3) 75 (25 = Q. ſive $\frac{75}{3} = 25$ = Q. Adeoq pretium quæſitum eſt, 25 ſolidorum.

$$\begin{array}{r} 15 \\ 5 \\ \hline 3)\,75\,(25 = Q. \end{array}$$

Item

Item, *Si 3 dierum ſtipendium, ſit 2 ſolidi; dierum 12 ſtipendium, quantum erit.* Hoc eſt 3^d, 2^s :: 12^d. Q^s. Multiplicentur invicem 2 in 12, fiet $2 \times 12 = 24$. tum dividendo per 3, prodibit 3) 24 (8 = Q. Dierum itaque 12, ſtipendium eſt 8 ſolidorum.

12
2
3) 24 (8 = Q.

Pariter, *Si Argenti unciæ duæ valeant (in moneta Anglicana) decem ſolidos; quæritur, quanti valebunt unciæ duodecim, ſive una libra Argenti?* Solvitur, ut prius; invento termino quarto Q = 60. Adeoq; una libra argenti valere deprehenditur 60 ſolidos Anglicanos, ſive tres libras monetæ.

2 . 10 :: 12 . Q.
10
2) 120 (60

Pariter, Sicui libeat *altitudinem Turris, in plano erectæ, per umbram æſtimare*; id ita fiat. Erigatur in eodem plano (vel ſaltem parallelo) palus ſeu baculum, notæ longitudinis A (puta pedum 6;) umbram ſplendente Sole projiciens, cujus menſura ſit B, (puta pedum 2.) Eodem tempore, menſuretur umbra Turris, quæ ſit β, (puta pedum 20.) & quæritur, *Quanta ſit Turris altitudo?* Quoniam itaq; in ſimili ſitu, umbræ ſint Altitudinibus proportionales; erit B . A :: β . α. hoc eſt 2 . 6 :: 20 . α. Et, facta operatione, invenitur α = 60 ped. Altitudo Turris. *Altitudinum per umbras menſuratio.*

B . A :: β . α ;   2 . 6 :: 20 . Q.
A   6
B) Aβ ($\frac{A\beta}{B} = \alpha$;   2) 120 (60 = Q.

Similiter, Si quæratur. *Quota ſit hora Athenis, quando eſt, Oxoniæ, octava.* Praſciendum autem hic eſt, ex Geographia, Athenas magis ad Orientem poſitas, quam eſt Oxonia, gradibus (plus minus) triginta. Ideoque citius ad Athenarum Meridianum perventurus eſt Sol, quam ad noſtrum Oxoniæ. *Quæritur* autem, quanto citius? Hoc autem ut expediatur, ſciendum eſt inſuper, Solem horis (circiter) 24, integrum diurnum circulum tranſigere, & ad eundem unde abierat Meridianum redire. Ponuntur autem, in circulo integro, gradus 360. His poſitis, ſic inſtituitur Analogiſmus. *Si Sol, in horis 24, peragat gradus* *Horæ diei, ſub variis meridianis, comparatio.*

360; *quot horis peragit gradus* 30? Adeoque, cùm eâdem æquabili celeritate motum, tranſigat ſpacia temporibus proportionalia; erit, ut gradus 360. ad gradus 30:: ita tempus horarum 24. ad tempus quæſitum, nempe horarum 2, ut ex adjunctâ operatione conſtabit.

gr.	gr.	h.	h.		gr.	h.	gr.	h.
360 .	30 ::	24 .	Q = 2.		360 .	24 ::	30 .	Q = 2.
		30				30		
	360)	720	(2 = Q.		360)	720	(2 = Q.	

Horis itaque duabus (circiter) ad meridianum Athenienſem Sol citius pervenit, quam ad Oxonienſem; adeoque illorum meridies eſt, noſtro, duabus horis prior. Nempe illic, meridies eſt, ſive hora duodecima; dum hic, eſt decima. Adeoque illic hora decima, dum hic octava eſt.

Terminorum per Reductionem præparatio.

Si vero contingat, Homologos terminos, in quæſtione propoſitos, non ejuſdem (ut loquuntur) denominationis eſſe; reducendi prius erunt termini ad denominationem; prius procedat peculiaris hujuſce regulæ praxis. Puta, Si proponatur hujuſmodi quæſtio; *Poſito, quod tres unciæ argenti valeant quindecim ſolidos Anglicanos, quanti valebunt argenti pondo quatuor?* Cùm hic quatuor ſupponantur termini proportionales, quorum duo, pondus reſpiciunt; reliqui duo, valorem; qui autem pondus reſpiciunt, non eandem ſortiantur denominationem; ſed de unciis, ille; hic, de libris ſeu pondo, pronunciat; Reducendi ſunt hi duo termini ad eandem denominationem; priuſquam inſtituatur praxis hac regulâ imperata. Adeoque; vel, pro 3 unciis, ſubſtituendum $\frac{1}{4}$ libræ; (quippe, cum libra contineant duodecim uncias, erunt, tres unciæ, libræ quadrans;) ut quæſtio ſic inſtituatur; *Ut* $\frac{1}{4}$ *libræ, ad* 4 *libras; ſic* 15 *ſolidi, ad valorem quæſitum.* Vel, pro 4 libris, ſubſtituendum, 48 uncias; (quippe, cum libra contineat 12 uncias, 4 libræ continebunt 4 × 12 = 48 uncias,) ut quæſtio ſic inſtituatur; *Ut* 3 *unciæ, ad* 48 *uncias; ſic* 15 *ſolidi, ad valorem quæſitum.* Utrovis modo, prodibit valor quæſitus, 240 ſolidorum; hoc eſt, 12 librarum monetæ Anglicanæ. ut ex operatione patet:

$\frac{1}{4} \cdot 4 :: 15 \cdot Q.$ $\qquad$ $3 \cdot 48 :: 15 \cdot Q.$

$\frac{1}{4})\overline{60}(240 = Q$ (by 4) $\qquad$ $3)\overline{720}(240 = Q.$ (by 15)

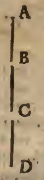
Quomodo autem hujuſmodi inſtituendæ ſint reductiones, ſuperius oſtenſum eſt, ubi de Multiplicatione & Diviſione verba fecimus: nec opus eſt hic repetere.

Verum hic cavendum eſt, nequando fraudi ſit, indeque error ſuboriatur; quod ea tanquam proportionalia habeantur, quæ proportionalia non ſunt. *Cautela de non proportionalibus.*

Exſempli gratia; Si, *poſito, quod pondus gravitate ſua motum, duobus temporis momentis 20 pedes deſcendat; quæratur, quot pedes deſcenſurum ſit momentis* 10. Si fiat hic multiplicatio numeri tertii per ſecundum, atque producti diviſio per primum, prodibit quartus 100. *Gravium deſcenſus acceleratus.*

$$\begin{array}{l} t \quad t \qquad p \quad p \\ 2 . 10 :: 20 . Q = 100 \\ \qquad\quad 10 \\ 2)\overline{200}(100 = Q. \end{array}$$

At ille numerus quæſito non ſatisfacit. Quamvis enim verum ſit, pondus illud eadem velocitate motum, 100 pedes, 10 momentis, peracturum, qua, 20 pedes, 2 momentis peragebat; quia tribus datis 2 . 10 : : 20 . quartus proportionalis eſt 100: attamen haud recte ſic reſponſum iri dicimus; quia grave deſcendens, non æquabili procedit motu, ſed motu accelerato; atque eo quidem celerius quo diutius fuerit in motu. Dico, *quo diutius fuerit in motu*, non autem, (quod vulgo aiunt Phyſici,) *quo ſit centro propius.* Non enim propinquatio ad centrum, ſed ab initio motus elongatio, ſeu potius continuatio motus, eſt cauſa auctæ celeritatis. Nam ſi grave demiſſum a puncto C, cadat ad punctum D; atque idem grave a puncto A demiſſum cadat item ad punctum D, (per lineam A B C D;) utroque caſu tranſibit ſpacium C D, ſed non eadem celeritate; ſegnius enim per illud ſpacium movebitur, ſi moveri, incipiat a puncto C, quam ſi motus, per ſpacium A C inchoatus, per reliquum C D continuetur. At vero ſpacium illud C D, eadem diſtantia abeſt a centro, ſive ab A, ſive a C, motus inchoetur,



Porro

Porro, ſi ponantur æqualia ſpacia, AB, BC, CD: Pondus per ſpacium AB jam delapſum, continuabit motum per ſpacium B C, majori velocitate, quam per ſpacium C D moveretur, ſi motum a puncto C inchoaverit. Propius tamen a centro abeſt ſpacium C D, quam B C: verum illud (B C) ab initio motus (a puncto A inchoati,) magis diſtat, quam ab initio motus (inchoati a C) diſtat ſpacium C D. Quæ omnia tum experienti erunt comprobata, tum ab iis tradita qui de motuum acceleratione acutiſſime ſcripſerunt. Omnes itaq; rationes illæ, quæ apud Phyſicos paſſim occurrunt, de motus naturalis celeritate aucta, a propinquitate ad centrum ductæ, penitus evaneſcunt. Quippe non tam terminus ad quem, quam terminus a quo, in motuum acceleratione ſpectandus erit.

Effluentis aquæ vis langueſcens,

Idem peccabitur, ſi hujuſmodi proponatur problema quaſi hac regula ſolvendum; *Si vas 12 congiorum capax, aqua impleatur; atque, aperto in fundo foramine, exeant in duobus horæ minutis tres congii; quæratur autem, quanto tempore tota exibit aqua?* Propoſita quippe quæſtione, ſi 3 congii effluant in 2 minutis, 12 congii in quot minutis exibunt? Reſpondendum eſſet, juxta hujuſce regulæ tenorem, totam exitarum aquam minutis octo; quia 3 . 2 : : 12 . 8. Atque hoc quidem verum eſſet; modo aqua eadem pergat velocitate exire qua cœperat. At ſecus omnino ſe res habet. Siquidem continue decreſcit exeuntis aquæ celeritas, & quo minus ſupereſt exhauriendum aquæ, eo ſegnius exit. Majore nempe & violentia & velocitate effluet aqua vaſe pleno, quam ſemipleno; quoniam aqua inferius exitura majore mole ſuperioris aquæ premitur. (Non obſtante, quod vulgo admitti ſolet, principio, *De gravi in loco ſuo*, hoc eſt, in rem vel æque vel magis gravem, *minime gravitante.*) Cui fidem facient ipſi oculi, ſi attendatur quanto majore vi & velocitate, ex dolio cerviſiæ pleno, per eundem canalem, exeat cerviſia, quam cum propemodum evacuatur.

3 . 2 : : 12 . Q

$3\overline{)24}$ (8 = Q (with 2 written above)

Quibus autem gradibus vel creſcit velocitas cadentis ponderis, vel decreſcit velocitas per canalem exeuntis aquæ non hujus loci eſt inquirere. Sufficit impræſentiarum monuiſſe, hanc, quam præ manibus habemus, regulam, non niſi de quanti-

quãtitatibus vere proportionalibus procedere. Docet enim, *Datæ quantitati aliam in data ratione ponere.* Nempe quæritur quantitas quarta, quæ, ad tertiam datam, eandem habeat rationem, quam habet ſecunda ad primam; vel, ad quam tertia data, eandem habeat rationem, quam habet prima ad ſecundam.

De Proportione terminis rite ordinandis.

Cavendũ porro, ut datarum trium quantitatum, quælibet ſuo loco ponatur. Non enim promiſcue quælibet in quolibet loco ponenda eſt, ſed in ſuo ſingulæ. Neq; etiã illi ſemper primus debetur, quæ in quæſtione propoſita, primo occurrit. Sæpe enim quæſtio propoſita variis ambagibus & involucris involvitur; quæ prius tollenda ſunt, quã proportio rite conſtituta appareat: Ut in ea quã modo expoſuimus de differentia meridianorũ Athenienſis & Oxonienſis. Sæpe etiam quæſtio minus directe proponitur: Uti ſi expoſita de Argenti valore quæſtio, ita proponeretur, *Si 10 ſolidi Anglicani tantundem valeant atque 2 unciæ argenti; quanti valebunt unciæ* 12? Non enim hic 10, ſed 2, eſt proportionis terminus primus; utut ille in quæſtione primum audiatur.

Ut igitur ſuo ponantur loco ſinguli termini; curandum eſt, ut quatuor quantitates (nempe tres datæ & quarta quæſita) ita diſponantur ut prima ſupponatur eam habere rationem ad reliquarum alteram, quam habet reliqua ad quartam. Secus enim non erunt quatuor proportionales. Adeoque, in quæſtione proxime expoſita, primus terminus nec erit 10, nec 12, ſed 2. Secundus autem, pro libitu, erit vel 10, vel 12. Nempe, Ut 2 unciæ, ad 10 ſolidos ſic 12 unicæ, ad ſolidos quot? Nam ut numerus ponderis prioris, ad numerum valoris ſui dati; ſic supponitur numerus ponderis poſterioris, ad valorem ſuũ quæſitum?

$$2^{unc} . 10^{sol} :: 12^{unc} . Q^{sol} .$$

Vel etiã, ut 2 unciæ, ad 12 uncias; Sic 10 ſolidi, ad ſolidos quot? Nam quæ ratio eſt ponderis ad pondus, ea ſupponitur & valoris ad valorem.

$$2^{unc} . 12^{unc} :: 10^{sol} . Q^{sol} .$$

Atque hæc de terminis ordinandis ſufficiant.

De praxios varietate.

Terminis ita rite ordinatis; perinde omnino eſt (quod & jam diximus) ſive terminum tertium in ſecundum, ſive hunc in illum ducamus. Non modo, quia (quod modo dictum eſt) perinde eſt utrum duorum ſecundo tertiove loco ponamus.

Sed

Sed maxime, quic duorum invicem ducendorum, perinde eſt utrum duorum multiplicatorum eſſe faciamus, aut muliplicandum: quod de multiplicatione ſuperius univerſim dictum eſt.

Sed & perinde eſt, ſive Mutiplicationem, ſive Diviſionem, prius inſtituamus. Sive enim terminorum ſecundi tertiique invicem ductorum productum per primum dividamus; ſive mediorum (ſecundi & tertii) utrovis per primum diviſo, quotientem in reliquum ducamus; perinde omnino eſt: Idem enim utcunque prodibit terminus quartus. (quod & ſuperius de multiplicatione & Diviſione tradidimus univerſim: Nempe, quoties plures continue faciendæ ſunt multiplicationes & Diviſiones, perinde eſt quo ordine inſtituantur.) Nam ſi A . B :: α . C, erit omnino $\frac{B\alpha}{A} = \frac{\alpha B}{A} = \frac{B}{A}\alpha = \frac{\alpha}{A}B = C$. Vel, ſpeciatim in numeris ſi ſit verbi gratia, 3 . 9 :: 6 . 18 . erit $\frac{9\times 6}{3} = \frac{6\times 9}{3} \left(=\frac{54}{3}\right) = \frac{9}{3}\times 6\ (= 3\times 6) = \frac{6}{3}\times 9\ (= 2\times 9) = 18$. Adeoque cujusvis arbitrio permittitur, ut, pro re nata, eo ordine inſtituat operationes, quo magis pro hic & nunc (ut loquuntur) videbitur accommodum.

Interim vero, in tradenda regula, nos (cum aliis) multiplicationem potius præpoſuimus, quà fractionum incommodum melius caveatur. Si enim verbi gratia, inſtituatur proportio 2 . 5 :: 8 . Q. velim autem ſecundum per primum dividere, prodibit 2) 5 ($2\frac{1}{2}$, adeoque terminus tertius 8 per $2\frac{1}{2}$, (numerum fractionis adjectione impeditum) multiplicandus: Si vero mediorum productum $5\times 8 = 40$, dividam per primum, 2) 40 (20, prodibit utrobique numerus integer; eodem autem ſucceſſu, (utut minori labore,) nam tum $8\times 2\frac{1}{2} = 20$, tum $\frac{40}{2} = 20 = Q$. Item ſi inſtituatur proportio 2 . 5 :: 7 . Q. Et velim ſecundum per primum dividere, 2) 5 ($2\frac{1}{2}$, adeoque multiplicare $7\times 2\frac{1}{2}$; vel etiam tertium per primum dividere, 2) 7 ($3\frac{1}{2}$, adeoque mutiplicare $5\times 3\frac{1}{2}$: operatio utrovis modo impeditior erit, quam ſi prius multiplicatis mediis, $5\times 7 = 35$, fiat tandem diviſio per primum 2) 35 ($17\frac{1}{2}$. Quamvis enim & hic tandem prodeat fractio, tamen quæ ulteriorem difficultatem non procreabit;

quippe

quippe illic ſiſtendum eſt, nec alia ſecutura operatio quæ per fractionis adjectionem reddatur perplexior. Si quando autem, jam ante peractas operationes, proſpiciat quis mediorum alterum poſſe per primum ita dividi ut nulla ſuperſit fractio; commodum erit diviſionem illam præmittere; ita enim operationes minoribus numeris exercebuntur. Puta in analogia jam dicta 2 . 5 :: 8 . Q. commodum eſſe poterit, (non quidem ſecundum, ſed) tertium, per primum dividere, 2) 8 (4; & quotientem in reliquum ducere, $4 \times 5 = 20 = Q$.

Terminorum præparatio, per Diviſionem.

Nonnunquam item commodum erit, præcedaneâ terminorum expoſitorum diminutione, operationem expeditiorem reddere. Fit autem illud vel terminum primum & ſecundum, vel primum & tertium, ubi id fieri poſſe perſpicitur, per communem diviſorem dividendo: vel etiam eorum utrumque nonnunquam faciendo. Puta in proportione 6 . 9 :: 8 . Q. Si primum & ſecundum, per 3 dividamus; (eorumque loco quotientes ſubſtituamus;) habebitur proportio 2 . 3 :: 8 . Q. Sin primum & tertium dividamus per 2; prodibit 3 . 9 . 4 . Q. Si denique utrumque fiat; puta tum primo primum & ſecundum dividamus per 3, tum primum (jam abbreviatum) & tertium per 2; prodibit 1 . 3 :: 4 . Q. Eodem ubique ſucceſſu: Erit enim ubique terminus quartus quæſitus Q = 12.

$$\overset{2}{\not{6}} \,.\, \overset{3}{\not{9}} :: 8 \,.\, Q = 12.$$

$$\overset{3}{\not{6}} \,.\, 9 :: \overset{4}{\not{8}} \,.\, Q = 12.$$

$$\overset{1}{\overset{\not{2}}{\not{6}}} \,.\, \overset{3}{\not{9}} :: \overset{4}{\not{8}} \,.\, Q = 12.$$

Similiter in ſpeciebus, five ſymbolis; Si exponatur

Analogiſmus	A B C . A D E :: B E F . Q.
ſubſtituatur	B C . D E :: B E F . Q.
vel etiam	A C . A D E :: E F . Q.
vel denique	C . D E :: E F . Q.

Idem etiam utcunque prodibit terminus quartus, vel qui

tantundem valent; puta $\frac{ADE \times BEF}{ABC} = \frac{DE \times BEF}{BC} =$ $\frac{ADE \times EF}{AC} = \frac{DE \times EF}{C} = DEqF = Q$. Et ſimiliter alibi.

Per Multiplicationem. Aliquando item, multiplicatione, fiet accommoda terminorum præparatio. Si nempe vel primus & ſecundus, vel primus & tertius, eodem communi multiplicatore multiplicentur; (vel etiam utrumque fiat:) quo pacto fractionum moleſtia facile evitatur. Puta ſi exponatur analogiſmus, $\frac{1}{2} . 4 :: 3 . Q$. commode ſubſtituamus vel primi & ſecundi, vel primi & tertii duplum; puta $5 . 8 :: 3 . Q$. vel $5 . 4 :: 6 . Q$. Item pro 3) $\frac{1}{2} . \frac{2}{3} :: \frac{1}{4} . Q$: ſubſtituamus vel $\frac{1}{2} . 2 :: \frac{1}{4}$ Q. vel $\frac{1}{3} . \frac{2}{3} :: 1 . Q$. vel etiam $5 . 2 :: 1 . Q$. Similiter in ſymbolis pro

Analogiſmo $\frac{Aq}{BC} . \frac{DE}{BF} :: \frac{GH}{CF} . Q$

Subſtituamus (ductis primo & tertio in C) $\frac{Aq}{B} . \frac{DE}{BF} :: \frac{GH}{F} . Q$.

vel etiam, (ductis primo & 2° in B) $\frac{Aq}{C} . \frac{DE}{F} :: \frac{GH}{CF} . Q$.

vel potius (utroque facto) $Aq . \frac{DE}{F} :: \frac{CH}{F} . Q$.

vel (ductis item 1° & ſecundo in F). $AqF . DE :: \frac{GH}{F} . Q$.

vel deniq. (ductis adhuc primo & 3° in F) $AqFq . DE :: GH . Q = \frac{DEGH}{AqFq}$.

Commune harum præparationum fundamentum eſt, Quod Multiplorum ad æquimultipla, eadem eſt ratio atque ſimplorum ad ſimpla. Puta $3 \times 2 :: 4 . \times 2 :: 3 . 4$. Item $\frac{3}{2} . \frac{4}{2} :: 3 . 4$. Item $3A . 4A :: 3 . 4$. Et $BA . CA :: B . C$. $\frac{B}{A} . \frac{C}{A} :: B . C$. Et ſimiliter alibi.

Dubium, de Quantitatibus Heterogeneis. Unus adhuc ſupereſt, qui nonnullum morari poſſit, ſcrupulus. Nempe cum certum ſit analogias non raro inſtitui inter quantitates heterogeneas, (puta ut linea A, ad lineam B; ſic pondus α, ad pondus c;) quî poſſit una in alteram multiplicari, aut per eam dividi? item, quid ſit, verbi gratia,

pondus

pondus α in lineam B multiplicare, aut per lineam A dividere? Quale enim factum illud erit cujus longitudo eſt Linea; latitudo pondus? aut qualis quotiens, ubi quæritur quoties pondus α contineat lineam A?

Ejuſdem ſolutio.

Dicimus itaque, non hic tam comparari lineam ad pondus; quæ quidem plane heterogenea ſunt, nec invicem comparanda: ſed rationem duarum inter ſe linearum, ad rationem duorum invicem ponderum: Quæ quidem rationes invicem homogeneæ ſunt, puta dupla, tripla, ſequi altera; ſumpta nempe denominatione a quotiente antecedentis per conſequentem diviſæ. Eſt autem quotiens ille, ut ſuperius traditum eſt, vel numerus, vel ſaltem in genere numeroſo aliquid, ipſiſque numeris homogeneum; puta numerus fractus, aut ſurdus, aut tale quid. Adeoque quum dicitur $A \,.\, B :: \alpha \,.\, \beta$. hoc tantum innuitur, rationem A ad B ſive $\frac{A}{B}$, æqualem eſſe rationi α ad β, ſive $\frac{\alpha}{\beta}$. Vel quod tantundem valet, quotientem quantitatis A per homogeneam B diviſæ, æqualem eſſe quotienti quantitatis α per ſibi homogeneam (utut prioribus heterogeneam) diviſæ. Puta, ſi A ſit linea bipedalis; B, pedalis; erit illa hujus dupla, ſive ut 2 ad 1. Item, ſi α ſit quadripondium; β, bipondium, erit illud hujus duplum, ſive ut 2 ad 1. Quippe erit, tum B) A (2, tum β) α (2. Adeoque $\frac{A}{B} = \frac{\beta}{\alpha} = 2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2}$ &c. Cum itaque nihil hic aliud ſpectetur, quam ratio, ſive etiam quotiens: licebit, pro expoſitis quantitatibus, alias cujuſcunque generis ſubſtituere, quæ in eadem ſint ratione conſtitutæ, ſive eundem quotientem exhibeant; utut expoſitis ſint heterogeneæ. Arithmeticus itaque, quo operationes ſuæ rectius conſtent, pro expoſitis quantitatibus cujuſcunque generis, quarum tantum ratio conſideratur, numeros ſubſtituit (ſive quod numeri inſtar eſt) in eadem ratione conſtitutos. Puta, pro lineis A, B, bipedali & pedali, binos quoſvis in eadem ratione numeros, puta 2, 1; vel 4, 2; vel 6, 3; &c. quia utcunque $\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{A}{B}$: Et, pro expoſitis, æqualia ſubſtituendo; quantitas non immutatur; ſed utrobique tantundem eſt. Proinde itaq;

eſt ſive dicat, ut linea bipedalis A, ad pedalem B; ſive, ut numerus 2 ad 1; ſive ut 4 ad 2; &c. propter Quotientem, adeoque & Rationem, (quæ hic ſolum ſpectatur,) utrobique æqualem. Et quamvis, pro numeris his, nonnunquam & ſymbola iterum ſubſtituat vel etiam quæ linearum erant retineat; ea tamen quaſi pro numeris habet, eaque numerorum inſtar tractat verſatque. Nec tam lineas & pondera, quam numeros, in iiſdem, cum lineis & ponderibus, rationibus, conſtitutos, ſe verſare cogitat. Itaque in exſemplo expoſito, ſi A, B, ſupponantur ſignificare 4, 2: (quia nempe $\frac{A}{B} = \frac{4}{2}$) manentibus interim ſi placet α, β, ut ponderum ſymbolis: tantundem erit dicere $A . B :: \alpha . \beta$; atque $4 . 2 :: \alpha . \beta$. Adeoque ſecundi & tertii rectangulum $B \times \alpha$, eſt $2 \times \alpha$, ſive ponderis α duplum: Et $\frac{B \times \alpha}{A}$, eſt $\frac{2 \times \alpha}{4}$, ſive iſtius dupli quadrans. At vero, pondus duplare, iterumque quadrifariam partiri, nihil abſurdi ſonat.

Vel etiam ſimplicius rem ita explicemus. Quoniam ponuntur tum A, B, tum α, β, quantitates utrobique homogeneæ, (utut hæ ad illæ heterogeneæ;) diviſa quantitate B per A, quotiens erit numerus (ſive quod numeri inſtar eſt) rationem denominans; puta $N = \frac{B}{A}$. Adeoque $\frac{B \times \alpha}{A}$, hoc eſt $\frac{B}{A} \times \alpha$; tantundem eſt atque $N \times \alpha$. Et propterea $\frac{B}{A} \times \alpha = \beta$ vel hoc $N \times \alpha = \beta$: ſignificat quantitatem α (cujuſcunque fuerit generis) ductum in N numerum quæ denominat rationem B ad A, (quantitatem autem quamlibet, per numerum multiplicari, nihil eſt abſurdi,) æquabitur quantitati β: vel quod tantundem eſt, quantitatis α totuplum, quotuplum B eſt τȣ̃ A, (vel etiam tantuplum quantuplum &c.) æquatur quantitati β.

Solent hic nonnulli Arithmetices practicæ Magiſtri, operationis hujus examen adjicere; ut nempe melius conſtet, ſi quod oriatur dubium, num probe peracta ſit operatio. Poteſt autem id variis modis fieri.

Nonnulli ſic inſtituunt: Ductis tum termino primo in

quartum, tum ſecundo in tertium, ſi utrobique idem productum emergat, indicio eſt rem probe peractam eſſe. (Puta ſi propoſitis 3. 5 :: 9. Q. prodeat quartus Q = 15. Facto examine, reperietur 3 × 15 (= 45) = 5 × 9. adeoque 3. 5 :: 9. 15. Proportionales eſſe, atque operationem recte inſtitutam.) Nam ſi, quatuor terminorum, factum ex mediis æquetur facto ab extremis, ſunt illi quatuor termini proportionales. Cujus Demonſtratio ſuperius aliquoties adducta eſt.

Vel ſic. Si terminus quartus, modo inventus, jam fiat primus, atq; operatio inverſe inſtituatur: Nempe ut qui quartus erat ad tertiũ, ita qui ſecundus erat, ad quæſitũ; factaq; operatione prodeat qui fuerat primus, recte proceſſit operatio; ſin minus, alicubi erratum eſt. Puta, ſi, ut prius, expoſitis 3. 5 :: 9. Q, & prodeat quartus Q = 45. adeoque 3. 5 :: 9. 45. Examen inſtituo invertendo proportionem 45. 9 :: 5. Q. (Nam ſi quantitates ſint proportionales, erunt & inverſe proportionales; ut ſupra oſtenſum eſt.) Et quoniam, ſic facta operatione, prodit quæſitus Q = 3, (qui prius fuerat terminus primus, jam autem quartus,) patet operationem recte peractam eſſe. Sed aliis hujuſmodi multis modis inſtitui poteſt hoc examen: Nec tamen tanti eſt ut plures recenſeam.

Atque hactenus de *Aurea Regula* quæ dicitur *Directa*, dictum eſto. De *Regula inverſa* dicetur Capite ſequente.

CAP. XXXVIII.

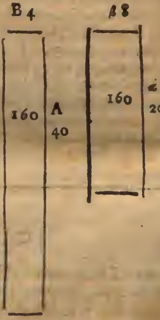
De Aurea Regula reciproca. Ejuſdem a Directa, diſcrimen. Praxis, & Demonſtratio. Quæſtiones per hanc regulam ſolvendæ. De operationum compendiis & probationibus. Reductio hujus ad regulam Directam.

Aurea quæ dicitur *Regula inverſa*, ſive *Reciproca*, eſt ubi expoſitis tribus quantitatibus quæritur quarta reciproce proportionalis. *Regula aurea Inverſa.*

Differt autem a *Regula Directa*, quam præcedente capite expoſuimus ferti- *Quomodo a directa diſ-*

poſuimus, quod ut illic ſpectatur æqualitas Rationum, vel Quotorum; ita hic, æqualitas Rectangulorum ſive Factorum. Nempe illic, ut terminus primus ad ſecundum, ſic tertius ad quartum quæſitum: adeoque idem emergit Quotiens tum ubi primus per ſecundum, tum tertius per quartum dividitur, (quod eſt æqualium ſive earundem rationum genuinum & ſimpliciſſimum criterion.) Hic autem, rectangulum ſive factum a primo in ſecundum ducto, æquatur Rectangulo ſive Facto a tertio in quartum quæſitum ducto.

Exſempli gratia *Si ager longus perticas* 40, *latus* 4, *contineat jugerum terræ*, (Acram, vulgo dicimus:) *quæritur, quam latus ſit oportet, qui nonniſi* 20 *perticas longus eſt, ut eadem terræ quantitas habeatur?* Manifeſtum hic eſt, cum utrobique æqualis terræ quantitas ſpectetur, quæ ex latitudine & longitudine comparatis emergit; quò in altero longitudo major ſit, eo minor ſit latitudo neceſſe eſt, & contra; ut alterius defectum alterius exceſſus compleat. Adeoque, ut prioris longitudo ad latitudinem ſuam, ſic poſterioris longitudo (non directe, nam ſic prodiret figura ſimilis, non æqualis, ſed) reciproce ad ſuam latitudinem. Sive, ut longitudo ſecundi ad longitudinem primi, ſic primi latitudo ad latitudinem ſecundi. Nam hoc eſt, *reciproce proportionales eſſe*, per 2 *def.* 5. Adeoque ſi prioris longitudo ponatur A, latitudo B; ſecundi longitudo α, latitudo β: erit $A . \alpha :: \beta . B$. ſive $\beta . B :: A . \alpha$. ut ſit $A \times B = \alpha \times \beta$.



Ejus praxis. Hujuſce Regulæ praxis hæc eſt. *Si, trium terminorum, quod fit ex primo in ſecundum ducto, dividatur per tertium, prodibit quartus reciproce proportionalis.* Adeoque, cum in expoſito exſemplo, prioris agri

agri longitudo A, ducta in ſuam latitudinem B, faciat rectangulum AB; facta diviſione per α ſecundi longitudinem, prodibit hujus latitudo quæſita $\beta = \frac{AB}{\alpha}$. Vel, in numeris, cum prioris longitudo 40, ducta in latitudinem ſuam 4, fit $160 = 40 \times 4$. facta diviſione per datam ſecundi longitudinem 20, prodibit hujus latitudo $8 = \frac{160}{20}$. In hoc itaque differt praxis hæc, a praxi præcedentis regulæ, directæ; quod illic, terminus primus eſt diviſor; hic, tertius.

$$\begin{array}{r} A \\ \times B \\ \alpha)\overline{AB}(\beta \end{array} \qquad \begin{array}{r} 40 \\ \times\ 4 \\ 20)\overline{160}(8 \end{array}$$

Demonſtratio praxeos hæc erit. Quoniam, ex hypotheſi, ponitur rectangulum primi in ſecundum, æquale rectangulo tertii in quartum; hoc eſt $A \times B = \alpha \times \beta$, ſive $AB = \alpha\beta$; erit utrinque dividendo per α, $\frac{AB}{\alpha} = \beta$. *Demonſtratio.*

Quæſtiones per hanc regulam ſolvendæ, ab iis quæ ſolvendæ ſunt per præcedentem; ſic diſtinguant Tyrones. Si, ex natura quæſtionis, quo major ſit terminus tertius, eo major requiratur quartus; regulæ directæ opus eſt: Sin, quo major tertius eo minor requiritur quartus, ſive quo minor tertius, eo major quartus, inverſæ regulæ opus erit. *Quæſtiones per hanc regulam ſolvendæ.*

Verbi gratia; *Si quis 12 horis conficiat milliaria 20; idem horis 6, quot conficiet.* Quoniam, hic manifeſtum eſt, longiori tempore plura conficienda milliaria; quo major eſt terminus tertius (numerus horarum) eo major erit & quartus, numerus milliarium quæſitus. Et propterea, per auream regulam directam, invenitur terminus quartus quæſitus, 10.

$$12 : 20 :: 6 . Q = 10. \qquad \begin{array}{r} 6 \\ 12)\overline{120}(10 = Q. \end{array}$$

Contra vero; *Opus a viris 12, diebus 20 perficiendum; ſi aggrediantur viri 6, quot illi diebus hoc perficient?* Quoniam liquet, ex quæſtionis natura, pauciores viros nonniſi pluribus diebus idem opus confecturos; adeoque

$$12 . 20 : 6 . Q = 40 \qquad \begin{array}{r} 12 \\ 6)\overline{240}(40 = Q \end{array}$$

quo

quo minor eſt terminus tertius, (virorum numerus;) eo major futurus ſit terminus quartus, (numerus dierum requiſitus;) per regulam itaque inverſam, quærendus eſt terminus quartus, 40.

Eodem modo: *Si tapeti lato pedes 9, longo 20; obducendus pannus vilior, qui totam tegat, latus pedes 3; quæritur quot pedes longus eſſe debeat, ut negotio ſufficiat?* quoniam hic manifeſtum ſit, quo minorem habeat latitudinem pannus hic, eo majorem requiri longitudinem, qua latitudinis defectus ſuppleatur: per regulam inverſam, reperietur longitudo quæſita, pedum 60. Atque in aliis pariter.

$9 \cdot 20 : 3 \cdot Q = 60.$

$$\begin{array}{r} \underline{9\,\,\,}\\ 3\,)\,180\,(\,60 = Q \end{array}$$

De operationum compendiis; & probationibus.

Quæ autem operationum compendia, de Regula directa, in Capite præcedente oſtendimus, (ſive quoad ordinem operationum perficiendarum, ſive etiam terminorum præcedaneam reductionem,) etiam hic, mutatis mutandis, locum habent. Nec opus eſt ut ea ſigillatim hic repetam; ſed potius ut lectoris ſagacitati permittatur, quæ illic dicta ſunt his aptare. Quod & de Probationibus illic traditis, intellectum velim; quas, qui tanti eſſe putet, etiam huc, mutatis mutandis, non difficulter transferat.

Reductio hujus Regulæ ad directam.

Notandum denique, *Proportionem Reciprocam, in Directam converſum iri, ſi qui in reciproca eſt terminus tertius, ſtatuatur in directa primus.* Nempe ſi ſit

In proportione reciproca $9 \cdot 20 : 3 \cdot Q = 60.$

Erit in proportione directa $3 \cdot 20 :: 9 \cdot Q = 60.$

Reciproce.	Directe.
$9 \cdot 20 : 3 \cdot Q = 60.$	$3 \cdot 20 :: 9 \cdot Q = 60$
$\begin{array}{r} \underline{9\,\,\,}\\ 3\,)\,180\,(\,60 = Q \end{array}$	$\begin{array}{r} \underline{9\,\,\,}\\ 3\,)\,180\,(\,60 = Q \end{array}$

Atque hactenus de Aurea Regula ſimplici; ſive Regula Trium; tam directa, quam Reciproca. Sequitur ut de Multiplici verba faciam; ubi nempe plures quam tres occurrunt termini, ipſaque Proportionis Regula ſæpius repetenda. Eſtque ea, vel,

vel, quæ vocatur *Aurea Regula compoſita*; vel quæ *Regula Societatis* dicitur. De quibus in ſequentibus Capitibus dicetur.

CAP. XXXIX.

De *Aureâ Regula compoſita. Tum ubi omnes Analogiæ componentes, ſunt directæ: tum ubi altera, vel etiam plures, ſunt reciprocæ.*

REgula quæ dicitur *Aurea Compoſita*, ex duabus vel pluribus Analogiis conſtat. Adeoque Regulæ ſimplicis operationem aliquoties iterandam eſſe (ſaltem virtualiter) poſtulat. Iiſdem autem nititur principiis Regulæ compoſitæ, atq; ſimplicis proceſſus: ut non ſit opus longa præparatione, ſed exſemplis aliquot operandi methodum exhibere. *Regula Aurea Compoſita.*

Eſto hoc Exſemplum. *Si 4 Academici, in 3 Menſibus, expendant 20 libras; quot libras expendent Academici 6, in menſibus 12, ſive anno integro?*

4 . 20 : : 6 .
3 . 12 . Q

Manifeſtum eſt, in hac quæſtione, duplicem Analogiam reperiri. Comparantur enim tum perſonæ perſonis, tum tempus tempori, ut ex utriſque collatis reperiatur ratio expenſarum.

Reſoluta itaque hac Analogia compoſitâ in duas ſimplices; Dicimus Primo, *Si 4 Academici, expendant 20 libras; quot libras expendent 6 Academici eodem tempore?* (Adeoque ſeponimus pauliſper diverſorum in quæſtione temporum conſiderationem.) Et, operatione peractâ, patebit, 30 libras, a 6 Academicis, expendendas eodem tempore quo Academici 4 expendunt libras 20: hoc eſt, ex hypotheſi, in 3 menſibus.

4 . 20 : : 6 . q.
6
4) 120 (30 = q.

Deinde, (reſumpta jam temporis conſideratione) *Si ſex illi Academici expendant* (uti jam inventum eſt) *in 3 menſibus*, 30 *libras; quot libras expendent in menſibus* 12? (ubi terminus

3 . 30 : : 12 . Q
30
3) 360 (120 = Q.

quartus, priori analogia inventus; ſit, in ſecunda analogia, ſecundus: ut tandem habeatur terminus ultimo quærendus.) Facta itaque operatione, prodibit Q = 120, numerus quæſitus principalis.

Expoſita itaque analogia compoſita reſolvitur in has binas ſimplices.

$$\begin{matrix} 4 . 20 :: 6 . \\ 3 \quad\quad 12 . Q. \end{matrix}$$

Idem autem omnino tandem prodiret, ſi prius temporis, deinde autem perſonarum collatio inſtituatur.

$$\begin{matrix} 4 . 20 :: 6 . q . \\ 3 . q :: 12 . Q. \end{matrix}$$

Puta Primo, Si (quatuor expoſiti Academici) *expendant, menſibus* 3 *libras* 20; *iidem menſibus* 12 *expendent quot libras?* Reſpondendum, 80. Deinde, *ſi* (in tribus menſibus expoſitis) 4 *Academici expendant* (ut jam ex priori quæſito liquet) 80 *libras*; *quot libras* (eodem tempore) *expendent* 6? Reſpondendum (ut ex operatione peracta liquet) libras 120.

$$3 . 20 :: 12 . q = 80. \qquad 4 . q = 80 :: 6 . Q = 120.$$

$$\begin{matrix} 12 \\ 3)240(80 = q \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 6 \\ 4)480(120 = Q \end{matrix}$$

Reſoluta nempe analogia compoſita; [Si 3 menſibus, 4 viri expendant libras 20; menſibus 12, viri 6, quot expendent?] in binas ſimplices; alteram de temporum, alteram de perſonarum, collatione.

Compoſita	Simplices.
3 . 20 :: 12	3 . 20 :: 12 . q = 80.
4 6 . Q.	4 . q = 80 :: 6 . Q = 120.

Totius proceſſus ratio, ex ſe ſatis patet; cum non aliud ſit quam operatio ſimplex bis peracta; nec nova indigebit demonſtratione.

Praxis altera. Quod autem binis Aureæ Regulæ operationibus jam peractum eſt, *Poteſt id ipſum una operatione compoſita peragi: Si nempe utriuſq; analogiæ ſimplicis primi termini invicem ducti, habeantur pro termino primo analogiæ compoſitæ: & ſimiliter ſimplicium termini tertii, invicem*

invicem ducti, pro tertio compoſitæ: terminus autem alter, quæſito homologus, pro ſecundo.

Verbi gratia; in exſemplo prius expoſito: *Si 4 viri, 3 menſibus, expendant libras 20; 6 viri, 12 menſibus, expendent quot libras?*

Pro termino primo analogiæ compoſitæ, ſumatur 12 = 4×3, (nempe qui fit ex numero virorum primorum in numerum primorum menſium ducto;) pro tertio, 72 = 6×12, (qui fit ex numero ſecundorum virorum, in numerum ſuorum menſium ducto;) pro ſecundo autem, 20, numerus nempe librarum, hoc eſt, terminus quæſito homologus. Adeoque totus proceſſus ſic conſtabit

$$\begin{array}{l} 4 . 20 :: 6 \\ \underline{\times 3} \quad\quad \underline{\times 12 .}\ Q. \\ 12 . 20 :: 72 .\ Q = 120. \\ \quad\quad \underline{20} \\ 12)\overline{1440}(120 = Q \end{array}$$

Similiter in Symbolis: *Si perſonæ P, tempore T, expendant libras L, perſonæ π, tempore τ, expendent quot?* puta λ, numerum quæſitum. Dico, erit ut PT (= P×T) ad L; ſic πτ (= π×τ) ad λ, numerum quæſitum. Nempe PT) πτ×L (λ. Proceſſus hic erit.

$$\begin{array}{l} P . L :: \pi \\ \underline{\times T} \quad\quad \underline{\times \tau .\ \lambda .} \\ PT . L :: \pi\tau .\ \lambda = \dfrac{\pi\tau \times L}{PT}. \\ \quad\quad \underline{\times L} \\ PT)\pi\tau \times L \left(\dfrac{\pi\tau}{PT} L = \lambda ; \right. \end{array}$$

Operationis hujus compoſitæ Ratio, ſive Demonſtratio, dependet ab ejuſdem cum præcedente convenientia. Cum enim, ut ſupra oſtenſum eſt, Analogia compoſita, reſolvitur in binas ſimplices *Ejuſdem demonſtratio.*

$$\begin{array}{ll} P . L :: \pi & P . L :: \pi . q . \\ T \quad\quad \tau . \lambda & T . q :: \tau . \lambda ; \end{array}$$

Erit primo $q = \frac{\pi \times L}{r}$. Adeoque 2°, $\lambda = \frac{\tau q}{T} = \frac{\tau \times \pi L}{T \times P}$ $= \frac{\pi \tau L}{PT}$ · quod erat demonſtrandum.

Eodem plane modo ſtatuendum eſt, ſi exponatur Analogia etiam adhuc magis compoſita. Puta *Si trabis ligneæ, cujus longitudo, pedum* $4 = A$; *latitudo, pedum* $3 = B$; *altitudo, pedum* $2 = C$; *pondus ſit librarum* $240 = D$: *trabs alia longa pedes* $10 = \alpha$; *lata, pedes* $4 = \beta$; *alta, pedem* $1 = \gamma$; *quanti erit ponderis?* (puta, librarum δ.) Dico, ut $A \times B \times C$, ad D; ſic $\alpha \times \beta \times \gamma$, ad δ; $= \frac{\alpha\beta\gamma}{ABC} D$. Hoc eſt $\frac{10 \times 4 \times 1 = 40}{4 \times 3 \times 2 = 24} \times 240 = 400$. Quod patet, reſoluta analogia compoſita, in tres ſimplices.

$A.D :: \alpha.$	$A.D :: \alpha.q.$	$4.240 :: 10.600.$
$B. \quad \beta.$	$B.q :: \beta.\mathfrak{Q}.$	$3.600 :: 4.800.$
$C. \quad \gamma.\delta.$	$C.\mathfrak{Q} :: \gamma.\delta.$	$2.800 :: 1.400.$

Nam primo $q = \frac{\alpha}{A} D$. adeoque ſecundo $\mathfrak{Q} = \frac{\beta}{B} q = \frac{\alpha\beta}{AB} D$. Et tertio $\delta = \frac{\gamma}{C} \mathfrak{Q} = \frac{\alpha\beta\gamma}{ABC} D$. Quod erat demonſtrandum.

Notandum autem, quod quē nos in præcedentibus 2dum appellavimus terminum, fieri poteſt tertius; adeoque quem tertium appellavimus, ſecundus: hos enim duos terminos, in Proportione directa, pro arbitrio ſedes mutare poſſe, jam ſupra univerſaliter diximus. Adeoque perinde omnino eſt ſive dicamus $PT.L :: \pi\tau.\lambda.$ ſive $PT.\pi\tau :: L.\lambda.$ Item perinde eſt ſive dicamus $ABC.D :: \alpha\beta\gamma.\delta.$ ſive $ABC.\alpha\beta\gamma :: D.\delta.$ quod monuiſſe ſufficiat.

Atque hæc quidem dixiſſe ſufficiat de Proportionum Regula compoſita, dummodo ſingulæ Analogiæ componentes ſint directæ.

Analogia ex directa & inverſa, compoſita.

Fieri autem poteſt ut Analogiarum componentium altera directa ſit, altera Reciproca.

Exempli

Exſempli gratia. Si 36 = A, *libræ panis, ſufficiant militibus* 3 = B, *in dies* 6 = C; *libræ* 180 = α, *militibus* 9 = β, *in quot dies ſufficient*? puta in dies γ.

Eſt quidem hic analogiarum altera directa, nempe *Si libræ* 36 = A, *ſufficiant in dies* 6 = C; *libræ* 180, *ſufficient in dies quot*? puta q = 30. At altera eſt Reciproca, nempe *Si militibus* 6 = B *ſufficiant in dies* 30 = q; *militibus* 9 = β, *ſufficient in dies quot*? certe non niſi in dies pauciores, propter plures milites, nempe, in dies 10. Adeoque illic, regula directa eſt adhibenda; hic, reciproca.

Nēpe 36 . 6 :: 180   36 . 6 :: 180 . q = $\frac{6}{36}$ × 180 = 30.
  3   : 9 . Q   3 . q : 9 . Q = $\frac{3}{9}$ × q = $\frac{3}{9}$ × 30 = 10.

Item A . C :: α   A . C :: α . q.
  B : β . γ.   B . q : β . γ.

Adeoque $q = \frac{\alpha}{A} C$. Et $\gamma = \frac{B}{\beta} \times q = \frac{B\alpha}{\beta A} C$.

Si autem libeat pro duabus his operationibus, unam compoſitam ſubſtituere: *Factus ex duabus diviſoribus* (puta termino primo analogiæ directæ, & tertio reciprocæ) *erit compoſitus diviſor*; (*adeoque in analogia directa, terminus primus*:) *factuſque ex multiplicatoribus, compoſitus multiplicator*: (*Adeoque, in eadem analogia terminus tertius, in ſecundum ducendus.*) Hoc eſt, (in expoſita quæſtione,) $A\beta . C :: \alpha B . \gamma = \frac{\alpha B}{A\beta} C.$ ut prius.

$A\beta . C :: B\alpha . \gamma = \frac{B\alpha}{A\beta} C.$

A . C :: α
B C : α . γ.

Et quidem, quotcunque fuerint analogiæ componentes, ſive directæ item, ſive reciprocæ, id univerſaliter dicendum: *Ex omnibus Diviſoribus* (nempe terminis primis analogiarum directarū, & tertiis reciprocarum,) *continue ductis, fiat Diviſor; ex reliquis omnibus* *Regula generalis.*

 nibus

ibus continue ductis, Dividendus ; adeoque Quotiens exhibebit terminnum quæſitum.

Atque hactenus de Regula Aurea Compoſita, ſequitur *Regula Societatis*, dicta.

CAP. XL.

De Regula Societatis : Tum ſine Tempore ; tum cum Tempore.

Regula quæ dicitur *Societatis*; cum nihil aliud quam ſit regula Aurea pluries repetita : non opus erit ut longa diſquiſitione illam exponam aut etiam novas exquiram operationum demonſtationes.

Regula ſocietatis. Eſt autem ea hujuſmodi ; *Ubi data in duobus terminis ratione, tertio loco quotlibet, ut res ferat, poſitis, totidem quæruntur quarti proportionales* ; dici hæc ſolet *Regula ſocietatis*. Nomen ſuum inde forſan ſortita, quod in Mercatorum conſortiis, ſive ſocietatibus maximi uſus eſſe ſoleat.

Sine tempore. Exſemplum eſto. *Si tres mercatores ſocietatem ineuntes ſortem ita componant ut primus A conferat libras* 60 ; *ſecundus B, libras* 50 ; *tertius* C, *libras* 40 ; (Adeoque omnium aggregatum , lib. 150. $= 60 + 50 + 40$) *Lucrum vero negotiando conquiſitum ſit lib.* 30. *Quæritur, quantum inde cuique debeatur ?*

Quo autem huic quæſito ſatisfiat, nihil aliud requiritur quam ut Aureæ regulæ praxis toties repetatur quoties res ipſa poſtulat. Nempe ſi totius ſortis ſummæ 150, lucrum ſit lib. 30. quantum erit lucrum partis A, ſeu 60 ? quantum partis B ſeu 50 ? quantum C ſeu 40 ? Et, facta toties aureæ regulæ operatione, parti A convenire comperientur lib 12 : parti B lib. 10. parti C lib 8 Nam ut 150, ad 30 ; ſic 60, ad 12 ; & 50, ad 10 ; & 40, ad 8. Vel, in ſymbolis, ut conjunctim $A + B + C = Z$, ad L, ſic, ſigillatim, A, B, C, ad $\frac{LA}{Z}$, $\frac{LB}{Z}$, $\frac{LC}{Z}$.

$$\left.\begin{matrix}60\\50\\40\end{matrix}\right\} = 150 . 30 :: \left\{\begin{matrix}60 . 12.\\50 . 10.\\40 . 8\end{matrix}\right. \quad \left.\begin{matrix}A\\B\\C\end{matrix}\right\} = Z . L :: \left\{\begin{matrix}A . \frac{LA}{Z}\\B . \frac{LB}{Z}\\C . \frac{LC}{Z}\end{matrix}\right.$$

Atque hæc eſt quam vocant *Regulam Societatis ſine tempore.*

Si autem, præter diverſitatem ſortis congeſtæ, accedat etiam diverſitas temporis, vocari ſolet *Regula ſocietatis cum Tempore.* Et ſicuti, prius, repetenda erat *Aurea Regula ſimplex*: Ita hic. *Aurea regula compoſita* erit repetenda. *Cum tempore*

Puta ſi collata ſors prima 60 = A, per menſes 4 = α; ſecunda 50 = B, per menſes 3 = β; tertia, 30 = C, per menſes 2 = γ: ſitque totius negotiationis lucrum 30 = L: quæritur quantum cuique debetur?

Cum itaque hic compoſita ratio ſit, nempe ex ratione ſortis ad ſortē, & temporis ad tempus: Multiplicandæ ſortes ſingulæ in ſuum tempus, puta $A \times \alpha = 60 \times 4 = 240$. $B \times \beta = 50 \times 3 = 150$. $C \times \gamma = 30 \times 2 = 60$. Et numeri ſic facti, conjunctim ſumpti, conſtituent terminum primum, $A\alpha + B\beta + C\gamma = 240 + 150 + 60 = 450 = Z$. Iidemque ſigillatim, totidem terminos tertios: Ipſumque lucrum, terminum ſecundum, Adeoque convenient primo, 16; ſecundo, 10; tertio 4. Et in ſymbolis pariter.

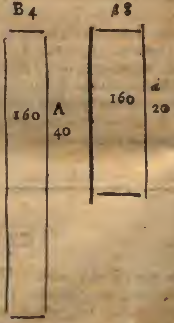
$$\left.\begin{matrix}60 \times 4 = 240\\50 \times 3 = 150\\30 \times 2 = 60\end{matrix}\right\} = 450 . 30 :: \left\{\begin{matrix}240 . 16.\\150 . 10.\\60 . 4.\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}A\alpha\\B\beta\\C\gamma\end{matrix}\right\} = Z . L :: \left\{\begin{matrix}A\alpha . \frac{A\alpha L}{Z}.\\B\beta . \frac{B\beta L}{Z}.\\C\gamma . \frac{C\gamma L}{Z}.\end{matrix}\right.$$

Atque

poſuimus, quod ut illic ſpectatur æqualitas Rationum, vel Quotorum; ita hic, æqualitas Rectangulorum ſive Factorum. Nempe illic, ut terminus primus ad ſecundum, ſic tertius ad quartum quæſitum: adeoque idem emergit Quotiens tum ubi primus per ſecundum, tum tertius per quartum dividitur, (quod eſt æqualium ſive earundem rationum genuinum & ſimpliciſſimum criterion.) Hic autem, rectangulum ſive factum a primo in ſecundum ducto, æquatur Rectangulo ſive Facto a tertio in quartum quæſitum ducto.

Exſempli gratia *Si ager longus perticas* 40, *latus* 4, *contineat jugerum terræ,* (Acram, vulgo dicimus:) *quæritur, quam latus ſit oportet, qui nonniſi* 20 *perticas longus eſt, ut eadem terræ quantitas habeatur?* Manifeſtum hic eſt, cum utrobique æqualis terræ quantitas ſpectetur, quæ ex latitudine & longitudine comparatis emergit; quò in altero longitudo major ſit, eo minor ſit latitudo neceſſe eſt, & contra; ut alterius defectum alterius exceſſus compleat. Adeoque, ut prioris longitudo ad latitudinem ſuam, ſic poſterioris longitudo (non directe, nam ſic prodiret figura ſimilis, non æqualis, ſed) reciproce ad ſuam latitudinem. Sive, ut longitudo ſecundi ad longitudinem primi, ſic primi latitudo ad latitudinem ſecundi. Nam hoc eſt, *reciproce proportionales eſſe,* per 2 *def.* 5. Adeoque ſi prioris longitudo ponatur A, latitudo B; ſecundi longitudo α, latitudo β: erit $A . \alpha :: \beta . B$. ſive $\beta . B :: A . \alpha$. ut ſit $A \times B = \alpha \times \beta$.



Ejus praxis. Hujuſce Regulæ praxis hæc eſt. *Si, trium terminorum, quod ſit ex primo in ſecundum ducto, dividatur per tertium, prodibit quartus reciproce proportionalis.* Adeoque, cum in expoſito exſemplo, prioris

agri

agri longitudo A, ducta in ſuam latitudinem B, faciat rectangulum A B; facta diviſione per α ſecundi longitudinem, prodibit hujus latitudo quæſita $\beta = \frac{AB}{\alpha}$. Vel, in numeris, cum prioris longitudo 40, ducta in latitudinem ſuam 4, fit $160 = 40 \times 4$. facta diviſione per datam ſecundi longitudinem 20, prodibit hujus latitudo $8 = \frac{160}{20}$. In hoc itaque differt praxis hæc, a praxi præcedentis regulæ, directæ; quod illic, terminus primus eſt diviſor; hic, tertius.

$$\begin{array}{r} A \\ \times B \\ \hline \alpha)\,AB\,(\beta \end{array} \qquad \begin{array}{r} 40 \\ \times\ 4 \\ \hline 20)\,160\,(8 \end{array}$$

Demonſtratio praxeos hæc erit. Quoniam, ex hypotheſi, ponitur rectangulum primi in ſecundum, æquale rectangulo tertii in quartum; hoc eſt $A \times B = \alpha \times \beta$, ſive $AB = \alpha\beta$; erit utrinque dividendo per α, $\frac{AB}{\alpha} = \beta$. *Demonſtratio.*

Quæſtiones per hanc regulam ſolvendæ, ab iis quæ ſolvendæ ſunt per præcedentem; ſic diſtinguant Tyrones. Si, ex natura quæſtionis, quo major ſit terminus tertius, eo major requiratur quartus; regulæ directæ opus eſt: Sin, quo major tertius eo minor requiritur quartus, ſive quo minor tertius, eo major quartus, inverſæ regulæ opus erit. *Quæſtiones per hanc regulam ſolvendæ.*

Verbi gratia; *Si quis 12 horis conficiat milliaria 20; idem horis 6, quot conficiet.* Quoniam, hic manifeſtum eſt, longiori tempore plura conficienda milliaria; quo major eſt terminus tertius (numerus horarum) eo major erit & quartus, numerus milliarium quæſitus. Et propterea, per auream regulam directam, invenitur terminus quartus quæſitus, 10.

$$12 : 20 :: 6 . Q = 10. \qquad \begin{array}{r} 6 \\ \hline 12)\,120\,(10 = Q. \end{array}$$

Contra vero; *Opus a viris 12, diebus 20 perficiendum; ſi aggrediantur viri 6, quot illi diebus hoc perficient?* Quoniam liquet, ex quæſtionis natura, pauciores viros nonniſi pluribus diebus idem opus confecturos; adeoque

$$12 . 20 : 6 . Q = 40 \qquad \begin{array}{r} 12 \\ \hline 6)\,240\,(40 = Q \end{array}$$

quo

quo minor eſt terminus tertius, (virorum numerus;) eo major futurus ſit terminus quartus, (numerus dierum requiſitus;) per regulam itaque inverſam, quærendus eſt terminus quartus, 40.

Eodem modo: *Si tapeti lato pedes 9, longo 20; obducendus pannus vilior, qui totum tegat, latus pedes 3; quæritur quot pedes longus eſſe debeat, ut negotio ſufficiat?* quoniam hic manifeſtum ſit, quo minorem habeat latitudinem pannus hic, eo majorem requiri longitudinem, qua latitudinis defectus ſuppleatur: per regulam inverſam, reperietur longitudo quæſita, pedum 60. Atque in aliis pariter.

$$9 . 20 : 3 . Q = 60.$$

$$3\,)\,\overset{9\,\ast}{180}\,(\,60 = Q$$

De operationum compendiis; & probationibus. Quæ autem operationum compendia, de Regula directa, in Capite præcedente oſtendimus, (ſive quoad ordinem operationum perficiendarum, ſive etiam terminorum præcedaneam reductionem,) etiam hic, mutatis mutandis, locum habent. Nec opus eſt ut ea ſigillatim hic repetam; ſed potius ut lectoris ſagacitati permittatur, quæ illic dicta ſunt his aptare. Quod & de Probationibus illic traditis, intellectum velim; quas, qui tanti eſſe putet, etiam huc, mutatis mutandis, non difficulter tranſferat.

Reductio hujus Regulæ ad directam. Notandum denique, *Proportionem Reciprocam, in Directam converſum iri, ſi qui in reciproca eſt terminus tertius, ſtatuatur in directa primus.* Nempe ſi ſit

In proportione reciproca $9 . 20 : 3 . Q = 60.$

Erit in proportione directa $3 . 20 :: 9 . Q = 60.$

Reciproce.	Directe.
$9 . 20 : 3 . Q = 60.$	$3 . 20 :: 9 . Q = 60$
$3\,)\,\overset{9}{180}\,(\,60 = Q$	$3\,)\,\overset{9}{1\;8\;0}\,(\,60 = Q$

Atque hactenus de Aurea Regula ſimplici; ſive Regula Trium; tam directa, quam Reciproca. Sequitur ut de Multiplici verba faciam; ubi nempe plures quam tres occurrunt termini, ipſaque Proportionis Regula ſæpius repetenda. Eſtque ea, vel,

vel, quæ vocatur *Aurea Regula compoſita*; vel quæ *Regula Societatis* dicitur. De quibus in ſequentibus Capitibus dicetur.

CAP. XXXIX.

De Aureâ Regula compoſita. Tum ubi omnes Analogiæ componentes, ſunt directæ: tum ubi altera, vel etiam plures, ſunt reciprocæ.

Regula quæ dicitur *Aurea Compoſita*, ex duabus vel pluribus Analogiis conſtat. Adeoque Regulæ ſimplicis operationem aliquoties iterandam eſſe (ſaltem virtualiter) poſtulat. Iiſdem autem nititur principiis Regulæ compoſitæ, atq; ſimplicis proceſſus: ut non ſit opus longa præparatione, ſed exſemplis aliquot operandi methodum exhibere. *Regula Aurea Compoſita.*

Eſto hoc Exſemplum. *Si 4 Academici, in 3 Menſibus, expendant 20 libras; quot libras expendent Academici 6, in menſibus 12, ſive anno integro?*

4 . 20 : : 6 .
3 .   12 . Q

Manifeſtum eſt, in hac quæſtione, duplicem Analogiam reperiri. Comparantur enim tum perſonæ perſonis, tum tempus tempori, ut ex utriſque collatis reperiatur ratio expenſarum.

Reſoluta itaque hac Analogia compoſitâ in duas ſimplices; Dicimus Primo, *Si 4 Academici, expendant 20 libras; quot libras expendent 6 Academici eodem tempore?* (Adeoque ſeponimus pauliſper diverſorum in quæſtione temporum conſiderationem.)

4 . 20 : : 6 . q.
6
4) 120 (30 = q.

Et, operatione peracta, patebit, 30 libras, a 6 Academicis, expendendas eodem tempore quo Academici 4 expendunt libras 20: hoc eſt, ex hypotheſi, in 3 menſibus.

Deinde, (reſumpta jam temporis conſideratione) *Si ſex illi Academici expendant* (uti jam inventum eſt) *in 3 menſibus*, 30 *libras; quot libras expendent in menſibus* 12? (ubi terminus

3 . 30 : : 12 . Q
30
3) 360 (120 = Q.

quartus

quartus, priori analogia inventus; ſit, in ſecunda analogia, ſecundus: ut tandem habeatur terminus ultimo quærendus.) Facta itaque operatione, prodibit Q = 120, numerus quæſitus principalis.

Expoſita itaque analogia compoſita reſolvitur in has binas ſimplices.

4 . 20 : : 6 .
3   12 . Q.

Idem autem omnino tandem prodiret, ſi prius temporis, deinde autem perſonarum collatio inſtituatur.

4 . 20 : : 6 . q .
3 . q : : 12 . Q.

Puta Primo, Si (quatuor expoſiti Academici) *expendant, menſibus* 3 *libras* 20; *iidem menſibus* 12 *expendent quot libras?* Reſpondendum, 80. Deinde, *ſi* (in tribus menſibus expoſitis) 4 *Academici expendant* (ut jam ex priori quæſito liquet) 80 *libras; quot libras* (eodem tempore) *expendent* 6? Reſpondendum (ut ex operatione peracta liquet) libras 120.

3 . 20 : : 12 . q = 80.   4 . q = 80 : : 6 . Q = 130.
  12   6
3) 240 (80 = q   4) 480 (120 = Q

Reſoluta nempe analogia compoſita; [Si 3 menſibus, 4 viri expendant libras 20; menſibus 12, viri 6, quot expendent?] in binas ſimplices; alteram de temporum, alteram de perſonarum, collatione.

Compoſita	Simplices.
3 . 20 : : 12	3 . 20 : : 12 . q = 80.
4 6 . Q.	4 . q = 80 : : 6 . Q = 120.

Totius proceſſus ratio, ex ſe ſatis patet; cum non aliud ſit quam operatio ſimplex bis peracta; nec nova indigebit demonſtratione.

Praxis altera. Quod autem binis Aureæ Regulæ operationibus jam peractum eſt, *Poteſt id ipſum una operatione compoſita peragi: Si nempe utriuſq; analogiæ ſimplicis primi termini invicem ducti, habeantur pro termino primo analogiæ compoſitæ: & ſimiliter ſimplicium termini tertii, invicem*

invicem ducti, pro tertio compoſitæ: terminus autem alter, quæſito homologus, pro ſecundo.

Verbi gratia; in exſemplo prius expoſito: *Si* 4 *viri,* 3 *menſibus, expendant libras* 20; 6 *viri,* 12 *menſibus, expendent quot libras?*

Pro termino primo analogiæ compoſitæ, ſumatur $12 = 4 \times 3$, (nempe qui fit ex numero virorum primorum in numerum primorum menſium ducto;) pro tertio, $72 = 6 \times 12$, (qui fit ex numero ſecundorum virorum, in numerum ſuorum menſium ducto;) pro ſecundo autem, 20, numerus nempe librarum, hoc eſt, terminus quæſito homologus. Adeoque totus proceſſus ſic conſtabit

$$\begin{array}{l} 4 . 20 :: 6 \\ \underline{\times 3} \quad \underline{\times 12} . \; Q . \\ 12 . 20 :: 72 . \; Q = 120 . \\ \quad\quad \underline{20} \\ 12) \, 1440 \, (120 = Q \end{array}$$

Similiter in Symbolis: *Si perſonæ P, tempore T, expendant libras L, perſonæ* π, *tempore* τ, *expendent quot? puta* λ, numerum quæſitum. Dico, erit ut PT $(= P \times T)$ ad L; ſic $\pi\tau$ $(= \pi \times \tau)$ ad λ, numerum quæſitum. Nempe $PT)\, \pi\tau \times L\, (\lambda$. Proceſſus hic erit.

$$\begin{array}{l} P . L :: \pi \\ \underline{\times T} \quad \underline{\times \tau} . \lambda . \\ PT . L :: \pi\tau . \lambda = \dfrac{\pi\tau \times L}{PT} . \\ \quad\quad \underline{\times L} \\ PT) \, \pi\tau \times L \; (\dfrac{\pi\tau}{PT} L = \lambda . \end{array}$$

Operationis hujus compoſitæ Ratio, ſive Demonſtratio, dependet ab ejuſdem cum præcedente convenientia. Cum enim, ut ſupra oſtenſum eſt, Analogia compoſita, reſolvitur in binas ſimplices *Ejuſdem demonſtratio.*

$$\begin{array}{lll} P . L :: \pi & \quad & P . L :: \pi . q . \\ T \quad \tau . \lambda & \quad & T . q :: \tau . \lambda . \end{array}$$

 Erit

Erit primo $q = \frac{\pi \times L}{P}$. Adeoque 2°, $\lambda = \frac{\tau \times q}{T} = \frac{\tau \times \pi L}{T \times P}$ $= \frac{\pi \tau L}{P T}$ · quod erat demonſtrandum.

Eodem plane modo ſtatuendum eſt, ſi exponatur Analogia etiam adhuc magis compoſita. Puta *Si trabis ligneæ, cujus longitudo, pedum* 4 = A; *latitudo, pedum* 3 = B; *altitudo, pedum* 2 = C; *pondus ſit librarum* 240 = D: *trabs alia longa pedes* 10 = α; *lata, pedes* 4 = β; *alta, pedem* 1 = γ; *quanti erit ponderis?* (puta, librarum δ.) Dico, ut A×B×C, ad D; ſic α×β×γ, ad δ; $= \frac{\alpha\beta\gamma}{ABC}$ D. Hoc eſt $\frac{10 \times 4 \times 1 = 40}{4 \times 3 \times 2 = 24} \times 240 = 400$. Quod patet, reſoluta analogia compoſita, in tres ſimplices.

A . D : : α .	A . D : : α . q .	4 . 240 : : 10 . 600.
B . β .	B . q : : β . Q .	3 . 600 : : 4 . 800.
C . γ . δ .	C . Q : : γ . δ .	2 . 800 : : 1 . 400.

Nam primo $q = \frac{\alpha}{A}$ D. adeoque ſecundo $Q = \frac{\beta}{B}$ $q = \frac{\alpha\beta}{AB}$ D. Et tertio $\delta = \frac{\gamma}{C} Q = \frac{\alpha\beta\gamma}{ABC}$ D. Quod erat demonſtrandum.

Notandum autem, quod quē nos in præcedentibus 2dum appellavimus terminum, fieri poteſt tertius; adeoque quem tertium appellavimus, ſecundus: hos enim duos terminos, in Proportione directa, pro arbitrio ſedes mutare poſſe, jam ſupra univerſaliter diximus. Adeoque perinde omnino eſt ſive dicamus PT . L : : πτ . λ. ſive PT . πτ : : L . λ. Item perinde eſt ſive dicamus ABC . D : : αβγ . δ. ſive ABC . αβγ : : D . δ. quod monuiſſe ſufficiat.

Atque hæc quidem dixiſſe ſufficiat de Proportionum Regula compoſita, dummodo ſingulæ Analogiæ componentes ſint directæ.

Analogia ex directa & inverſa, compoſita.

Fieri autem poteſt ut Analogiarum componentium altera directa ſit, altera Reciproca:

Exempli

Exſempli gratia. Si 36 = A, *libræ panis, ſufficiant militibus* 3 = B, *in dies* 6 = C; *libræ* 180 = α, *militibus* 9 = β, *in quot dies ſufficient*? puta in dies γ.

Eſt quidem hic analogiarum altera directa, nempe Si *libræ* 36 = A, *ſufficiant in dies* 6 = C; *libræ* 180, *ſufficient in dies quot*? puta q = 30. At altera eſt Reciproca, nempe Si *militibus* 6 = B *ſufficiant in dies* 30 = q; *militibus* 9 = β, *ſufficient in dies quot*? certe non niſi in dies pauciores, propter plures milites, nempe, in dies 10. Adeoque illic, regula directa eſt adhibenda; hic, reciproca.

Nēpe 36 . 6 :: 180   36 . 6 :: 180 . q $= \frac{6}{36} \times 180 = 30$.
3 : 9 . $\mathcal{Q}$ 3 . q : 9 . $\mathcal{Q} = \frac{3}{9} \times q = \frac{3}{9} \times 30 = 10$.

Item A . C :: α   A . C :: α . q.
B : β . γ.   B . q : β . γ.

Adeoque $q = \frac{\alpha}{A} C$. Et $\gamma = \frac{B}{\beta} \times q = \frac{B\alpha}{\beta A} C$.

Si autem libeat pro duabus his operationibus, unam compoſitam ſubſtituere: *Factus ex duabus diviſoribus* (puta termino primo analogiæ directæ, & tertio reciprocæ) *erit compoſitus diviſor*; (*adeoque in analogia directa, terminus primus*:) *factuſque ex multiplicatoribus, compoſitus multiplicator*: (*Adeoque, in eadem analogia terminus tertius, in ſecundum ducendus.*) Hoc eſt, (in expoſita quæſtione,) Aβ . C :: αB . $\gamma = \frac{\alpha B}{A\beta} C$. ut prius.

Aβ . C :: Bα . $\gamma = \frac{B\alpha}{A\beta} C$.
A . C :: α
B β . γ.

Et quidem, quotcunque fuerint analogiæ componentes, ſive directæ item, ſive reciprocæ, id univerſaliter dicendum: *Ex omnibus Diviſoribus* (nempe terminis primis analogiarum directarũ, & tertiis reciprocarum,) *continue ductis, fiat Diviſor; ex reliquis omnibus* *Regula generalis.*

$$\left.\begin{matrix}60\\50\\40\end{matrix}\right\} = 150 \,.\, 30 :: \left\{\begin{matrix}60 \,.\, 12. \\ 50 \,.\, 10. \\ 40 \,.\, 8\end{matrix}\right. \quad \left.\begin{matrix}A\\B\\C\end{matrix}\right\} = Z \,.\, L :: \left\{\begin{matrix}A \,.\, \frac{LA}{Z} \\ B \,.\, \frac{LB}{Z} \\ C \,.\, \frac{LC}{Z}\end{matrix}\right.$$

Atque hæc eſt quam vocant *Regulam Societatis ſine tempore.*

Si autem, præter diverſitatem ſortis congeſtæ, accedat etiam diverſitas temporis, vocari ſolet *Regula ſocietatis cum Tempore.* Et ſicuti, prius, repetenda erat *Aurea Regula ſimplex:* Ita hic. *Aurea regula compoſita* erit repetenda. *Cum tempore*

Puta ſi collata ſors prima $60 = A$, per menſes $4 = \alpha$; ſecunda $50 = B$, per menſes $3 = \beta$; tertia, $30 = C$, per menſes $2 = \gamma$: ſitque totius negotiationis lucrum $30 = L$: quæritur quantum cuique debetur?

Cum itaque hic compoſita ratio ſit, nempe ex ratione ſortis ad ſortē, & temporis ad tempus: Multiplicandæ ſortes ſingulæ in ſuum tempus, puta $A \times \alpha = 60 \times 4 = 240$. $B \times \beta = 50 \times 3 = 150$. $C \times \gamma = 30 \times 2 = 60$. Et numeri ſic facti, conjunctim ſumpti, conſtituent terminum primum, $A\alpha + B\beta + C\gamma = 240 + 150 + 60 = 450 = Z$. Iidemque ſigillatim, totidem terminos tertios: Ipſumque lucrum, terminum ſecundum, Adeoque convenient primo, 16; ſecundo, 10; tertio 4. Et in ſymbolis pariter.

$$\left.\begin{matrix}60 \times 4 = 240\\50 \times 3 = 150\\30 \times 2 = 60\end{matrix}\right\} = ,450 \,.\, 30 :: \left\{\begin{matrix}240 \,.\, 16. \\ 150 \,.\, 10. \\ 60 \,.\, 4.\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}A\alpha\\B\beta\\C\gamma\end{matrix}\right\} = Z \,,\, L :: \left\{\begin{matrix}A\alpha \,.\, \frac{A\alpha L}{Z}. \\ B\beta \,.\, \frac{B\beta L}{Z}. \\ C\gamma \,.\, \frac{C\gamma L}{Z}.\end{matrix}\right.$$

Atque

Atque ad eandem formam de aliis hujuſmodi quæſtionibus ſtatuendum erit. quæ cum cuivis ſatis obvia ſint, non eſt cur illis diutius immoremur.

Regulas quas vocant *Alligationis*, & *Falſæ poſitionis*, intactas prætereo: tum aliis de cauſis; tum quod illa non adeo frequentis uſus ſit; hæc autem ſine magno diſpendio, poſt introductam Arithmeticam ſpecioſam, careri poſſit; quæ enim per eam ſolvi ſolebant quæſtiones, illæ quidē omnes, aliæq; plures tum facilius, tum magis perſpicue, ſolvuntur per Arithmeticam ſpecioſam. Eas autem ſiquis ſcire expetat, ex vulgaribus Arithmeticæ Practicæ Magiſtris, petat licet.

Sed & aliæ etiam apud eoſdem practicos Arithmeticos paſſim exſtant *Regulæ* quas *Praxeos* vocant. Quæ compendio inſerviunt in Monetis, Ponderibus, Menſuris &c. reducendis; & Mercatorū negotiationibus maxime inſerviunt. Cum vero illas pro variis variarum gentium Monetis, Ponderibus, Menſuriſque, eorumque ſingillatim rationibus, omnino varias eſſe neceſſe ſit: Non exſpectandum eſt, ut eas ego, dum quæ in Arithmetica ſunt communia trado, omnino attingam; ſed quæ cuiquæ genti ſunt peculiaria, ſuis cujuſque ſcriptoribus tradenda permittam. Nec quidem etiam eſt neceſſe, cum earum omnium Regularum fundamenta, non aliunde quam ex iis quæ jam tradidimus petenda ſint; & unicuique interim, ut, pro ingenii ſui ſagacitate, & pro re nata, permittendum ſit, quæ ſuis negotiis maxime ſint accommoda, Regularum hujuſmodi compendia tum exquirere, tum etiam exercere.

His itaque omiſſis, ad Fractionum ſive Minutiarum doctrinam feſtinabo. Sed hoc prius monito; Quæ ſuperius de Rationibus ſive Proportionibus dicta ſunt, quæque inde ortæ Regulæ jam fuerunt traditæ; non minus in numeris fractis, ſive etiam ſurdis, (de quibus deinceps dicetur,) locum habent, quam in Numeris Integris. Sicut enim numeri integri, invicem Addi, Subduci, Multiplicari, Dividique ſolent, variiſq; modis Rationes ſive Analogias ſubire: ita & Fracti, Surdique, conſimiles ſubeunt operationes, & eaſdem leges. Quo pacto autem operationes illæ Arithmeticæ, Puta Additio, Subductio, Multiplicatio, & Diviſio, in Fractis & Surdis ſint adminiſtrandæ; jam deinde dicendum erit.

CAP.

CAP. XLI.

De Fractionibus ſive Minutiis. Fractionum origo. Numeri fracti, an veri numeri. Fractionum Explicatio: Notatio. Denominator. Numerator. Fractiones Propriæ, Impropriæ. Fractionum explicatio altera. Diviſionum Quotientes indicant. Explicatio tertia, quæ & Irrationalibus conveniat. Fractionum æquipollentia. Earumque cum Rationibus comparatio.

F*Ractionum*, ſive *Minutiarum* doctrina, qui & *Numeri fracti* dici ſolent, poſt abſolutam Rationum traditionem, facile abſolvitur. *Fractionum origo.*

Fractionum Originem, in ſuperioribus jam ante tradidimus. Nimirum, cum ſupponat Arithmetica *Unitatem*, ſive *Unum*, numerorum primum eſſe, minimumque; (quòd Uno Paucius, dici non poſſit:) reliquoſque omnes Unitatum collectione componi: Siquando ſupponendum ſit (quod non raro fit) aliquid Uno minus, ſive Unum aliquod in partes dirimendum; quoniam illud vero aliquo numero deſignari non poteſt, *Numeris* (ut loquuntur) *Fractis*, illud utcunque deſignare ſatagunt. (Puta, ſi ſupponatur Unum aliquod biſecandum, totius Semiſſes ſic ſic deſignant, $\frac{1}{2}$.) Quod ipſum etiam faciunt, ſiquando duobus quibuſvis numeris invicem proximis intermedium aliquod deſignandum eſt. Puta, ſi numerus Ternarius 3, ſupponatur biſecari; quoniam hujus Semiſſis, Unitate major eſt, & Binario minor, nec tamen inter hos numeros (Unitatem & Binarium) alius intercedat intermedius verus numerus; ſemiſſem illum utcunque ſic deſignant $\frac{3}{2}$, vel etiam $1\frac{1}{2}$. Et ſimiliter alias.

Adeoque numeri *Fracti* dicti, pro veris Numeris haberi non ſolent, neque ſub *Numeri* appellatione apud Euclidem alioſque cenſentur; (apud quos numerorum appellatione non niſi Integri inſigniuntur.) Quippe revera qui verbi gratia, *Horæ Semiſſem* ſive $\frac{1}{2}$, dicit, non tam ille *Quot horas* dicit, quam *Quantum horæ*: adeoque ex campo Arithmetico, in Geometricum tranſit. Quamvis enim, in Arithmetica, non reperiatur *Paucius Uno*; reperitur tamen, in Geometria, *Minus integro*: Et quidem quemadmodum ſupponit Arithmetica, Unitatem in infinitum Multiplicabilem; ita Geometria, Integrum in infinitum diviſibile: *Numeri Fracti, non veri Numeri.*

ſive, ut Vnum Arithmeticum eſt multiplicabile, ſic Vnum Geometricum, diviſibile, in infinitum.

Fractionum explicatio.

Hanc autem infinitam Geometriæ diviſibilitatem, cum quodammodo imitari velit Arithmetica; ſupponit Vnitatem ſive Vnum, quaſi jam quid integrum, in quotvis Partes diviſibile; eaſque demum Partes numerabiles, adeoque ſuæ conſiderationi ſubjectas. Quamvis enim illa Integri in partes Diviſio, Geometricum quiddam rite cenſeatur; Partium tamen illarum, in quas dividitur, Numeratio, eſt plane Arithmetica.

Fractionum notatio.

Cum itaque in fractionibus, ſive numeris Fractis, omnino duo deſignanda veniant; Puta, Vnius ſive integri, in partes deremptio; (nunc plures, nunc pauciores;) Earumque partium, unius pluriumve aſſumptionem: Quo utrumque indigitetur, Duobus propterea numeris Fractio ſignari ſolet, altero ſuperne, altero inferius, poſitis; ad hanc formam: $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, &c. Quorum Inferior indicat, in quot æquales partes Integrum aliquod ſive Vnum, dirimi ſupponimus; & *Denominator* dici conſuevit: Superior, quot earum aſſumi volumus; dicique ſolet *Numerator*. Adeoque Fractio $\frac{2}{3}$, unius alicujus Integri, in tres æquales partes diremptí, duas aſſumendas innuit.

Denominator.
Numerator.

Denominator autem ille dicitur, quia partes in quas dirimitur integrum Dinominat, ſeu quales dicit; puta Semiſſem, Trientem, Quadrantem, Sextantem, &c. ſive partem Dimidiam, Tertiam, Quartam, Sextam, &c. prout fractionis denominator eſt 2, 3, 4, 6, &c.

Numerator verò dicitur hic alter, quia partium (ſic denominatarum) aſſumendarum numerum indicat; puta, $\frac{2}{3}$, duos trientes; $\frac{3}{4}$, tres quadrantes; $\frac{5}{6}$, quinque ſextantes, ſive partes ſextas; $\frac{3}{5}$, tres quintas, &c.

Fractiones propriæ.

Eſtq; hæc ſimpliciſſima Fractionum expoſitio, earumve naturæ explicatio; quæ *Fractionibus propriis*, uti dici ſolent, ſive propriè dictis, apprimè quadrat: Quæ nempe quid Vnitate minus innuunt.

Integro minores.

In his itaque Fractionibus propriis, Numerator ſemper Denominatore minor erit. Cum enim Denominator oſtendat quot omnino ſint vel ſupponantur iſtiuſmodi in Integro, partes æquales; ſi Numerator Denominatori æqualis fuerit, indicabit ille tot ejuſmodi aſſumendas partes, quot omnino in integro continentur; adeoque totum integrum, non ipſius aliquam portio-

portionem, aſſumptum iri: (quippe partes ſimul omnes; tantundem ſunt atque ipſum integrum:) Sin Denominatore major eſſet numerator, innueret illud jam plures iſtius Integri partes ejuſmodi aſſumendas, quam inibi omnino contineantur; quod eſſet impoſſibile: Supereſt itaque ut Numerator, ſive partium aſſumendarum numerus, minor ſit quam Denominator, ſive numerus partium omnium in integro contentarum.

Fractiones impropriæ.

Si quando itaque conſpiciatur (quod tamen uſu non raro obvenire ſolet) Numerator vel Denominatori æqualis, vel ipſo major; Hujuſmodi Fractio *Impropria* dici ſolet; ut quæ quid Unitati æquale vel etiam ipſa majus indicet. Sunt enim hujuſmodi Fractiones $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, &c. tantundem atque ipſa Vnitas 1. Nempe tum duo ſemiſſes, tum tres trientes, tum quatuor quadrantes, &c. ipſum præciſe Integrum abſolvunt. At $\frac{2}{1}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{6}{3}$, &c. etiam duo integra; quippe bis tot partes numerat fractio, quot denominator indicat integro contineri. Item $\frac{3}{1}$, $\frac{6}{2}$, $\frac{9}{3}$, &c tantundem valent atque 3, ſive tria integra. Et in reliquis pariter. Similiter de $\frac{3}{2}$, $\frac{8}{3}$, &c. judicandum. Cum enim $\frac{2}{2}$, duo ſemiſſes, tantundem ſint atque 1; erunt $\frac{3}{2}$, tres ſemiſſes, tantundem atque $1\frac{1}{2}$, unitas cum ſemiſſe. Item cum $\frac{6}{3}$, ſex trientes, tantundem valeant atque 2; erunt $\frac{8}{3}$, octo trientes, tantundem atque $2\frac{2}{3}$, duo cum duobus trientibus. Et ſimiliter in aliis, ubi Numerator Denominatore major, nec tamen hic illius aliquota pars. Si enim Denominator ſit Numeratoris pars aliquota, fractio hæc impropria æquivalet numero integro: Sin minor, nec tamen pars aliquota; æquivalet impropria fractio numero integro cum adjuncta particula ſeu fractione propria.

Fractionum explicatio altera.

Cum verò prior illa Fractionum expoſitio, per Unius Integri in æquales aliquot partes diremptionem, ut ut fractionibus propriis explicandis ſatis accommoda, impropriis tamen haud uſque adeo conveniat, (quippe Unius Integri plures aſſumi partes non poſſunt, quam in ipſo omnino continentur; quod exigere videatur Impropriæ Fractionis numerator denominatore major:) Poterit ſecundo modo fractionum natura, commodius huic negotio, explicari, per diremptionem, non unius tantum, ſed plurium ſimul Integrorum (quot nempe indicat Numerator) in partes aliquot æquales, (tot nempe quot Denominator poſtulat,) quarum unam aliquam aſſumendam fra-

ctio indicat. Perinde enim eſt ſive dicamus fractionem $\frac{2}{3}$, Unius integri Duos trientes, ſive Duorum integrorum Unum trientem: Tantundem enim utrovis modo indicatur. Exſempli gratia Cum Solidus Anglicanus contineat 12 Denarios; Unius ſolidi triens ſunt denarii 4; adeoque ejuſdem duo trientes, bis Quatuor, ſive 8 denarii. Sed &, cum ſolidus unus contineat denarios 12; continebunt ſolidi Duo, denarios bis duodecim, hoc eſt, 24: at denariorum 24 pars tertia, ſunt item 8 denarii, ut prius. Perinde itaque eſt ſive dicamus $\frac{2}{3}$ ſol. indicare duos trientes unius Solidi, ſive duorum ſolidorum trientem unum.

Fractiones indicant diviſionum Quotientes.

Atque hæc quidem expoſitio perinde quadrat propriis atque impropriis fractionibus: Nempe $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{3}$, &c. nil aliud indicant, quam numerorum 2, 3, 4, &c. trientes; Nec aliud ſunt quam totidem quotientes numerorum 2, 3, 4, &c. per numerum 3 diviſorum; quod & ſuperius, dum Diviſionem tradidimus, dictum eſt. Et quidem, ſicut ex imperfecta ſive etiam impoſſibili ſubductione, oriuntur numeri negativi, ($3 - 2$, $2 - 3$, &c;) ita ex imperfecta ſive etiam impoſſibili Diviſione, oriuntur numeri fracti, ($\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{3}$, &c.) ſicut etiam ex imperfecta impoſſibilique radicum extractione, oriuntur numeri ſurdi, ($\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, &c.) ut deinceps dicetur.

Fractionū explicatio tertia quæ irrationalibus etiam conveniat.

Verum adhuc notandum eſt; cum Arithmeticæ Fractiones, Geometricas (ut dictum eſt) Continui Diviſiones æmulentur, quæ non ſemper ſunt in partes rationales, ſed ſatis nonnunquam irrationales; Quò huic incommodo ſubveniatur, tertius adhuc Fractiones explicandi modus, prioribus univerſalior, tradi poteſt. Cum enim, verbi gratia, fractio $\frac{2}{3}$ indicet (ut prius dictum eſt) Unius integri in tres partes æquales ſecti partes duas; manifeſtum eſt, hac fractione indicari eam integri partem, quæ ad integrum illud eandem habeat rationem quam 2 ad 3. Quippe cum totum contineat partes 3, quales aſſumpta illius portio habet partes 2; erit portionis ad integrum ea ratio quæ eſt partium duarum, ad partes tres; hoc eſt, numeri 2, ad numerum 3. Dicimus itaque, *Fractione (propriâ) eam indicari unius alicujus integri* (vel expoſitæ quantitatis) *partem, quæ, ad totum, illam rationem habeat, quam habet fractionis Numerator ad Denominatorem.* Vel etiam univerſaliter *Fractione* (ſive propria ſive impropria) *tantundem quantitatis Homogeneæ deſignari, quantum*

tum ad unum Integrum, ſive expoſitam quantitatem, eam rationem habeat quam habet fractionis Numerator ad Denominatorem. Puta, ſi dicamus circuli Radium eſſe $\frac{1}{2}$ Diametri; tantundem eſt acſi dicamus, circuli Radium eam eſſe Diametri partem, quæ ad totam habeat rationem 1 ad 2: vel, Radium tantum eſſe, ut ad diametrum habeat rationem 1 ad 2. Et pariter, cum Latus quadrati eſſe dicimus $\frac{1}{\sqrt{2}}$ Diagonii; tantundem eſt acſi dicamus, Latus quadrati tantum eſſe ut ad illius Diagonium rationem habet 1 ad $\sqrt{2}$. Item, Quadrati ambitum, eſſe $\frac{4}{\sqrt{2}}$ Diagonii; tantundem eſt atque, Ambitum quadrati tantum eſſe ut ad ipſius diagonium rationem habeat 4 ad $\sqrt{2}$. (Quo pacto ſatis commode exponuntur fractiones illæ irrationales, licet neque juxta methodum primam, neque etiam ſecundam, commode dici poſſit, vel 1 vel 4 digonia, in $\sqrt{2}$ partes æquales dividi, quò earum una aſſumatur.) Atque eodem modo, ſumptis duobus vel numeris, vel lineis, vel aliis quibuſvis quantitatibus invicem homogeneis, a, b, fractio $\frac{a}{b}$, vel $\frac{a}{b}$ D, id innuit quod ad Unum Integrum, vel aſſignatam aliquam quantitatem D, eam rationem habeat quam habet a ad b; ſive ſit ea ratio rationalis ſive irrationalis.

Atque hinc quidem ſequitur, Tum *Eandem quoad valorem Fractionem, pluribus poſſe, & quidem infinitis modis, deſignari*: Tum *fractiones eas omnes, quarum Numeratores ad ſuos reſpective Denominatores eandem habent rationem, invicem æquales ſive æquipollentes eſſe.* Quippe cum nihil aliud innuat Fractio, quam *Rationem* deſignandæ quantitatis ad expoſitam Homogeneam, ſive unum Integrum: dummodo eadem ratio, quibuſcunque id fiat quantitatibus, deſignatur, eandem & (quoad valorem) Fractionem deſignari, intelligendum erit. Adeoque, verbi gratia, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{10}{20}$, $\frac{100}{200}$, &c, eandem, quoad valorem, Fractionem deſignant, (puta ſemiſſem,) quia eadem eſt in ſingulis Numeratoris ad Denominatorem Ratio; (quippe, ea quæ eſt 1 ad 2;) Quod quidem non de numeris tantum, ſed quibuſvis etiam quantitatibus invicem homogeneis, intellectum velim. Puta *Fractionum Æquipollentia.*

pus arithmeticum, partium ſummam (addendo) colligere, atque ſummarum ſummam; ita & ad eandem Rationum doctrinam ſpectat, ſive Numerorum, Linearum, &c. rationes; ſive ipſarum Rationum rationes, contemplemur. Quod autem ille quantitatum abſolutarum rationes, *Rationes* ſimpliciter appellet; rationum autem rationes, *Proportiones*; & *Proportionum* rationes, *Proportionalitates*; (aut etiam, ſi rationibus proportionalitatum, novum indidiſſet nomen, & ſic deinceps quouſque libet:) licitum omnino eſt, ſi ita videbitur, ad pleniorem accuratioremque, ubi res poſtulat, diſtinctionem, ita loqui, & vitandæ confuſionis ergo: At interim non inde nova magis dicenda eſt in Arithmeticam (vel, ſi libet, Geometriam,) introducta ſpeculatio; quam ſi in Additione, (ob continuas ſæpe repetendas operationes,) libeat expoſitas aliquot minutas quantitates (diſtinctionis gratia) *Particulas* appellare; particularum autem collectiones, *Partes*; & collectiones partium, *Integra*; integrorum autem collectiones, *Summas*; & ſummarum denique, *Summam totalem*. Sicut enim eâdem arte tum particularum in Partes, tum partium in Integra, & integrorum in Summas, &c. collectio inſtituitur: & collectiones omnes intermediæ, quanquam præcedentium reſpectu, ſint Aggregata; ſequentium tamen, pro Membris habeantur: Eodem modo per omnia, iiſdem plane principiis eademq; arte procedendum eſt, tum in ſimplicium ſive abſolutarum quantitatum rationibus contemplandis, tum in rationum rationibus, ſive proportionibus, harumque proportionalitatibus, & ſic deinceps: & quidem ſicut intermediæ rationes ſive comparationes, reſpectu quantitatum abſolutarum primo expoſitarum, Relationes ſive Reſpectivæ quantitates merito habeantur; illæ ipſæ tamen, cum invicem comparandæ ſint, in ſequentibus illis comparationibus, pro terminis quaſi ſimplicibus ſive abſolutis ſunt habendæ; ipſæque relationes, cum invicem comparantur, jam fiunt, eâ comparatione, novæ relationis termini, ad inſtar aliorum Entium plane abſolutorum. Neq; aliud, credo, eſt, quod in tota illa tractatione ſatagit V. Cl. Sed de his hactenus.

Atq; hactenus de Fractionum tum Natura, tum Æquipollentia, dictum eſto; tum de illarum cum Rationibus affinitate.

CAP.

CAP. XLII.

De Additione & Subductione Fractionum; tum Cognominum, tum non-Cognominum. Fractionum ad communem Denominatorem Reductio. Minimus communis Denominator. Maximus communis Diviſor.

EXpoſitis, in præcedente Capite, quæ ad veram Fractionum naturam intelligendam neceſſaria videbantur: Ad operationes Arithmeticas in numeris fractis exercendas accedendum eſt. Quæ quidem eædem ipſæ ſunt quæ in numeris veris, hoc eſt, Integris, ſuperius exponuntur. Puta Additio, Subductio, Multiplicatio, Diviſio. &c.

Additio & Subductio.

Ab Additione & Subductione, ordiemur.

Fractionum cognominum,

Si *Fractiones* invicem Addendæ, aut Subducendæ, ſint *Cognomines,* (hoc eſt, eundem habeant Denominatorem,) nulla difficultate res abſolvitur; *Subſtituta nempe, pro Numeratoribus expoſitis Numeratorum illorum Summa vel Differentia, retento communi qui prius erat Denominatore, habetur Summa vel Differentia fractionum expoſitarum.*

Sic ſi Addendæ ſint fractiones $\frac{2}{6}$ & $\frac{3}{6}$, prodibit ſumma $\frac{5}{6}$. Quippe numeri 2 & 3 ſimul additi conſtituunt 5, quæcunque res illæ ſint quæ numerantur: puta, ſive integræ, ſive partes. Et quâ ratione 2 & 3 homines, ſunt 5 homines; aut 2 & 3 equi, 5 equi; vel 2 & 3 integra, 5 integra &c. Eadem plane ratione 2 & 3 partes, ſunt 5 partes; 2 & 3 ſemiſſes, 5 ſemiſſes: 2 & 3 ſextantes 5 ſextantes hoc eſt $\frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6} = \frac{2+3}{6}$.

Ita, ſi ex $\frac{5}{6}$, auferantur $\frac{3}{6}$, manebunt $\frac{2}{6}$. Quippe univerſaliter verum eſt, $5 - 3 = 6$; ſive res numeratæ integræ ſint, ſive partes. Sicut enim $5 - 3$ homines, ſunt 2 homines; & $5 - 3$ decades, 2 decades; & $5 - 3$ centuriæ, 2 centuriæ: ita $3 - 3$ ſextantes, ſunt 2 ſextantes; hoc eſt $\frac{5}{6} - \frac{3}{6} = \frac{2}{6} = \frac{5-3}{6}$.

Et ſimiliter faciendum eſt ubi plures adhuc Fractiones cognomines, continue addendæ ſunt, aut ſubducendæ. Puta $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$: quia $2 + 3 + 4 = 9$. Sic $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$. quia $2 + 3 - 4 = 1$. Es ſimiliter alibi.

Atque

Atque eodem plane modo in fractionum Additione & Subductione Specioſa, ſive Symbolica. $\frac{A}{D} + \frac{B}{D} + \frac{C}{D} = \frac{A+B+C}{D}$. Et $\frac{A}{D} + \frac{B}{D} - \frac{C}{D} = \frac{A+B-C}{D}$. &c.

Si vero Fractiones invicem Addendæ aut Subducendæ, non ſint cognomines, adhibenda prius eſt præparatio, qua ad idē nomen reducantur, quàm Additio illa vel Subductio inſtituatur. Et tum demum factâ hac ad idem Nomen ſive Denominatorem reductione, Additio Subductiove inſtituenda eſt, ut prius. Puta ſi addendæ ſint fractiones $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{4}$; aut etiam hæc ab illa ſubducenda: pro $\frac{1}{2}$, ſubſtituatur ipſi æquipollens $\frac{2}{4}$, (cum enim eadem ſit ratio 1 ad 2, atque 2 ad 4, oſtenſum eſt cap. præced. fractiones $\frac{1}{2}$ & $\frac{2}{4}$ æquipollentes eſſe:) adeoque $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Et $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. Sic $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$. Et $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{12}$.

Fractionum non cognominum.

Eodem modo, ſi numero 3, ſive $\frac{3}{1}$, (quæ æquipollent; nam diviſio per 1, neutiquam immutat diviſi quantitatem,) addatur fractio $\frac{2}{5}$, poteſt quidem id fieri immutatis terminis, ſic $3 + \frac{2}{5}$, vel etiam $3\frac{2}{5}$: ſed etiam (quod nonnunquam fieri convenit) in fractionem impropriam coaleſcent, puta $3 + \frac{2}{5} = \frac{3}{1} + \frac{2}{5} = \frac{15}{5} + \frac{2}{5} = \frac{17}{5}$: ſubſtituto ſcilicet, pro 3 vel $\frac{3}{1}$, (tribus integris;) $\frac{15}{5}$, hoc eſt, quindecim quintis, quippe tantundem valent; cum enim 5 quintæ conſtituant unum integrum, 15 quintæ, hoc eſt ter 5 quintæ, conſtituent integra tria.

Item ſi ex 3 auferre oporteat $\frac{2}{5}$: pro 3 integris ſubſtituatur $\frac{15}{5}$, vel etiam $2\frac{5}{5}$, aut $2 + \frac{5}{5}$; & facta demum ſubductione, erit $3 - \frac{2}{5} = \frac{15}{5} - \frac{2}{5} = \frac{13}{5}$. vel etiam $3 - \frac{2}{5} = 2 + \frac{5}{5} - \frac{2}{5} = 2 + \frac{3}{5}$. (nam $\frac{5}{5} - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$, quibus ſi præponamus 2, fiet $2 + \frac{3}{5}$ vel $2\frac{3}{5}$.)

Reducuntur autem fractiones quælibet duæ datæ, ad alias invicem cognomines, & datis æquales, ſi prioris tum Numerator tum Denominator, ducatur in poſterioris Denominatorem; & contra, poſterioris tum Numerator tum Denominator, in Denominatorem prioris. Cum enim utrobique fractionis uterq; terminus per communem multiplicatorem multiplicetur, terminorum ad invicem ratio non immutatur, (quippe duplo-

Reductio ad communem Denominatorem.

rum ad dupla, triplorum ad tripla, &c. eadem eſt ratio quæ ſimplorum ad ſimpla;) dum novus interim emergens Denominator, ſit utrique communis, (quippe qui fit ex datarum Denominatoribus invicem ductis.) Sic in modo exhibitis, $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$: ſi prioris uterque terminus ducatur in 4, fiet $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$; item, ſi poſterioris terminus uterque ducatur in 3, fiet $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$; adeoque junctim $\frac{4}{12} \pm \frac{3}{12} = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{4}$. Sic, pro 3 & $\frac{2}{5}$, vel $\frac{3}{1}$ & $\frac{2}{5}$; ſubſtituendum eſt $\frac{15}{5} = \frac{3}{1} = 3$, & $\frac{2}{5}$: adeoque $\frac{15}{5} \pm \frac{2}{5} = 3 \pm \frac{2}{5}$. Et ſic ubique.

Et pariter in Symbolis: pro expoſitis $\frac{A}{B}$, $\frac{\alpha}{\beta}$; ſubſtituantur $\frac{A\beta}{B\beta}$, $\frac{B\alpha}{B\beta}$: Eritque tum $\frac{A\beta}{B\beta} = \frac{A}{B}$, tum $\frac{B\alpha}{B\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$, tum denique $\frac{A\beta}{B\beta} \pm \frac{B\alpha}{B\beta} = \frac{A}{B} \pm \frac{\alpha}{\beta}$.

Atque eadem plane methodo utendum eſt, ſi plures quotcunque fractiones occurrant ad communem Denominatorem reducendæ. Nempe ſingularum tum Numeratorem tum Denominatorem in reliquarum omnium Denominatores continuè multiplicando. Sic $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$, reducuntur ad $\frac{15}{30}$, $\frac{20}{30}$, $\frac{12}{30}$. Nam $1 \times 3 \times 5 = 15$, & $2 \times 3 \times 5 = 30$, adeoque $\frac{1}{2} = \frac{15}{30}$: Item $2 \times 2 \times 5 = 20$, & $3 \times 2 \times 5 = 30$, adeoque $\frac{2}{3} = \frac{20}{30}$: Denique $2 \times 2 \times 3 = 12$, & $5 \times 2 \times 3 = 30$, adeoque $\frac{2}{5} = \frac{12}{30}$. Et propterea junctim $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \pm \frac{2}{5} = \frac{15}{30} + \frac{20}{30} \pm \frac{12}{30}$. Et pariter in Symbolis pro $\frac{a}{\alpha}$, $\frac{b}{\beta}$, $\frac{c}{\gamma}$, $\frac{d}{\delta}$, ſubſtituantur $\frac{a\beta\gamma\delta}{\alpha\beta\gamma\delta}$, $\frac{b\alpha\gamma\delta}{\beta\alpha\gamma\delta}$, $\frac{c\alpha\beta\delta}{\gamma\alpha\beta\delta}$, $\frac{d\alpha\beta\gamma}{\delta\alpha\beta\gamma}$: quæ tum expoſitis ſunt ſigillatim æquales, tum invicem cognomines; (nam denominatores $\alpha\beta\gamma\delta$, $\beta\alpha\gamma\delta$, $\gamma\alpha\beta\delta$, $\delta\alpha\beta\gamma$, ſunt invicem æquales, quippe ex iiſdem factoribus compoſiti; alternatio enim ſitûs æqualitatem non immutat, cum in continuis multiplicationibus perinde omnino eſt quo ordine fiant, ut ſuperius ſuo loco traditum eſt) Et pariter alibi.

Communis denominatoris diminutio.

At interim verum eſt (neque id vel diſſimulandum vel ignorandum) minorem nonnunquam Denominatorem communem aſſumi poſſe quam qui hoc pacto ex datorum Denominatorum omnium

omnium continuo ductu emergit. Nempe quoties Denominatores dati non ſunt *inter ſe primi*, hoc eſt, in eadem ratione minimi, ſed communem aliquem Diviſorem admittant. Sic in pridem expoſitis, $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{4}$; quæ reduci poſſunt, non modo ad communem denominatorem $8 = 2 \times 4$ (ex datis denominatoribus factum,) puta $\frac{4}{8}, \frac{2}{8}$; ſed etiam ad minorem, nempe 4, puta $\frac{2}{4}, \frac{1}{4}$, ut ſupra oſtenſum eſt: Cujus rei cauſa eſt, quod denominatores, dati, 2, 4, non ſunt numeri inter ſe primi, ſive in eadem ratione minimi, ſed uterque per communem diviſorem 2, præciſe dividi poterit; Eſt enim 2) 2 (1, & 2) 4 (2. Sic fractiones duæ $\frac{7}{12}, \frac{1}{3}$; reduci poſſunt, non modo ad $\frac{21}{36}, \frac{12}{36}$; ſed etiam ad $\frac{7}{12}, \frac{4}{12}$: quia tum 12, tum 3, communem admittunt diviſorem 3. nam 3) 12 (4. & 3) 3 (1. Et pariter in Symbolis; $\frac{A}{BC}, \frac{E}{C}$, reducuntur non modo ad $\frac{AC}{BCC}, \frac{EBC}{BCC}$, ſed & ad $\frac{A}{BC}, \frac{BE}{BC}$; quia nempe tum BC, tum C, communem admittunt diviſorem C; nam C) BC (B, & C) C (1.

Sed neque hoc ſemper fit; (ſunt enim non raro denominatores dati, inter ſe primi:) neque etiam tanti eſt, ut minimum ſemper denominatorem communem ſtudioſius prima vice inveſtigemus; ſed potius, ſi opus ſit, fractionum tandem ſumma vel differentia ad minimos terminos reducatur. (Nam revera etiamſi illud prius præſtitum fuerit, hoc alterum nihilominus deinceps aliquando præſtandum erit. Puta, ſi ex fractione $\frac{7}{12}$ auferenda ſit $\frac{1}{3}$; nec acquieſcamus in æquipollentibus $\frac{21}{36}, \frac{12}{36}$; ſed ad minores adhuc deprimere cupiamus: minimi ad quos reduci poſſunt termini, communem denominatorem habentes, ſunt $\frac{7}{12}$ & $\frac{4}{12}$. Reſiduum itaque $\frac{7}{12} - \frac{1}{3} = \frac{7}{12} - \frac{4}{12} = \frac{3}{12}$. At vero reſiduum hoc nondum eſt in minimis terminis, ſed ad minores adhuc reduci poterit, nempe $\frac{1}{4}$. Si autem, omiſſa depreſſione prima, ſumptis, pro $\frac{7}{12} - \frac{1}{3}$, æquipollentibus $\frac{21}{36} - \frac{12}{36}$, ut habeatur reſiduum $\frac{9}{36}$; deprimi tandem, ſive abbreviari, ſemel poterit hoc reſiduum ad terminos $\frac{1}{4}$, in eadem ratione minimos.) Si tamen ſe ſponte offerat ejuſmodi communis denominator, qui minor ſit quam qui ex datorum continua multiplicatione emergit; poterit quidem ille non incommode

aſſumi; Eâ tamen lege, ut quotupluſcunque ſit vel quamcunq; habeat rationem, denominator ille communis, ad cujuſque fractionis datæ denominatorem; totuplus omnino ſit, ſive eandem rationem obtineat aſſumendus Numerator ad numeratorem datum: ne fractionum ſcilicet valor immutetur. Puta ſi fractiones $\frac{2}{12}$, $\frac{1}{3}$, ad eundem denominatorem 12, reducendæ ſint; ſicut pro 3, poſterioris fractionis denominatore, ſubſtituitur 12, ipſius quadruplus; ita pro numeratore 1, ponendus erit numerator 4, dati quadruplus; ut $\frac{4}{12}$ & $\frac{1}{3}$, eandem retineant terminorum ad invicem rationem.

Minimus communis Denominator. Si vero, antequam inſtituatur Additio vel Subductio, libeat fractiones expoſitas non modo ad communem aliquem denominatorem, ſed ad communem denominatorem minimum reducere: id fiet hac regulâ. *Expoſitarum duarum Fractionum Denominatores, per maximum communem diviſorem dividantur; & per alternos quotientes, multiplicentur utriuſque uterque terminus: & prodibunt termini Fractionum cognominum, datis æqualium.* Exſemplum eſto in Symbolis, id ipſum quod antea expoſuimus; $\frac{A}{BC}$, $\frac{E}{C}$: Denominatorum BC, & C, maximus communis Diviſor, (ſaltem quantum ex Symbolis liquet.) eſt C: per hoc ſi dividatur Denominator prior, quotiens eſt B; nam C) BC (B; per quem ſi multiplicentur poſterioris fractionis uterque terminus, prodibit $\frac{BE}{BC} = \frac{E}{C}$: Si per eundẽ C, diviſorem communẽ, dividatur denominator poſterior, C; quotiens eſt 1; nam C) C (1: per quem quotientem ſi præcedentis fractionis uterque terminus multiplicetur, prodibit eadem quæ prius fractio, $\frac{A}{BC}$; (quippe 1, multiplicando nihil immutat:) adeoque fractiones inventæ cognomines $\frac{A}{BC}$, $\frac{BC}{BC}$, datis ſunt æquales; & quidem in minimis terminis. Pariter in numeris; Si fractionum $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$, denominatores 6, 4, per communem maximum diviſorem 2 dividantur, prodibunt quotientes 3, 2: Si autem per poſteriorem 2, multiplicentur fractionis prioris uterque terminus, prodibit $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$; & per quotientem priorem 3, ſi multiplicentur

tur poſterioris fractionis terminus uterque, prodibit fractio $\frac{2}{12}$ $= \frac{1}{6}$: adeoque pro expoſitis $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}$ habeatur æquales minimæ cognomines $\frac{6}{12}, \frac{2}{12}$. Eodem modo, pro $\frac{7}{12}, \frac{1}{3}$, habentur minimæ cognomines, iſtis æquales $\frac{7}{12}, \frac{4}{12}$. Et ſimiliter alibi.

Duorum autem numerorum *maximus communis Diviſor*, hac mothodo invenietur. *Si major per minorem dividatur, & deinde diviſor hic per diviſionis ſi quod ſit reſiduum; & ſic deinceps donec tandem perveniatur ut reſiduum nullum ſit; diviſor ille ultimus, eſt datorum numerorum maximus communis diviſor.* (uti ab Euclide oſtenſum eſt, 2 e 7) Si autem non prius ſiſtatur quam ad Unitatem deveniatur; argumento eſt expoſitos numeros in eadem ratione minimos eſſe: quippe 1, utrumque dividendo, non minuit. Sic numerorum 12 & 3, maximus communis diviſor (intellige, qui dicendos numeros ita dividat, ut nullum ſuperſit reſiduum,) invenitur 3; quia nempe 3) 12 (4 ſine ullo reſiduo. Sic numerorum 12 & 34, maximus communis diviſor eſt 2: Nam ſi 12 in 34 bis continentur, & ſuperſunt 10; Deinde 10 in 12 continentur ſemel, & ſuperſunt 2; Tandem 2 in 10 continentur quinquies præciſe: poſtremus itaque hic diviſor 2, eſt duorum expoſitorum 12, 34, maximus communis diviſor. Numerorum autem 13 & 34, maximus communis diviſor eſt 1; (adeoque ipſi jam inter ſe primi, ſive in eadem ratione minimi;) ut ex adjunctis operationibus patet.

```
        0      2     10
    2 ) 10 ) 12 ) 34 ( 2 ( 1 ( 5
        10   10   24

        1   2   3   5   8
    1 ) 2 ) 3 ) 5 ) 8 ) 13 ) 34 ( 2 ( 1 ( 1 ( 1 ( 1 ( 2
        2   2   3   5   8   26
```

Atque hæc ipſa methodus nonnunquam etiam in Symbolicis commode adhibetur. Exſempli gratia; $a^3 - e^3$, & $a^2 - e^2$: ſi quantitas illa per hanc dividatur, prodibit quotiens a (cujus tamen in hoc negotio nulla ratio habetur,) & reſiduum $ae^2 - e^3$. Si per hoc reſiduum dividatur ille Diviſor $a^2 - e^2$, prodibit (quotiens $\frac{a}{e^2}$, &) Reſiduum $ae - e^2$, Denique ſi

 per

per hoc Reſiduum $ae - e^2$, dividatur proximus Diviſor $ae^2 - e^3$, prodibit quotiens e, & nihil reſtabit. Ut ex adjuncta operatione patet.

$$ae - e^2)\ ae^2 - e^3)\ a^2 - e^2)\ a^3 - e^3\ (\ a\ (\tfrac{a}{e^2}\ (\ e.$$

$$\begin{array}{ccc} \underline{ae^2 - e^3} & a^2 - ae & a^3 - ae^2 \\ 00. & \overline{ae - e^2.} & \overline{ae^2 - e^3} \end{array}$$

Atq; hinc liquet, poſtremum hunc diviſorem $ae - e^2$, expoſitarum quantitatum $a^3 - e^3$, $a^2 - e^2$, communem eſſe Diviſorem. Quod & experimento facto patebit:

$$ae - e^2)\ a^3 - e^3\ (\ \frac{a^2}{e} + a + e.$$

$$\begin{array}{c} \underline{a^3 - a^2e} \\ a^2e - e^3 \\ \underline{a^2e - ae^2} \\ ae^2 - e^3 \\ \underline{ae^2 - e^3} \\ 00 \end{array}$$

$$ae - e^2)\ a^2 - e^2\ (\ \frac{a}{e} + 1$$

$$\begin{array}{c} \underline{a^2 - ae} \\ ae - e^2. \\ \underline{ae - e^2} \\ 00 \end{array}$$

Adeoq; communis hujus diviſoris ope, reducuntur expoſitæ quantitates $a^3 - e^3$, $a^2 - e^2$, ad ſimpliciores in eadem ratione, $\frac{a^2}{e} + a + e$, $\frac{a}{e} + 1$; vel etiam (tollendo fractionem) $a^2 + ae + e^2$, $a + e$. Et propterea $\frac{a^3 - e^3}{a^2 - e^2} = \frac{a^2 + ae + e^2}{a + e}$. Atque hujuſmodi exſempla plurima facile annecti poſſunt.

Verum hoc in Symbolis neque ita prompte, nec univerſaliter expediri poteſt atque in numeris. Exſempli gratia; quantitatum $a^2 + ac - b^2 - bc$, & $ab + af - b^2 - bf$, haud ita facile, continua hac diviſione, communis diviſor innoteſcit: cum interim communem habeant diviſorem $a - b$; ut ex adjunctis operationibus patet.

$a - b)$

$$
\begin{array}{l}
a-b)\,a^2+ac-b^2-bc\,(a+b+c \\
\quad a^2-ab \\
\hline
\quad ab+ac-b^2-bc \\
\quad ab \;\text{———}\; b^2 \\
\hline
\qquad ac \;\text{———}\; bc \\
\qquad ac \;\text{———}\; bc \\
\hline
\qquad 0\,0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
a-b)\,ab+af-b^2-bf\,(b+f \\
\quad ab \;\text{———}\; b^2 \\
\hline
\qquad af \;\text{———}\; bf \\
\qquad af \;\text{———}\; bf \\
\hline
\qquad 0\,0
\end{array}
$$

Adeoque communis illius Diviſoris ope reducentur expoſitæ quantitates a^2+ac-b^2-bc & $ab+af-b^2-bf$, ad terminos in eadem ratione minores $a+b+c$, & $b+f$. Adeoq; $\frac{a^2+ac-b^2-bc}{ab+af-b^2-bf}=\frac{a+b+c}{b+f}$.

In hujuſmodi itaque caſibus, atque hiſce ſimilibus, ſagacitate opus erit, & conſilium in arena capiendum, ut expoſitæ quantitates compoſitæ, ad ſimpliciſſimas in eadem ratione reducantur.

Sed de Additione & Subductione hactenus.

CAP. XLIII.

Fractionum Multiplicatio & Diviſio: per numerum Integrum; per numerum fractum. Multiplicationis, & Diviſionis inverſæ, æquipollentia. Producti, & Quotientis, in minimis terminis exhibitio. Operationum præcedentium (Additionis, Subductionis, Multiplicationis, & Diviſionis) brevis Synopſis.

Fractionis per numerum integrum Multiplicatio.

Sequitur Fractionum Multiplicatio & Diviſio.

Si *Numerus fractus per Integrum multiplicandus* ſit, nihil hic difficultatis ineſt: Quippe id *ſola Numeratoris multiplicatione peragitur.* Sic $\frac{2}{5}\times 2=\frac{4}{5}$. Nam bis duo ſunt quatuor, quæcunq; demum

demum ea ſint quæ numerantur: ſive integra ſint, ſive partes. Qua enim ratione, bis duo homines, ſunt quatuor homines; bis duo corpora, quatuor corpora; bis duo integra, quatuor integra; bis duo millia, quatuor millia; &c. (nempe, quia bis duo ſimpliciter, ſunt quatuor:) eâdem, & bis duæ partes, quatuor partes; bis duo quadrantes, quatuor quadrantes; bis duo quintantes, quatuor quintantes, (ſive partes quintæ.) &c. Sic $\frac{2}{3} \times A$, vel $\frac{2}{3} A$, erit $\frac{2A}{3}$. Sic $D \times \frac{A}{B}$, vel, $\frac{A}{B} \times D$, vel $\frac{A}{B} D$, erit $\frac{AD}{B}$. Et ſic in aliis.

Vel etiam, quoties id commode fieri poteſt, pro *Multiplicatione Numeratoris*, ſubſtitui poterit *Denominatoris* Diviſio. Quippe idem omnino fit, quoad fractionis valorem, ſive multiplicemus Numeratorem, ſive Denominatorem dividamus: & contra. Si enim verbi gratia, duplandus ſit numerus fractus $\frac{3}{4}$: perinde eſt ſive duplicetur numerator, ut fiat $\frac{6}{4}$; ſive denominator biſecetur, ut fiat $\frac{3}{2}$: eadem enim utrobiq; prodibit fractionis quantitas, $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, quoniam eadem eſt utrobique numeratoris ad denominatorem ratio, quippe $6.4::3.2$. Sic alibi; $\frac{4}{6} \times 3 = \frac{12}{6} = \frac{4}{2} = 2$. Et $\frac{2}{3} \times 3 = \frac{6}{3} = \frac{2}{1} = 2$. $\frac{2}{15} \times 5 = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ &c. Et pariter in Symbolis. Eſt $\frac{A}{BC} \times B = \frac{BA}{BC} = \frac{A}{C}$.

Fractionis per numerum integrum Diviſio.

Contra vero: Si *per numerum integrum dividendus ſit numerus fractus: diviſo numeratore per diviſorem datum, dividitur fractio.* Puta ſi dividenda ſit fractio $\frac{4}{5}$, per 2: prodibit quotiens $\frac{2}{5}$. quia nempe 2)4(2. Cum enim univerſaliter ſemiſſis numeri 4, ſit 2; quæcunque ſint quæ numerentur: qua ratione ſemiſſis quatuor integrorum, ſunt duo integra; & ſemiſſis quatuor decadum, duæ decades; &c. Eâdem & ſemiſſis quatuor partium, ſunt duæ partes; ſemiſſis quatuor quintantum, duo quintantes. &c.

Vel etiam, ſi ejuſmodi diviſio commode fieri non poſſit; (puta, cum diviſor datus, non eſt Numeratoris aliquota pars, adeoque non illum præciſe metiatur ſine reſiduo:) pro *Diviſione numeratoris*, ſubſtituatur, *Denominatoris multiplicatio*; tantundem ſiquidem valet, ut modo dictum eſt. Quò enim major eſt denominator, eo minores ſupponuntur integri partes; adeoque, manente

manente eodem muneratore, minuitur fractio. Et perinde eſt ſive ſumatur partium numerus, verbi gratia, duplo minor, hoc eſt, ſemiſſis; ſive idem numerus partium duplo minorum, hoc eſt, dimidiatarum: utrobique enim aſſumitur deſignatæ quantitatis dimidium. Sic 2) $\frac{4}{5}$ ($\frac{2}{5}$ = $\frac{4}{10}$. Et 2) $\frac{1}{5}$ ($\frac{1}{10}$. Et in Symbolis ſimiliter A) $\frac{AB}{C}$ ($\frac{B}{C} = \frac{AB}{AC}$. Item C) $\frac{A}{B}$ ($\frac{A}{BC}$. Et A) $\frac{A}{B}$ ($\frac{A}{AB} = \frac{1}{B}$. Et poteſt quidem poſterior hæc methodus (per denominatoris multiplicationem) ſat commode ubivis adhiberi: prior autem illa (per numeratoris diviſionem) haud ita commode niſi cum diviſor eſt numeratoris aliquota pars.

Cum vero *Fractio* proponitur, ſive *Multiplicanda ſive Dividenda*, non per numerum Integrum, ſed *per aliam fractionem*: operatio paulo magis intricata eſt, nec niſi duabus operationibus diſtinctis abſolvitur. Nempe, *poſtquam per dati Multiplicatoris vel Diviſoris Numeratorem, tanquam per numerum integrum* (ut modo oſtenſum eſt) *fuerit multiplicata vel diviſa; quantitas inde prodiens, deinceps per dati multiplicatoris aut diviſoris Denominatorem, contrariâ operatione afficienda eſt.* Quippe hæc poſterior operatio quaſi corrigit priorem, quæ numeratorem fractionis, tanquam ſi eſſet numerus integer, aſſumpſerat.

Fractionis per fractionem, Multiplicatio & Diviſio.

Sic ſi multiplicetur $\frac{4}{5}$ in 2, prodibit $\frac{8}{5}$; at ſi in $\frac{2}{3}$ (nempe prioris multiplicatoris trientem) prodibit 3) $\frac{8}{5}$ ($\frac{8}{15}$, (nempe prioris producti triens,) adeoque $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$. Ratio ſatis patet. Nam qui multiplicat per 2, petit duplum; at qui multiplicat per $\frac{2}{3}$, petit dupli trientem (ſive trientis duplum,) adeoque quod ex duplicatione prodit, eſt triſecandum, ut habeatur dupli triens. Sic $\frac{A}{B} \times C = \frac{AC}{B}$, & D) $\frac{AC}{B}$ ($\frac{AC}{BD}$; ergo $\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$.

Eodem modo, ſi dividenda ſit fractio $\frac{4}{5}$ per $\frac{2}{3}$: Diviſa prius $\frac{4}{5}$ per diviſoris Numeratorem 2; nempe 2) $\frac{4}{5}$ ($\frac{2}{5}$ = $\frac{4}{10}$: quæ provenit fractio $\frac{2}{5}$ vel $\frac{4}{10}$, multiplicanda erit in diviſoris Denominatorem 3; puta $\frac{4}{10} \times 3 = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} = \frac{2}{5} \times 3$: adeoque

$\frac{2}{3}) \frac{4}{5} (\frac{12}{10} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$. Ratio patet. Nam qui dividit per 2, petit quaſi quoties in numero dividẽdo contineatur numerus 2: quod ubi ex quotiente reſciverit, multiplicando porro per 3, cognoſcet quoties cõtineatur $\frac{2}{3}$, nempe numeri 2 triens: quippe numerus trientum binarii, triplo major ſit neceſſe eſt quam binariorum numerus, cum quilibet binarius contineat ſui tres trientes. Sic in Symbolis, $D) \frac{A}{B} (\frac{A}{BD}$, & $\frac{A}{BD} \times C = \frac{AC}{BD}$, ergo $\frac{D}{C}) \frac{A}{B} (\frac{AC}{BD}$.

Multiplicationis & Diviſionis inverſæ, æquipollentia.

Atque hinc ſtatim conſtat, (quod apprime notandum eſt,) *Idem omnino fieri ſive multiplicemus per* $\frac{C}{D}$, *ſive dividamus per* $\frac{D}{C}$: quippe eadem utrobique prodibit quantitas. Item ſive multiplicemus per $\frac{1}{2}$, ſive dividamus per 2 vel $\frac{2}{1}$; quippe utrobique quæritur expoſitæ quantitatis ſemiſſis. Item, ſive per $\frac{2}{3}$ multiplicemus, ſive per $\frac{3}{2}$ dividamus. Et ſic ubique; ſit licet quantitas (ſic dividenda aut multiplicanda) vel integrum quid, vel fractum.

$$\frac{D}{C}) A (\frac{AC}{D} = A \times \frac{C}{D}. \quad \frac{D}{C}) \frac{A}{B} (\frac{AC}{BD} = \frac{A}{B} \times \frac{C}{D}.$$

$$\frac{D}{C}) AD (\frac{ADC}{D} = AC = AD \times \frac{C}{D}.$$

$$\frac{D}{C}) \frac{A}{C} (\frac{AC}{CD} = \frac{A}{D} = \frac{A}{C} \times \frac{C}{D}.$$

$$2) \frac{4}{5} (\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{4}{5} \times \frac{1}{2}. \quad \frac{1}{2}) \frac{4}{5} (\frac{8}{5} = \frac{4}{5} \times \frac{2}{1}:$$

$$\frac{2}{3}) 4 (\frac{6}{1} = 4 \times \frac{3}{2}. \quad \text{vel} \quad \frac{1}{2}) \frac{4}{1} (\frac{8}{1} = \frac{4}{1} \times \frac{2}{1}.$$

$$\frac{3}{2}) 9 (\frac{18}{3} = \frac{6}{1} = 6 = 9 \times \frac{2}{3}. \quad \frac{1}{3}) \frac{2}{1} (\frac{18}{3} = 6 = \frac{2}{1} \times \frac{3}{1}.$$

Breviter; Multiplicationis & Diviſionis (in Fractionis) doctrina, hujuſmodi eſt (ut ex prædictis liquet:)

Numeratoris

Numeratoris { Multiplicatio, Multiplicat / Diviſio, dividit } fractionem.
Denominatoris { Multiplicatio, dividit / Diviſio, multiplicat } fractionem.

Quia verò numerus quilibet per quemlibet multiplicari poteſt commode, at non ita per quemlibet dividi (ut nempe nullum ſit reſiduum:) utraque igitur operatio, tum Multiplicatio ſcilicet, tum Diviſio Fractionis, per ſolam Multiplicationem a pleriſque inſtitui ſolet; illic quidem Numeratoris, hic Denominatoris. Adeoque

Multiplicando { Numeratorem, multiplicant / Denominatorem, dividunt } Fractionē.

Si itaq; ejuſdem alicujus fractionis (vel etiam quantitatis integræ) tum Multiplicatio tum Diviſio ſimul inſtituenda ſit (quod quidem: ubi expoſitus multiplicator aut diviſor eſt fractio, contingit,) utrumque faciendum eſt. Nempe qui multiplicat per $\frac{2}{3}$; ille revera multiplicat per 2, & dividit per 3 : qui autem per $\frac{3}{2}$ dividit; ille dividit 2, & per 3 multiplicat. Et propterea, illic numerator (quantitatis expoſitæ) hic Denominator eſt per 2 multiplicandus : atque etiam Denominator illic, hic Numerator, multiplicandus per 3. (Eodem plane modo, atque in Additione & Subductione contingit: Puta qui addit $2 - 3$; ille revera addit 2, & 3 demit: & qui ſubducit $2 - 3$; ille revera 2 tollit, & addit 3.) Atque hæc quidem ad fractionum tum Multiplicationem tum Diviſionem rite intelligendum, dictu ſufficiant.

Si autem id expetat aliquis, non modo verum ut habeat ſive Productum Multiplicationis, ſive Diviſionis Quotientem; ſed in minimis terminis: Poteſt quidem illud obtineri, vel Productum aut Quotientem jam inventum reducendo; (eo nempe modo quem in præcedente capite indicavimus; puta tum numeratorem, tum denominatorem maxima communi menſurâ *Producti & Quotientis exhibitio in minimis terminis.*

dividendo:) vel etiam, ſi id potius expetatur, præparatione facta antecedaneâ: nempe hoc modo. Reducantur primo, expoſitæ fractiones ad terminos ſuos minimos; Numeratores ſcilicet ſingulos, ſuosq; reſpective Denominatores communi menſura maxima dividendo. Deinde vero, in Multiplicatione, Numeratores ſinguli, cum Denominatoribus alternis, ſic comparentur & reducantur; at, in Diviſione, tum Numeratores invicem, tum etiam Denominatores invicem, ſic comparentur & reducantur: Et præparatione ſic facta, tum tandem fiat ea quæ præcipitur terminorum Multiplicatio; Nempe fractionis Multiplicandæ, Numerator in Numeratorem, & Denominator in Denominatorem Multiplicanti ducatur; fractionis autem Dividendæ, Numerator in dividentis Denominatorem, & Denominator in Numeratorem. (Quod ſic breviter enunciat Oughtredus, *Multiplicatio comparat heterologos terminos, & multiplicat homologos: Diviſio comparat homologos, & multiplicat heterologos.*) Sic ſi fractio $\frac{4}{18}$ in $\frac{15}{32}$ ducenda ſit: Reducta prius $\frac{4}{18}$ ad $\frac{2}{9}$; comparo adhuc 2 numeratorem prioris, & 32 denominatorem poſterioris, proque illis ſubſtituo 1 & 16: tum etiam pro 9 denominatore prioris, & 15 numeratore poſterioris, ſubſtituo 3 & 5. Adeoque tandem prodibit $\frac{5}{48}$.

$$\frac{\overset{1}{\overset{2}{4}}}{\underset{3}{\underset{9}{18}}}\times\frac{\overset{5}{15}}{\underset{16}{32}}=\frac{5}{48}. \quad \text{Sic} \quad \frac{\overset{1}{\overset{a}{a^2}}}{\underset{b}{ab}}\times\frac{d}{\underset{1}{a}}=\frac{1}{b}\times\frac{d}{1}=\frac{d}{b}.$$

Similiter, ſi dividenda fractio $\frac{4}{18}=\frac{2}{9}$, per $2\frac{2}{15}=\frac{32}{15}$: operatio ſic procedet.

$$2\tfrac{2}{15}=\frac{\overset{16}{32}}{\underset{5}{15}}\Big)\frac{\overset{1}{\overset{2}{4}}}{\underset{3}{\underset{9}{18}}}\Big(\frac{5}{48}. \quad \text{Sic} \quad \frac{\overset{1}{a}}{d}\Big)\frac{\overset{1}{\overset{a}{a^2}}}{\underset{b}{ab}}\Big(\frac{d}{b}.$$

Totum itaque tum Additionis & Subductionis, tum Multiplicationis & Diviſionis negotium, in numeris Fractis; duobus his capitibus abſolvimus. Quod brevi hac Synopſi conſpiciendum ſubjicimus.

Operationum in numeris fractis, Synopſis.

$$\frac{a}{b} \pm \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a\beta \pm \alpha b}{b\beta}$$ Additio & Subductio.

$$\frac{a}{b} \times \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a\alpha}{b\beta}$$ Multiplicatio.

$$\frac{\alpha}{\beta} \,)\, \frac{a}{b} \,(\, \frac{a\beta}{\alpha b}$$ Diviſio.

CAP. XLIV.

De Fractionum Reductionibus variis. Impropriæ fractionis ad numerum integrum vel miſtum reductio: & contra. Reductio ad minimos terminos: Ad communem Denominatorem: Ad Denominatorem datum: Ad communem datumve Numeratorem. De fractionum fractionibus reducendis. De fractionibus Sexagenariis & Decimalibus, tum ad invicem, tum ad fractiones ordinarias reducendis.

Cum eadem quoad valorem fractio, mille modis deſignari poſſit, uti ſuperius traditum eſt: Expedit nonnunquam ex una in aliam formam fractiones tranſmutare; variaſque illarum Reductiones inſtituere: quarum præcipuas hoc ſumus capite tradituri.

Fractionem Impropriam, ad Numerum Integrum, vel ſaltem Miſtum reduci poſſe; ex ſuperioribus patet. Nempe, Numeratorem per Denominatorem dividendo. Sic $\frac{24}{6} = 4$, quia $6\,)\,24\,(\,4$. Et $\frac{24}{7} = 3\frac{3}{7}$, quia $7\,)\,24\,(\,3\frac{3}{7}$. Item $\frac{4a}{a} = 4$. quia $a\,)\,4a\,(\,4$. Et $\frac{4a}{2a} = 2$. quia $2a\,)\,4a\,(\,2$. Sic

Fractionis impropriæ ad numerum integrum vel miſtum Reductio: & contra.

$a+b$. Item $\frac{ab+b^2-ac-bc}{b^2-c^2} = \frac{a+b}{b+c}$. (facta utrobiq; diviſione per $b-c$.) Et ſimiliter in aliis. Eſtque hæc fractionū ad minimos terminos reductio, ad faciliorē valoris æſtimationē apprime utilis. Ecquis enim non facilius intelligit & mente concipit fractionem ſive rationem $\frac{1}{2}$, vel 1 ad 2; quam $\frac{783}{1566}$, vel 783 ad 1566? Adeoque tum fractiones tum Rationes commodius exprimuntur (cæteris paribus) in minoribus quam in majoribus terminis; & propterea, (niſi quid ſpeciatim aliquando altioris momenti impediat,) ad terminos minimos reducendæ.

Fractionum duarum pluriumve ad communem denominatorem reductio, (quæ quam ad Additionem & Subductionem neceſſaria ſit, jam ſupra dictum eſt,) oſtenditur Cap. XLII. Nempe denominatoribus omnibus continue ductis, habetur communis Denominator; cui conveniant Numeratores, ex numeratorum expoſitorum ſingulis, in reliquorum omnium denominatores continue ductis, emergentes. Puta, $\frac{a}{\alpha}\cdot\frac{b}{\beta}\cdot\frac{c}{\gamma}\cdot$ ſic reductæ, fiunt $\frac{a\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma}\cdot\frac{b\alpha\gamma}{\alpha\beta\gamma}\cdot\frac{c\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}$. Item $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{2}{5}$, reducuntur ad $\frac{20}{40}, \frac{10}{40}, \frac{16}{40}$. Si autem non modo ad communem ſaltem aliquem, ſed ad minimum communem denominatorem, reducendæ ſint expoſitæ quotlibet fractiones: Habetur communis ille denominator, ſi datorum denominatorum illi omnes qui communem aliquam menſuram patiuntur, per illam dividantur, &, pro ipſis denominatoribus, quotientes ex ea diviſione emergentes aſſumantur; ut ex horum quotientum, reliquorumque ſiqui ſunt denominatorum, ipſiuſque communis diviſoris maximi (aut etiam maximorum omnium, ſi plures fiant comparationes,) continua multiplicatione habeatur communis denominator minimus: (ad quem quærendi Numeratores congrui, modo mox oſtendendo.) Sic in modò expoſitis, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{2}{5}$; quia 2 & 4 communem patiuntur diviſorem, 2; uterque per 2 dividatur 2)2(1, 2)4(2; & quotientes ea diviſione emergentes, 1, 2, cum tertio denominatore 5, ipſoque communi diviſore 2, continue multiplicati, exhibent minimum communem denominatorem $1\times2\times5\times2=20$. Cui

Fractionum reductio ad communem Denominatorem.

Cui denominatores congrui (modo mox oſtendendo) aſſumpti 10, 15, 8, exhibent expoſitis $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, æquales cognomines $\frac{10}{20}$, $\frac{15}{20}$, $\frac{8}{20}$, & quidem minimum communem denominatorem habentes. Sic $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{5}$; diviſis tum 2 & 10 per communem menſuram 2, prodibunt quotientes 1, 5; tum iterum 5 (quotientum jam inventorum altero, qui propterea etiam eliminandus erit, ejuſque loco novus per ſequentem diviſionem ſubſtituendus) & 5 (denominatore tertio) per communem diviſorem 5, unde prodibunt quotientes 1, 1, & (ex prioribus duobus) reſumendus 1, qui in duos communes diviſores 2, 5, continue ducti, dant $1 \times 1 \times 1 \times 2 \times 5 = 10$ communem denominatorem minimum; quibus reſpondent denominatores congrui 5, 3, 8; adeoque fractionibus expoſitis $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{5}$, æquales ſunt, cognomines $\frac{5}{10}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{8}{10}$. Sic $\frac{a}{\alpha\beta}$, $\frac{b}{\beta\gamma}$, $\frac{c}{\gamma\delta}$, reducuntur ad cognomines minimos $\frac{a\gamma\delta}{\alpha\beta\gamma\delta}$, $\frac{b\alpha\delta}{\alpha\beta\gamma\delta}$, $\frac{c\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma\delta}$.

Invento autem communi denominatore minimo, Numeratores congrui inveniantur, hoc eſt, fractiones expoſitæ ad datum Denominatorem reducuntur, hoc modo:

Fractionis ad Denominatorem datum reductio.

Ad datum denominatorem reducitur data fractio, ſi novus aſſumatur Numerator, qui, ad datum Denominatorem, eam habeat rationem, quam habet fractionis datæ numerator ad denominatorem ſuum. (Ratio manifeſta eſt; quoniam dum ſervatur eadem Numeratoris ad Denominatorem ratio, eadem manet fractionis quantitas.) Sic ſi fractionem $\frac{1}{2}$, reducere velim ad æqualem aliam, quæ denominatorem habeat 10; quærendus eſt Numerator, qui ſit ad 10, ut eſt 1 ad 2. Sive, ad quem, eam habeat rationem 10, quam 2 ad 1. Quod per auream regulam peragitur: Puta 2 . 1 :: 10. q $= \frac{10}{2} = 5$. Adeoque $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. Pariter ſi ad eundem denominatorem 10, reducere velim fractionem $\frac{4}{5}$; ſumendus eſt Numerator 8: (quia 5 . 4 :: 10 . 8.) Adeoque $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$. Et propterea (quod modo dictum erat) fractiones $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{5}$, ad communem denominatorem 10 reductæ, erunt $\frac{5}{10}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{8}{10}$. Eodem modo, fractiones $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, ad communem denominatorem 20 reductæ, erunt $\frac{10}{20}$, $\frac{15}{20}$, $\frac{8}{20}$: (Nam 2 . 1 :: 20 . 10 . Item 4 . 3 :: 20 . 15.

Item

Item $5 . 2 :: 20 . 4.)$ Sic fractio $\frac{a}{b}$, ad denominatorem bc reducta, erit $\frac{ac}{bc}$. (Quia $b . a :: bc . \frac{abc}{b} = ac.$) & fractio $\frac{ac}{bc}$, ad denominatorem b reducta, erit $\frac{a}{b}$. (quia $bc . ac :: b . \frac{acb}{bc} = a.$) Et ſic ubique.

Atque hujus reductionis magna eſt utilitas, (ut alibi, ſic) in partibus expoſitis alicujus integri, ad partes nobis notiores, vel uſitatiores, reducendis. Exſempli gratia; ſi exponatur $\frac{2}{3}$ *Solidi* Anglicani; & ſcire velim, quot ea fractio valeat nummos *Denarios* dictos, ſive partes duodecimas. Reducenda quippe erit expoſita fractio $\frac{2}{3}$, ad æqualem aliam quæ denominatorem habeat 12. Adeoque (quia $3 . 2 :: 12 . 8.$) invenio $\frac{2}{3}$, beſſem, ſive duos trientes, tantundem valere atque $\frac{8}{12}$, octo duodecimas, hoc eſt, octo denarios.

Verum hic intelligendum eſt; non poſſe ita ſemper ad datum denominatorem reduci fractio data, quòd pro quæſito Denominatore emerget nonnunquam vel fractio vel numerus miſtus; adeoque non poſſit fractione ſimplici, quæ datum habeat denominatorem, data fractio deſignari, ſed fractione compoſita opus erit. Puta ſi fractionem $\frac{2}{5}$, ad partes duodecimas reducere velim, (hoc eſt, ad fractionem æqualem, cujus denominator ſit 12.) quoniam eſt $5 . 2 :: 12 . \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$, quæſita fractio eſſet $\frac{4\frac{4}{5}}{12}$. Hoc eſt, 4 duodecimæ, atque inſuper $\frac{4}{5}$ unius duodecimæ. Adeoque, verbi gratia, $\frac{2}{5}$ ſolidi Anglicani, valebit denarios Anglicanos $4\frac{4}{5}$; hoc eſt quatuor denarios, atq; inſuper $\frac{4}{5}$ unius denarii. Sic, fractio $\frac{a}{b}$, ad aliam reducenda quæ denominatorem habeat c, erit $\frac{b)\,ac}{c}$.

Fractionum reductio ad datum Numeratorem, & ad Numeratorem communem.

Quæ autem jam tradita ſunt de Fractionis ad datum Denominatorem reductione; vel etiam plurium fractionum reductione ad Denominatorem communem: Eadem non difficulter de reductionibus ad Numeratorem datum, atque ad numerato-

rem communem, exponi poſſunt. Vix enim aliud ad hoc factu opus eſt, quam ut pro *Denominatoris* voce ſubſtituatur *Numeratoris*, & contra. Sic fractiones $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, æquipollent hiſce $\frac{3}{6}$, $\frac{3}{4}$. Item fractionibus $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, æquipollent $\frac{6}{12}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{6}{9}$. Et fractionibus $\frac{a}{\alpha}$, $\frac{b}{\beta}$, $\frac{c}{\gamma}$, æquipollent $\frac{abc}{\alpha bc}$, $\frac{abc}{\beta ac}$, $\frac{abc}{\gamma ab}$.

Sic fractio $\frac{a}{b}$, ad aliam reducenda quæ numeratorem habeat, c, erit $\frac{c}{a)bc} = \frac{a}{b}$. Et ſic alibi.

De fractionum fractionibus reducendis.

De Fractionum fractionibus, ſive minutiarum minutiis, reducendis; nonnihil etiam dicendum eſt. Quippe nonnunquam fractionem aliquam ulterius frangi contingit; cujus, tanquam Integri, partes, Minutiæ minutiarum; ſive fractionum fractiones dici ſolent. Puta trientis ſemis, vel beſſis dodrans, &c; quos ſic notare ſolent, $\frac{1}{2}\frac{1}{3}$. $\frac{3}{4}\frac{2}{3}$. &c. vel ſic, $\frac{1}{2}$ ex $\frac{1}{3}$. $\frac{3}{4}$ ex $\frac{2}{3}$. &c. Mallem ego ſic $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$, $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$. &c. (quippe nihil aliud eſt hujuſmodi fractionis fractio, quam fractio ex duabus invicem multiplicatis compoſita.) Uti enim $\frac{1}{2}$ A vel $\frac{1}{2} \times$ A, eſt ſemiſſis quantitatis A; & $\frac{1}{2}$, vel $\frac{1}{2} \times 1$, ſemiſſis unius integri; $\frac{1}{2} \times 2$, ſemiſſis duorum; $\frac{1}{2} \times 3$, ſemiſſis trium: ita $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$, eſt ſemiſſis trientis; $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$, dodrans beſſis, ſive tres quartæ duarum tertiarum: &c.

Atque hinc ſtatim patet methodus, ejuſmodi fractiones compoſitas ad ſimplices reducendi. Nempe multiplicatione ſola id peragitur. Puta ductis invicem $\frac{3}{4}$ & $\frac{2}{3}$, erit (per tradita in ſuperiore capite) $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$. Sic $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. &c. Similiter ſi pluries adhuc componatur; puta ſemis dodrantis duarum tertiarum, $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$. Et ſic alibi.

Eodem plane modo reducenda eſt, hujuſmodi fractio $\frac{4\frac{4}{5}}{12}$, hoc eſt $4\frac{4}{5} \times \frac{1}{12}$, ſive $\frac{24}{5} \times \frac{1}{12} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$. aliæque ſimiles ubi Numerator fractionem adjunctam habet. Quod etiam ſic tradi poſſit: Ductis tum numeratore $4\frac{4}{5}$, tum Denominatore 12, in communem multiplicatorem 5, prodibit (immutata quantitate) $\frac{24}{60}$, vel $\frac{2}{5}$.

Nec diſſimilis erit reductio fractionis hujuſmodi (cujus Denominatori

nominatori adjungitur fractio) $\frac{3}{12\frac{1}{2}} = \frac{6}{25}$: Ductis nempe tum Numeratore tum Denominatore, in communem multiplicatorem 2, non immutatur quantitas.

Sic $\frac{4\frac{4}{5}}{12\frac{1}{2}} = \frac{48}{125}$; ductis nempe tum numeratore tum denominatore, in $10 = 5 \times 2$.

Eademque plane methodo utendum erit, in fractionibus (ſi id obtingat) etiam adhuc ulterius fractis, ſive quoad Numeratorem, ſive Denominatorem, ſive etiam utrumque. Ut non ſit opus hiſce diutius immorari.

De Fractionibus Sexagenariis & Decimalibus.

Supereſt ut de Fractionibus Sexagenariis, & Decimalibus verba facimus; earumque tum ad invicem, tum ad fractiones ordinarias reductione; atque harum ad illas. Ex omnibus enim fractionum Reductionibus, hæ duæ præ reliquis celebres ſunt; nempe reductio ad partes Sexagenarias, & ad partes Decimales: & vice verſa. Illa veteribus admodum familiaris erat & frequens; hæc maxime Recentioribus.

In fractionibus Sexagenariis, ſupponitur integrum quodvis in partes 60 dividi, quas vocant λεπτὰ minuta prima, ſcrupulos primos; Et eorum quodlibet in 60 minuta ſecunda; & quodvis horum in totidem minuta tertia; & ſic deinceps, in continua ratione ſubſexagecupla. Sic, verbi gratia: *Hora* dividitur in 60 minuta prima, & quodlibet minutum primum in 60 ſecunda; & quodlibet ſecundum in totidem tertia, &c. Item circuli, ſive quadrantis, aut etiam Signi Gradus quilibet eadem ratione dividitur in Minuta prima, ſecunda, tertia, &c.

In Recentiorum partibus Decimalibus, ſupponitur Integrum quodvis dividi in 10 partes decimas; & decima quælibet, in 10 Centeſimas; quælibet centeſima in 10 Milleſimas; & ſic deinceps, in continua ratione ſubdecupla infra Unitatis locum deſcendendo, ſicut ſupra Unitatis locum continua ratione decupla aſcenditur, ad decades, centurias, millia, &c. Quæ quidem ratio dividendi integrum, multo accommodatior eſt, quam veterum Sexagenaria; quia fractiones decimales eodem plane modo tractantur, quo numeri integri, (ut ſuo loco dictum eſt,) nullamque calculi difficultatem involvunt; cum Sexagenaria

illa progreſſio perplexa nimium ſit, variaſq; reductiones poſtu- De utriſque autem ſeorſim dicetur.

Reductio fractionis ordinariæ ad partes decimales. Et contra.

Reducitur fractio quælibet ordinaria ad partes decimales, ſi numeratorem (additis poſt lineam ſeparatricem quot opus eſt ciphris, quæ gradus infra Unitatem deſcendentes deſignent,) per denominatorem dividamus. (quippe hoc pacto diviſio, quam indicat fractionis notatio, actu peragitur : Quomodo autem ea inſtituenda eſt per locos deſcendentes diviſio, jam ſupra ſuo loco oſtenſum eſt, ubi de integrorum diviſione verba fecimus.) Sic $\frac{4}{5} = 0|8$. $\frac{3}{8} = 0|375$. &c. ut diviſione patebit.

```
                              8 4
5 ) 4, 00 ( 0,8.       8 ) 3,0000 ( 0,375
       5                      888
```

Si autem (quod non raro contingit) ejuſmodi occurrat fractio, quæ vel non omnino, vel non niſi longiori operatione, accurate poſſit in partibus decimalibus exprimi : poſſumus operationem quouſque libet inſtituere, donec quod ſuperſit tam ſit exiguum ut tuto negligi poſſit. Sic $\frac{1}{3} = 0|3333$ &c. $\frac{2}{3} = 0|6666$ &c. $\frac{1}{6} = 0|1656$ &c. $\frac{5}{6} = 0|8333$ &c. $\frac{10}{11} = 0|909090$ &c. $\frac{5}{11} = 0|454545$ &c. $\frac{3}{7} = 0|428571428$ &c. (In quibus omnibus, aliiſque ſimilibus obſervare licet eorundem numerorum recurſum, quouſque libet continuandum,) Item $\frac{3}{32} = 0|09375$. $\frac{23}{64} = 0|359375$. (In quibus, aliiſque ſimilibus, exhauritur quidem, ſed ſero, expoſita fractio partibus decimalibus.) ut dividendo patebit.

```
   1 1 1                      4 4 4
1,0000 ( 0,333 &c.        1,0000 ( 0,166 &c.
  3,333                     6,666

                                 2 2
   6 5 6 5                     1 2 4 8
5,000000 ( 0,4545 &c.       3.00000 ( 0.09375
11,1111                      32 22222
  1111                        33333
```

In

In his, inquam, aliiſque ejuſmodi caſibus, ubi partes decimales vel in longum nimis, vel in infinitum excurrunt; ſufficit vero proximum pro vero accipere; adeoq; operatione quouſq; libet continuata, quod ſupereſt negligere. Puta, pro $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{10}{11}$, $\frac{3}{32}$, &c. ſumatur 0|3333. 0|8333. 0|90909. 0|0937. Vel etiam 0|333. 0|833. 0|909. 0|094. Vel forte 0|33. 0|83. 0|91. 0|09. prout major minorve accuratio requiratur.

Fractiones autem Decimales, ubi opus eſt, eodem plane modo ad alias reducuntur, quo reliquæ fractiones ab una ad aliam denominationem. Puta 0|5, hoc eſt $\frac{5}{10}$, ad $\frac{1}{2}$, dividendo tum Numeratorem tum Denominatorem, per maximum communem diviſorem 5. Sic 0|09375 $= \frac{9375}{100000} = \frac{3}{32}$, nempe dividendo per maximam communem menſuram 3125. Et ſic in reliquis. Si autem ea reperiatur menſura quæ non quidem accurate, at ſaltem quã proxime utrumq; terminũ menſuret; poterit illius ope aſſumi fractio ordinaria, quæ, licet non accuratè, quam proximè tamen æquabitur expoſitæ Decimali: adeoque pro hac aſſumi poſſit; præſertim ſi ſupponatur fractio illa decimalis (quod non raro fit, præſertim in tabulis Aſtronomicis, Trigonometricis, &c.) non præciſe Geometricam veritatem, ſed vero proximum, deſignare. Sic, pro 0|33333, hoc eſt $\frac{33333}{100000}$ aſſumi poterit tanquam æqualis $\frac{1}{3}$, cum tamen hæc aliquanto major ſit, (quippe æqualis huic $\frac{33333}{99999}$,) ſed tantillo ut ea differentia tutò negligi poſſit, ubi geometricâ *ἀκρίβεια* non exigitur.

Si Fractio ordinaria quævis, ad partes Sexageſimales reducenda ſit: Ducto Numeratore in 60, per Denominatorem fiat Diviſio; & Quotiens indicabit Minuta; Reſiduum autem diviſionis, ſi quod ſit, in 60 ductum, & per Denominatorem (fractionis datæ) diviſum, exhibebit in Quotiente Minuta ſecunda: Et ſic deinceps minuta tertia, quarta, &c. prodibunt, ſi diviſionum reſidua ſemper in 60 ducantur, & producta per communem fractionis datæ Denominatorem dividantur: Quod eouſq; faciendum erit, donec vel nullum ſuperſit reſiduum, vel quod (ob operationem jam ſatis continuatam) negligi poſſit. Quod enim de Decimalibus modo dictum eſt, idem & in Sexagenariis fractionibus ſæpiſſime fit; nempe nunc in infinitũ, nunc ſaltem in nimis longum procedendum eſſe priuſquam tota fra-

Reductio fractionis ordinariæ, ad partes ſexageſimales. Et contra.

ctio expoſita plane exhauriatur: quo caſu, pro accurate vero, ſaltem vero proximum aſſumendum erit.

Sic $\frac{5}{24}$ = Min: 12′. 30″. præciſe. Ut calculo patet. Hoc modo.

$$\begin{array}{r} 5 \\ \underline{60} \\ 24)300(12'\tfrac{12}{24}. \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12 \\ \underline{60} \\ 24)720(30''. \end{array}$$

Vel etiam.

$$\begin{array}{r} 5 \\ \underline{60} \\ 24)300(12'\tfrac{12}{24} = 12\tfrac{1}{2}. \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ \underline{60} \\ 2)60(30''. \end{array}$$

Sic $\frac{7}{11}$ = Min: 38′. 10″. 54‴. 32⁗. &c. = Min: 38′. 11″. fere. Nam

$$\begin{array}{r} 7 \\ \underline{60} \\ 11)420(38'\tfrac{2}{11}. \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \\ \underline{60} \\ 11)120(10''\tfrac{10}{11}. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ \underline{60} \\ 11)600(54'''\tfrac{6}{11}. \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6 \\ \underline{60} \\ 11)360(32''''\tfrac{8}{11}. \end{array}$$

Partes autem Sexageſimales ad fractiones ordinarias, reducuntur: ſi reductis omnibus ad ſcrupulorum ultimam denominationem, eorumque numero pro numeratore ſumpto, congruus ſcribatur Denominator; nempe numerus ille qui oſtendit quot iſtius ordinis ſcrupuli in uno integro continentur. Sic 12′. 30″. reducuntur ad fractionem ordinariam $\frac{5}{24}$. Hoc modo

$$\begin{array}{r} 12' \\ \underline{60} \\ 720'' \\ \underline{30''} \\ 750'' \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ \underline{60} \\ 60' \\ \underline{60} \\ 3600'' \end{array} \qquad \frac{250}{1200} = \frac{25}{120} = \frac{12}{22} = \frac{5}{24}.$$

Cum enim ſingula minuta prima contineant 60 ſecunda, 12

prima

prima continebunt 720 ſecunda, quibus additis aliis ſecundis 30, erit ſecundorum numerus 750. At vero in uno Integro continentur Minuta prima 60, adeoque minuta ſecunda 3600: Sunt ergo illa ad unum integrum; ut 750 ad 3600, hoc eſt (reductione fracta ad minimos termines) ut 5 ad 24. Adeoque $12'.30''. = \frac{750}{3600} = \frac{5}{24}$.

Decimalium uſus, quàm Sexageſimalium, quanto expeditior.

Eſt autem uſus partium decimalium incredibili fere differentia magis compendioſus, quam partium ſexageſimalium. Quod vel unico hoc exſemplo ſatis indicabitur.

Poſito quod Solis curſus annuus, per integrum Zodiaci circulum, abſolvatur diebus 365, horis 5, minutis 49′, 16″, 46‴: quæritur quantus ſit illius motus diurnus medius. Hoc eſt, juxta leges Regulæ aureæ; Ut tempus annuum, 365 d, 5 h, 49′, 16″, 46‴; ad tempus diurnum, 24 h: ſic motus annuus medius, graduum 60; ad motum diurnum, graduum quot?

Quoniam autem hic terminus primus, qui futurus eſt diviſor, ex pluribus denominatoribus conſtat; quo melius inſtituatur diviſio, reducendus eſt ille primò ad unam denominationem. In quem finem, numerus dierum 365, per 24 (numerum horarum in ſingulis diebus) multiplicandus, atque adjiciendæ inſuper horæ 5 (in quæſtione adjunctæ) ut habeatur numerus horarum in tempore expoſito, nempe 8765; Hæ horæ in minuta prima reductæ (multiplicando per 60) adjunctis inſuper 49′ expoſitis; exhibent minuta prima, 525949: His autem minutis primis, in ſecunda redactis, (multiplicando per 60,) & adjunctis inſuper 16″ expoſitis habentur minuta ſecunda 31556956: His denique in tertia pariter redactis, & adjunctis item 46‴, habentur minuta tertia 1893417406: quæ expoſitum tempus æquant.

Reducto autem tempore annuo in 24 horaria minuta tertia; in eadem etiam reducendum erit tempus diurnum; nempe primum in 24, & deinde in 60 ter, continue multiplicando, adeoque dies unus reperietur minutis tertiis 5184000 æqualis.

Atque hac preparatione facta; conſtituatur quæſtio ad hanc formam. Si in anno integro, hoc eſt in minutis tertiis horariis 1893417406; abſolvatur integer circulus, hoc eſt gradus 360: in uno die, hoc eſt, minutis tertiis horariis 5184000, abſolventur quot gradus? Et, operationibus Aureæ regulæ rite peractis, reperietur, ne unum quidem gradum integrum

uno

uno die abſolvi; ſed $\frac{1866240000}{1893417406}$ unius gradus. Ut ex adjuncto totius proceſſus typo patet.

```
365d, 5h, 49', 16", 46'''.      1d : : 360 gr. quot?
 ×24                             ×24
 1460                            24h
 730                             ×60
  +5                             1440'
 8765h                           ×60
  ×60                            86400"
525900                           ×60
  +49                            5184000'''
525949'
  ×60
31556940
  +16
31556956"
  ×60
1893417360
  +46
1893417406'''.  5184000''' : : 360 gr. quot?
                  360
                 31104
                 15552
1893417406) 1866240000 ( 0' 1866240000/1893417406
```

Denique, ut inventus motus diurnus medius, ordinaria fractione deſignatus, nempe grad: 0 $\frac{1866240000}{1893417406}$, partibus ſexageſimalibus exhibeatur; reducenda eſt fractio modo ſuperius oſtenſo, multiplicando Numeratorem per 60, & productum per datum denominatorem dividendo: atque hoc continue quouſque opus erit. Sive etiam (quod eodem recidet) repetitis Aureæ regulæ operationibus; Nempe, ut Denominator fractionis datæ, ad ſuum Numeratorem, ſic 60. Denominator fractionis quæſitæ, ad Numeratorem quæſitum; hoc eſt ad numerum partium ſexageſimaliũ loci proximè inferioris. Adeoq; tandem multiplici calculo comperietur, motum ſolis diurnum medium

medium, eſſe, grad: 0 $\frac{1866240000}{1893417406}$ = grad: 0, 59′, 8″, 19‴, 37⁗, proxime.

1893417406 . 1866240000 :: 60. 59′ $\frac{262773046}{1893417406}$

1893417406 . 262773046 :: 60. 8″ $\frac{619043512}{1893417406}$

1893417406 . 619043512 :: 60. 19‴ $\frac{1167680006}{1893417406}$

1893417406 . 1167680006 :: 60. 37⁗ $\frac{431611112}{1893417406}$

Totum autem hoc negotium, per partes decimales, leviſſimo ſtatim labore peragitur. Poſito nẽpe quod Solis curſus Annuus, per integrum Zodiaci circulum abſolvatur, diebus 365 |242555; motus diurnus, unica diviſionis operatione peracta, reperietur, grad. 0 |9856463735 proxime. Quod calculus indicabit.

365 |242555. 360 :: 1. 0 |9856463735.

365 |242555) $\overset{1}{360}$ 000000 (0 |9856463735.

Hanc autem quæſtionis tum propoſitionem tum reſolutionem in partibus Decimalibus, tantundem plane valere, atque operoſam illam in partibus Sexageſimalibus; ſtatim apparebit, ubi oſtendero methodum has ad illas, & vice verſa, reducendi.

Reductio partium Sexageſimalium ad Decimales & contra.

Reducuntur autem partes Sexageſimales, (& quidem eadem methodo, mutatis mutandis, aliæ item quantitates pluribus denominationibus deſignatæ,) ad partes Decimales hac methodo. Quoniam, verbi gratia, quodvis Minutum Tertium, ſit $\frac{1}{60}$ unius ſecundi, & quodvis ſecundum, $\frac{1}{60}$ unius primi, & quodvis minutum primum $\frac{1}{60}$ unius horæ; & hora quævis $\frac{1}{24}$ unius diei: Erunt, (in expoſita quantitate annua, dierum 365, hor: 5, Min. 49′, 16″, 46‴.) minuta tertia 46‴, æqualia $\frac{46}{60}$ unius ſecundi; hoc eſt (dividendo 46 per 60) ſecund: 0 |7666 &c, adeoq; 16″, 46‴, = 16 |7666″. Cumque hæc Secunda, ſint totidem Sexageſimæ unius Primi; dividendo 16 |76666″ per 60; reperietur 16 |7666″ = 0 |2794′ & propterea 46′, 16″, 46‴, = 49′, 16 |7666″ = 49 |2794′. Et ſimiliter, cum minuta prima ſint totidem ſexageſimæ unius horæ; dividendo iterum per 60; erunt Min. prima

49|27944′ = 0|8213 horæ: adeóque 5^h, 49′, 16″, 46‴, = 5|8213 horæ. Et, quia hora eſt $\frac{1}{24}$ diei; dividendo per 24 reperientur horæ 5|8213 = d: 0|2425; adeoque 365^d, 5^h, 49′, 16″, 46‴, = diebus 365|2425 proxime. Operationis proceſſum hic ſubjecimus.

365^d, 5^h, 49′, 16″, 46‴.

60) 46,00000 (0,76666 &c.	16|76666		ſecund:
60) 16,76666 (0,279444 &c.	49|2794444		prim.
60) 49,27944 (0,821324074 &c.	5|821324074		horæ.
24) 5,82132407 (0,24255516975. &c.	365|24255516975		dies.

Contra vero; Partes Decimales, ad Sexageſimales (aliaſve hiſce ſimileſq;) methodo contraria reducuntur. Nempe reſiduas ubique fractiones decimales multiplicando per 60, (aut per alium, quicunque fuerit, quæſitæ fractionis denominatorem.) Sic, verbi gratia, Motus Solis diurnus, grad: 0|9856463735, reducitur ad partes ſexageſimales 59′, 8″, 19‴, 37⁗: quam proxime. Ut ex adjuncta operatione patet.

0	9856463735	
59′	13878241	× 60
8″	3269446	
19‴	616676	
37⁗	00056	

Atque hoc pacto partes Sexageſimales, aliæque pluribus denominationibus conſtantes, ad Decimales reduci poſſunt; & rurſus (ubi opus fuerit) hæ ad illas. Et quidem de Fractionum Reductionibus hactenus.

CAP. XLV.

De Fractionum, & Rationum, Rationibus.
Totius operis Epilogus.

Atque hactenus quidem cum Fractionum, ſive etiam Rationum, (quippe perinde eſt utrâ ſub notione conſiderentur

De Fractionum Rationumve Rationibus.

tur,) Additionem, Subductionem, Multiplicationem, & Diviſionem, variaſque etiam Reductiones, quantum opus videtur, tradidimus: Non erit opus, ut quæ de Aurea Regula (ut loquuntur) aliave de Rationum aut Proportionum doctrina ſuperius tradita ſunt univerſaliter, jam iterum de Fractionibus ſpeciatim repetantur. Quippe nihil hic novi occurrit de Fractionum, ſive etiam Rationum, (ſunt enim & illæ quantitates) rationibus dicendum; præter ea quæ univerſaliter de Quantitatum ſimpliciter (cujuſcunque ſint generis) Rationibus jam ſunt tradita. Et quidem ut numeri integri (puta 2, 3, &c.) ſunt Rationum Multiplicium (duplæ, triplæ, &c.) denominatores; ſic fractiones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, &c. ſunt denominatores rationum ſubmultiplicium (ſubduplæ, ſubtriplæ, &c.) reliquæque fractiones, $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{4}$, &c. reliquarum item rationum denominatores. Et quidem, ſicut dupli ad triplum, puta 2 A ad 3 A, eadem eſt ratio quæ denominatorum ſuorum 2, ad 3. Sic, ſeſquialteri ad ſeſquitertium, $\frac{3}{2}$ A ad $\frac{4}{3}$ A, eadem eſt ratio quæ denominatorum ſuorum $\frac{3}{2}$ ad $\frac{4}{3}$. Item ſubduplum ad ſubtriplum; ſubſeſquialterum ad ſubſeſquitertium, &c. eadem omnino ratio atque ſuorum reſpective denominatorum.

Dupl. Tripl :: 2 A . 3 A :: 2 . 3.

Subdupl. Subtripl :: $\frac{1}{2}$ A . $\frac{1}{3}$ A :: $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$ :: 3 . 2.

Seſquialt. Seſquitert :: $\frac{3}{2}$ A . $\frac{4}{3}$ A :: $\frac{3}{2}$. $\frac{4}{3}$ :: 9 . 8.

Subſeſquialt. ſubſeſquiter :: $\frac{2}{3}$ A $\frac{3}{4}$ A :: $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$ :: 8 . 9.

Item;	Dupl.	Tripl	::	Quadrupl.	Sextupl.		
Hoc eſt;	2	. 3	::	4	. 6		
Et,	Subdupla	Subtripl	::	Subquadri.	Subſext.		
Hoc eſt,	$\frac{1}{2}$	. $\frac{1}{3}$	::	$\frac{1}{4}$	. $\frac{1}{6}$	::	3 . 2.

Atque hæc quidem, cum apertiſſima ſint; mirum mihi plane videtur Recentiorum aliquos, doctrinam de Rationum Rationibus, quaſi jam plane novam vendicare, atque a ſe jam primum in Matheſin introductam; cum tamen Aureæ Regulæ (ut vocant) praxis in numeris fractis, nil aliud plane ſit quam illa de Rationum rationibus doctrina, eaque omnibus notiſſima; ſal-

tem ſi ſpecierum ſive Symbolorum uſus etiam adhibeatur; quæ non minus quantitates irrationales quam rationales reſpiciunt. Quique eaſdem plane leges de rationibus addendis, componendis, dividendis, alternandis, &c. in numeris fractis valere docent, atque in numeris integris; eâdem opera docent etiam Rationum rationes eaſdem ſubire leges, atque rationes Abſolutarum quantitatum.

Totius operis Epilogus. Supereſt adhuc ad perfectam Arithmetici negotii traditionem, *Analytices* doctrina. Quam quidem ſtatueram præſenti operi adjunxiſſe. Verum cum videam jam ultra quam ſperaveram molem creviſſe; nec interim poſſe totum illud negotium ita in compendium redigi, ut huic commode ſubjungi poſſit: Placuit potius rem illam totam hic intactam præterire; adeoque & Poteſtatum Analyſin, ſive (ut loquuntur) Radicum extractionem, quæque huic conjuncta eſt de Radicibus ſurdis doctrinam. Quæ omnia aliquando forſan, modo Deus ita voluerit, peculiari ſeorſim volumine abſolvenda ſpero. Adeoque pedem hic figo.

F I N I S.

Johannis Walliſii SS. Th. D.

Geometriæ Profeſſoris *Saviliani*,

In Celeberrima Academia

OXONIENSI;

ADVERSUS

MARCI MEIBOMII

De Proportionibus Dialogum,

Tractatus Elencticus.



OXONII,

Typis *Leonard. Lichfield* Academiæ Typographi.

Impenſis *Tho. Robinſon.* 1657.

Honoratiſsimo Domino,

D. *Guilielmo Brouncker* Equiti Anrato,

Vicecomiti *Brouncker* de Lions, Baroni *Brouncker* de Newcaſtle.

JAM quintus agitur Menſis, Honoratiſſime Domine, Ex quo quam offero tractationem abſolverunt operæ. Quam ideo Tibi potius offerendam duxi, quod probe ipſe intelligas, tum quanti eſt ad Matheſin rite intelligendam *Rationes* callere, tum quam nihili eſt quem refutandum ſuſcepimus, *Dialogus Meibomii*.

Sub id temporis, cum Clariſſimum quendam Virum & Mathematicum Oxoniæ convenire contigerit, ex Dania oriundum, (qui Angliam tranſiens, Oxoniæ nos inviſere & ſalutare dignatus eſt,) facto de hoc Meibomii tractatu ſermone, intellexi, non ſibi ſoli ſed & D. *Auzotio* cuidam, Gallo, hanc novam placuiſſe doctrinam: Et quidem eo uſque ut vix inter ſe convenerit, cujus illud inventum cenſeatur, aut quo vulgante primo reſciſcat Orbis. Quippe cum Auzotius ſcriptum ſuum editurus in Belgium miſiſſet, idque Meibomio mature ſatis innotuerit; haud æquo animo tulit hic, ut ſub Auzotii nomine

nova

nova hæc prodiret doctrinam, quam ſibi ipſe vendicavit, ſibiq; jam ante aliquot annos originem debuiſſe contendit: Et fieri quidem poteſt ut non minori zelo erga prolem ſuam, quam & ſibi genuinam fuiſſe præ ſe tulit, affectus fuerit Auzotius: quem partum ſuum non minus deperiiſſe, putandum eſt,

Utut ſit, Meibomii ſaltem Dialogus prius prodiit, & credo, adhuc ſolus.

Ex eo autem tempore prodiit etiam, ſaltem ad manus meus pervenit, *Xaverii Ainſcombe*, Jeſuitæ, Tractatus, hoc ipſo anno editus: qui *Gregorii a S. Vincentio* tetragoniſmum ſtabilire fruſtra ſatagens, ejuſdem ſaltem de Rationibus & Proportionibus doctrinam ſatis, adverſus *Meibomium*, defendit; ſed & Auzotium etiam ἐμβάλλων (cujus ille opus MS nactus erat) junctim refellit.

Nos autem, qui tum Auzotii opus non vidimus, tum Ainſcomii ſuſceptum ignoravimus, Meibomii ſaltem Dialogum, quia neſcio quid & Novi & Magni præ ſe ferre videbatur, examinavimus & refutavimus.

Quam autem jam tum abſolverant operæ, nunc ſerius ea prodit in publicum Refutatio; partim quod cui ſubjungitur opus nondum perfectum erat penituſque ab operis abſolutum; partim etiam quod interea temporis occurrebat *Hobbius* ſecundo caſtigandus, ob convitia & maledicta quæ ſcripto Anglicano in me effutivit ob *Elenchum* meum quo ipſius Geometriam refutaveram. Quæ quidem Hobbii caſtigatio, tum me tum Typographos (qui, cum vel minime impediti, ſunt ſatis tardi) aliquandiu occupatos tenuit; ne hoc cum opere præcedente citius prodeat, in ipſo fere partûs momento impeditum.

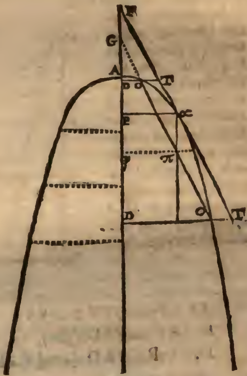
Atque hactenus quidem expoſita præſentis operis ratione, tacere poſſem, neque ulterius Dominationi Veſtræ moleſtus eſſe; niſi quod alia nonnulla ſint, quæ licet a præſenti negotio ſatis ſint aliena, nequaquam tamen aliena Dni Veſtræ, quæque hîc loci minime reticenda duxi.

Dignata eſt D V. pro ea qua polles humanitate atque in me benevolentia, ſcripta mea non modo ſupra quam ipſa mereantur æſtimare, ſed & rimari curioſiùs, atque etiam ultra quam ipſe fecerim inventa noſtra promovere. Hinc factum eſt ut quantitatis ſatis quidem irrationalis, quam ad Tetragoniſmum meum commode explicandum deſignandam habui, præ-

ter

ter eam quam ipſe exhibueram deſignationem, aliam adhuc invenit D. V. accuratam equidem & ſubtiliſſimam; quam ad mentem tuam, quàm potui proxime, ad prop. 191. *Arithmet. Infinit.* expoſui. Neque hoc contentus, ex principiis noſtris, quæ ad Circuli quadraturam deſignandam adhibueram, talē etiam quadraturam Hyperbolæ deduxiſti, quam non abſimili methodo deſignari poſſe docuiſti: quod ex te tandem, uti ſpero, aliquando diſcet Orbis literatus.

Verùm aliud eſt quod impræſentiarum adhuc dicendum habeo. Propoſitione 47ª (cui affinis & prop. 49.) tractatus mei de *Sectionibus Conicis*, hanc ego Propoſitionem, *In Paraboloide Cubicali, Diametri ſunt invicem parallelæ; & cujuſcunq; diametri ordinatim-applicatæ, ſunt rectæ in ipſius vertice contingenti parallelæ:* analytice examinandā propoſueram. Tentata autem Analyſis, in hanc deſinit Æquationem Cubicam, $9dq^{2} \pm q^{3} = 27d^{2}g$: quò legitime, ſine ullo paralogiſmo, vel ἀ*ſεωμετρησία*, perventum eſt. Concludebam itaque, (quod quidem inde omnino concludendum videbatur,) *Iſtius*



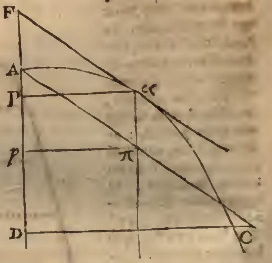
Æquationis radix q, *ſiquo modo reperiri poterit, monſtrabit quæſita puncta* D, D; *adeoque propoſiti veritatem.* Atque hac aſſertione hypothetica contentus, (adjuncta quæ huic hypotheſi conveniat demonſtratione Syntheticâ,) ulteriori diſquiſitioni (negotiis aliquot tum temporis ex improviſo ſupervenientibus impeditus quò minus huic vacare tum licuerit) ſuperſedebam; nec

 couſque

eouſque examen deducebam, ut inquirerem *Numquo modo poſſit ejuſmodi radix ſingularis exhiberi*: An potius *impoſſibilis* plane ſit, & caſum impoſſibilem innuat; adeoque & propoſiti impoſſibilitatem: Vel ſaltem *Varia*, nec utrobique eadem; ut non æquales ſint pD ſurſum, & pD deorſum, ſumendæ; adeoq; propoſiti falſitatem.

Ex eo tempore, (monente quidem, ex Gallia, ſed ſine ulla in contrarium demonſtratione, D. Robervallio) propoſitionem illam accuratius ad examen revocans, inveni quidem, utut verum ſit quod hypothetice affirmaveram, propoſitionem tamen haud ita veram eſſe.

Et quidem quod ſine Demonſtratione innuit D. Robervallius; Tu juſta demonſtratione eviciſti. Retenta ſiquidem conſtructione noſtra; ſumptâque ea parallela quæ per verticem A tranſit, (ut puncta G A coincidant, adeoq; & D O ſuperiora) rem ſic abſolvis breviter.



Eſt AP $(=\frac{2}{3}$ FP$)$ $=\frac{2}{1}$ Ap.

Et Ap $=\frac{1}{2}$ AD. (*adeoq;* $p\pi$. DO :: 1 . 2.)

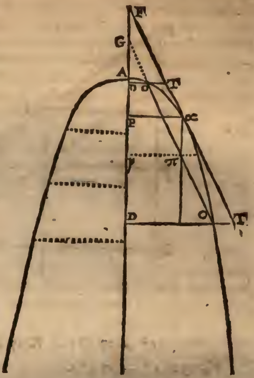
Ergo AP $=\frac{1}{6}$ AD. (*adeoq;* Pα.DO :: $\sqrt{c}\,1$. $\sqrt{c}\,6$ :: 1 . $\sqrt{c}\,6$.

Sed $p\pi =$ Pα.

Eſſet ideo $2 = \sqrt{c}\,6$. *Quod eſt impoſſibile.*

Hoc autem cum non aliunde evenire poſſe videbatur, quàm ob radicem æquationis noſtræ quærendam *q*, impoſſibilem, vel ſaltem variam: Utrum horum eſſet, inquirendum putabam. Quamvis enim nulla omnino ſit æquatio cubica quæ ſaltem

tem aliquam non habeat radicem poſſibilem: attamen interea fieri poſſe putabam, ut radicum illa quam noſtrum exigat negotium impoſſibilis foret. Si autem non impoſſibilis, ſaltem ut varia ſit, putandum videbatur; & propterea propoſitionem expoſitam haud eſſe veram, utpote quæ ſupponit lineam DD biſectam in p, (adeoque & inſcriptam OO biſecari in π: quod ſi pD ſurſum, & pD deorſum, ſumendæ (quarum indifferenter utraque radice q deſignatur) non ſint invicem æquales; neque erit vel DD biſecta in p, nec OO in π; adeoque nec vera erit propoſitio.



Radicem itaque illam more meo inquirendam ſuſcipiebam; ut videam num in ἀδύνατον exeat; vel aliud aliquod quod nondum obſervaveram myſterium pandat. (Quippe non raro contingit, ut ipſa æquationis reſolutio, inexſpectatum quid ex improviſo prodat.) Quod ſic aggredior.

Æquatio expoſita $9dq^2 \pm q^3 = 27d^2g$

ſive $q^3 \pm 9dq^2 = \pm 27d^2g$,

ſubſtituto $r \mp 3d = q$,

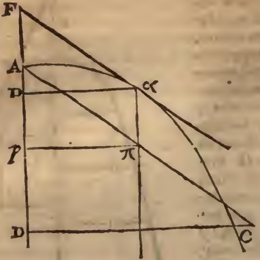
adeoq; $q^3 = r^3 \mp 9dr^2 + 27d^2r \mp 27d^3$

et $\pm 9dq^2 = \pm 9dr^2 - 54d^2r \pm 81d^3$

Erit $q^3 \pm 9dq^2 = r^3 - 27d^2r \pm 54d^3 = \pm 27d^2g$

ſive $r^3 - 27d^2r = \pm 27d^2g \mp 54d^3$.

Et quidem in caſu tuo, (ubi G A coincidunt, adeoque $g = 2d$,)



$$r^3 - 27d^2r = \pm 27d^2g^2 \mp 54d^3 = 00$$

adeoque $r^3 = 27d^2r$.

& $r^2 = 27d^2$.

& $r = \sqrt{27d^2} = 3d\sqrt{3}$.

adeoque $q = r \mp 3d = 3d\sqrt{3} \mp 3d$.

Atque hinc quidem concludendum ſtatim videatur radicem q, non utrobique eandem eſſe; ſed quoad punctum D inferius, $pD = q = 3d\sqrt{3} - 3d$; quoad ſuperius vero, $pD = q = 3d\sqrt{3} + 3d$, adeoque rectam D D non eſſe biſectam in p. Atque id ipſum concludi etiam poſſe videatur, ex æquatione primum propoſita $9dq^2 \pm q^3 = 27d^2g$; cum enim ſit tum $9dq^2 - q^3 = 27d^2g$, tum $9dq^2 + q^3 = 27d^2g$, non poſſe hoc omnino

omnino fieri videatur niſi, vel ſit $q = 0$, vel non eadem utrobique quantitas.

Verum lubricus adhuc eſt hic locus, nec ei temere fidendum; quique mihi jam ſemel impoſuit, cautè proſpiciendum eſt ne nobis imponat denuo. Et quidem, utut id verum ſit quod concluditur, non tamen inde tam facile concludi poteſt. Utrobique enim conſequentia haud ſatis firma eſt, nec niſi aliunde ſumptis indiciis ſtabiliri poteſt.

Non enim ex eo quod ſit $r^2 = 27 d^2$, ſtatim ſequitur ponendum eſſe $r = 3 d \sqrt{3}$; cum non minus eſſe poſſit $r = -3 d \sqrt{3}$: utrovis enim poſito, erit $r^2 = 27 d^2$. (Nam radix quadrati affirmativi, poteſt quidem eſſe affirmativa; ſed & poteſt eſſe negativa, cum enim ſit ea æquatio quadratica, utut ſimplex nec omnino affecta, geminam tamen propterea radicem habet, alteram affirmativam, alteram negativam: utra autem ſumenda ſit, tanquam præſenti negotio accommoda, an etiam indifferenter utravis, non ſtatim ex ipſa æquatione reſolvenda, ſed ex aliis primarii quæſiti circumſtantiis determinandum erit.) Et quidem utraque hic loci radix eſt genuina, (utut non plane indifferenter & promiſcue utravis pro libitu adhibenda ſit, ſed nunc hæc nunc illa prout res poſtulat, ut deinceps rectius patebit ubi totum quod hic latet myſterium expoſuero:) atque hoc quidem eò magis ſuſpicandum erat, quia ex æquatione expoſita duplici huc deventum eſt. Cum ſit itaque $r = \pm 3 d \sqrt{3}$, quidni & $r \mp 3 d = \pm 3 d \sqrt{3} \mp 3 d$, vel $r \mp 3 d = \mp 3 d \sqrt{3} \mp 3 d$, ut nempe radix ſurſum & deorſum æſtimanda, quod mutata ſigna indicant, ſit utrobique vel eadem ſumma vel eadem differentia quantitatum $3 d \sqrt{3}$, & $3 d$. Quid enim hic ſtatuendum ſit, non niſi ex collatis aliunde rei circumſtantiis, eoque quo huc deventum eſt proceſſu, æſtimandum eſt.

Sed & altera conſequentia non minus lubrica eſt. Non enim ex eo quod ſit tum $9 d q^2 + q^3$, tum $9 d q^2 - q^3$, eidem quantitati æqualis, concludendum eſt, quantitatem q vel nihil eſſe, vel non utrobique eadem; cum ad hoc nil aliud requiratur quam ut alibi affirmetur alibi negetur eadem quantitas, (quod ipſum in præſenti quæſtione exſpectandum magis quam metuendum videatur;) Nam, verbi gratia, poſito $q = \pm 2 d$, erit

erit $9dq^2 \pm q^3 = 44d^3$. Cùm enim ſit utrobique $9d \times 4d^2 = 36d^3$, perinde erit ſive addamus $+8d^3 = C: +2d$, ſive auferamus $-8d^3 = C: -2d$. Non interim ignoro quid huic replicationi ſolide reponi poſſit, ſi rem preſſius perpendamus, (nempe, radices utrobiq; affirmativas invicem eſſe comparandas, & æquales eſſe debere ut conſtet propoſitum; non æquationis unius affirmativam, negativæ alterius;) Nec enim negamus æquationibus illis id ſubeſſe quod rem præſentem determinet; ſed accuratius adhuc illas contemplandas eſſe dicimus, quo illud quicquid ſit eliciatur. Quod & nos deinceps facturi ſumus.

Ut itaque de præſenti negotio rectius ſtatuatur, ſeparabimus, quas hactenus conjunctim tractavimus, duas æquationes; nempe, $9dq^2 + q^3 = 27d^2g$, quæ reſpicit pD deorſum ſumendam; & $9dq^2 - q^3 = 27d^2g$, quæ reſpicit pD ſurſum ſumendam, (ut ex propoſitæ quæſtionis analyſi liquet;) Et quidem in æquatione illa reſolvenda ponitur $r - 3d = q$, in hac $r + 3d = q$. Utrobique autem (poſito $g = 2d$) provenit $r^2 = 27d^2$, adeoque $r = \pm 3d\sqrt{3}$. Et propterea illic $r - 3d = q = \pm 3d\sqrt{3} - 3d$, hic vero $r + 3d = q = \pm 3d\sqrt{3} + 3d$. Hoc eſt, ſi de pD deorſum quæratur, duæ proveniunt radices, altera affirmativa, $+3d\sqrt{3} - 3d$, quæ propterea revera deorſum prout ſupponitur ſumenda eſt; altera negativa, $-3d\sqrt{3} - 3d$; quæ propterea in partem ſuppoſitioni contrariam tendit, (nam deorſum $-3d\sqrt{3} - 3d$, tantundem eſt atque, ſurſum $+3d\sqrt{3} + 3d$.) Contra vero, ſi (juxta ſecundam æquationem) quæratur de pD ſurſum; duæ ſunt & hic radices; altera affirmativa $+3d\sqrt{3} + 3d$, quæ propterea revera ſurſum tendit; altera negativa $-3d\sqrt{3} + 3d$, quæ, in contrariam partem exponenda, revera deorſum tendit; (quippe ſurſum $-3d\sqrt{3} + 3d$, tantundem eſt atque, deorſum $+3d\sqrt{3} - 3d$.) Adeoque utramvis æquationem reſolvamus, perinde omnino eſt, quippe eædem utrobique proveniunt radices; cum hoc ſolo diſcrimine, quod quæ in una æquatione radix eſt affirmativa, eadem in altera eſt negativa, & contra. Utrovis modo, id conſtat, pD ſurſum ſumendam, eſſe

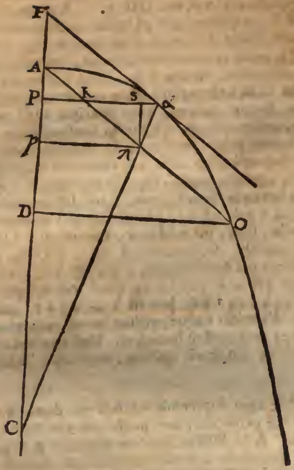
+3

$+ 3d\sqrt{3} + 3d$; deorſum vero, $\mp 3d\sqrt{3} - 3d$; adeoque nec DD biſectam eſſe in p, nec OO in π; & propterea $\alpha\pi$, diametro AP parallelam, non et ipſam eſſe diametrum.

Atque hactenus videamur æquationis nodum ſatis ſolviſſe. Ne tamen ea de re nimis ſecuri ſimus; en nova ſtatim hinc prodit difficultas. Annon enim quam hactenus conſideravimus recta DD, eadem plane eſt, in caſu a te poſito, atque AD? Omnino, inquies; quippe, cum inſcripta OO per verticem tranſeat, eodem ipſo verticis puncto confunduntur, tum punctum G, tum etiam puncta D, O, ſuperius ſumenda. Bene eſt. At, inquam, ergo recta pA, eadem eſt atque pD ſurſum ſumenda. Quidni, inquis, eſſet? Ergo, inquam, (utut de pD deorſum ſumenda ſecuri ſimus,) erit ſaltem ſurſum $pA = pD = q = \mp 3d\sqrt{3} + 3d$: id enim inventa modo docet æquationis radix, ſatis, uti videbatur, ſtatuminata. Omnino, inquies; & quidni? At, inquam, eſt $Ap = 3AP = 3d$, (hoc enim aſſumit tua demonſtratio; atque eſt veriſſimum;) ſi itaq; ſit eadem $pA = + 3d\sqrt{3} \mp 3d$, quod jam obtendi videatur; erit $3d = 3d\sqrt{3} + 3d$, hoc eſt $1 = \sqrt{3} + 1$, quod eſt impoſſibile. Videntur itaque necdum omnia ſatis inter ſe cohærere, aut ex votis noſtris ſuccedere. Quippe aliud adhuc latet, quod forte ne ſuſpiceris quidem, myſterium deinceps detegendum.

Dum hoc ago; ſupervenit ſecunda tua demonſtratio, Quæ, rem ulterius proſecuta, non modo oſtendit, Rectam $\alpha\pi$ quæ inſcriptam AO biſecat, non eſſe diametro AP parallelam; ſed, ipſi aliquando occurſuram, ipſumque tandem concurſus punctum C: adeoque & veram diametrum polliceri videatur; ſaltem ſi ulla omnino recta, ad punctum α pertingens, iſtius curvæ diameter eſſe poſſit.

In



In Paraboloide Cubicali Aa,

Quoniam eſt AP. PF :: 1. 3.

Ergo & PR. Pa :: 1. 3.

Et, poſito PR. DO :: 1. a.

Erit Pa. DO :: 3. a :: 1. $\frac{1}{3}$a.

Quia vero Pa. DO :: √cAP. √cAD :: √cPR. √cDO.

Erit Pa. DO :: √c1. √ca :: 1. √ca.

Et propterea $\frac{1}{3}a = \sqrt{c}\,ca.$ & $a = 3\sqrt{c}\,ca = \sqrt{c}\,27a$

adeoq; $a^3 = 27a.$ $a^2 = 27.$ & $a = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$

Ideoq; $P\alpha . DO :: 3 . 3\sqrt{3} :: 1 . \sqrt{3}.$

Et $AP . AD :: PR . DO :: 1 . 3\sqrt{3}.$

Porro; Quia $AP . AD :: 1 . 3\sqrt{3}.$

Ergo $AP . Ap :: 1 . \frac{1}{2}\sqrt{3}.$

Et $AP . Pp :: 1 . \frac{1}{2}\sqrt{3} - 1.$

Et quia $P\alpha . DO :: 1 . \sqrt{3}.$

Ergo $P\alpha . p\pi :: 1 . \frac{1}{2}\sqrt{3}.$

Tum quia $S\alpha . p\pi :: S\pi . pC.$

hoc eſt $P\alpha - p\pi . p\pi :: Pp . pC.$

ergo $1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} . \frac{1}{2}\sqrt{3} :: \frac{1}{2}\sqrt{3} - 1 . \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{3}}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}} :: Pp . pC.$

Ideoq; $AP . pC :: 1 . \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{3}}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}}.$

Et $AP . PC :: 1 . \frac{1}{2}\sqrt{3} - 1 + \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{3}}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}}.$

$:: 1 . \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3} - 1}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}}.$

$:: 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} . \frac{1}{2}\sqrt{3} - 1.$

Et propterea $AP . AC :: 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} . \sqrt{3} :: 1 . 4\sqrt{3} + 6.$

Et ſimili demonſtratione, in Paraboloidibus reliquis, adhibita; reperietur.

In Parabol.	*Quadratic.*	*Cubic.*	*Biquadrat.*	*Surdeſol.*	
$P\alpha . DO ::$	$1 . 2$	$1 . \sqrt{3}$	$1 . \sqrt{c}4$	$1 . \sqrt{qq}5$	&c.
$AP . AD ::$	$1 . 2 \times 2$	$1 . 3\sqrt{3}$	$1 . 4\sqrt{c}4$	$1 . 5\sqrt{qq}5$	
$AP . AC ::$	$1 - \frac{1}{2} \times 2 . \frac{1}{2} \times 2$	$1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} . \frac{2}{2}\sqrt{3}$	$1 - \frac{1}{2}\sqrt{c}4 . \frac{3}{2}\sqrt{c}4$	$1 - \frac{1}{2}\sqrt{qq}5 . \frac{4}{2}\sqrt{qq}5$	

In Paraboloide Cubicali (erecta) $A\alpha$,

Esto $AP . PR :: 1 . b$.

adeoq; $PR . AR :: b . \sqrt{:} b^2 + 1$.

Et, quia $PR . P\alpha :: 1 . 3 :: b . 3b$.

Erit $AP . P\alpha :: 1 . 3b$.

Et, quia $PR . AR :: BP (= P\alpha) . BG :: b . \sqrt{:} b^2 + 1 :: 3 . 3\sqrt{:} b^2 + 1$.

Erit $AP . BG :: 1 . 3\sqrt{:} b^2 + 1$.

Et, quia $PR . P\alpha :: 1 . 3$.

Erit $P\alpha . R\alpha :: 3 . 2$.

Et $B\alpha . R\alpha :: 6 . 2 :: 3 . 1$.

Ergo, quia $B\alpha . R\alpha :: T\alpha . \pi\alpha :: X\alpha . S\alpha = P\alpha - p\pi$.

Et $P\alpha . p\pi :: 1 . \frac{1}{2}\sqrt{3}$. (*ut in demonſtr. præced.*)

Adeoq; $P\alpha . S\alpha :: 1 . 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Erit $B\alpha = 2P\alpha . X\alpha = 3S\alpha :: 2 . 3 - \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

Et $B\alpha . BX :: 2 . \frac{3}{2}\sqrt{3} - 1$.

Ergo $P\alpha . PX :: 1 . \frac{3}{2}\sqrt{3} - 2 :: 3b . \frac{9}{2}b\sqrt{3} - 6b$.

Adeoq; $AP . PX :: 1 . \frac{9}{2}b\sqrt{3} - 6b$.

Tu, quia $PR . AR :: GY = PX . GT :: b . \sqrt{:} b^2 + 1$.

$:: \frac{9}{2}b\sqrt{3} - 6b . \frac{9}{2}\sqrt{3} - 6 : in \sqrt{:} b^2 + 1$.

Ideo $AP . GT :: 1 . \frac{9}{2}\sqrt{3} - 9 : in \sqrt{:} b^2 + 1$.

Ergo $AP . BT (= BG + GT) :: 1 . 3\sqrt{:} b^2 + 1 : pl : \frac{9}{2}\sqrt{3} - 6 : in \sqrt{:} b^2 + 1 :$

$:: 1 . \frac{9}{2}\sqrt{3} - 3 : in \sqrt{:} b^2 + 1$.

Adeoq; $AP . Go (= BT + GT) :: 1 . 9\sqrt{3} - 9 : in \sqrt{:} b^2 + 1$.

Tu quia $PR . PA :: BX (= P\alpha + PX) . XT ::$

$:: b . 1 :: \frac{9}{2}b\sqrt{3} - 3b . \frac{9}{2}\sqrt{3} - 3$.

Erit $AP . XT :: 1 . \frac{9}{2}\sqrt{3} - 3$.

Et $AP . PD (= 2XT) :: 1 . 9\sqrt{3} - 6$.

Et $AP . AD :: 1 . 9\sqrt{3} - 5$.

Et quia $AR . PR :: Go . Do :: \sqrt{:} b^2 + 1 : b ::$

$:: 9\sqrt{3} - 9 : in \sqrt{:} b^2 + 1 . 9b\sqrt{3} - 9b$.

Ergo $AP . Do :: 1 . 9b\sqrt{3} - 9b$.

Sed eſt Pα.D$\odot$ :: $\sqrt{c}$ AP . $\sqrt{c}$ AD :: $\sqrt{c}$ 1 . $\sqrt{c} : 9\sqrt{3} - 5$:

:: $\sqrt{c}\, 27 b^3$ ($= 3 b$) . $\sqrt{c} : 243 b^3 \sqrt{3} - 135 b^3$,

Ergo AP . D$\odot$ :: 1 . $\sqrt{c} : 243 b^3 \sqrt{3} - 135 b^3$.

At vero, $\sqrt{c} : 243 b^3 \sqrt{3} - 135 b^3$: *eſt minus quam*

$$9 b \sqrt{3} - 9 b = \sqrt{c} : 4374 b^3 \sqrt{3} - 7290 b^3.$$

Nam $243\sqrt{3} - 135 < 4374 \sqrt{3} - 7290$.

hoc eſt $243 \sqrt{3} < 4374 \sqrt{3} - 7155$.

hoc eſt $243 \sqrt{3} + 7155 < 4374 \sqrt{3}$.

hoc eſt $7155 < 4131 \sqrt{3}$.

hoc eſt $\sqrt{51194025} < \sqrt{51195483}$.

Ergo & D$\odot$ *minus quam* D o.

Adeoq; punctum medium inſcriptæ B ω, non eſt ipſum T *punctum, ſed aliud aliquod inter B & T.*

Sed neque medium inſcriptæ E M, *eſt in puncto* C, (*ſed inter C & M;*) *cum enim K E minus ſit quam L M, erit & E C minus quam C M.*

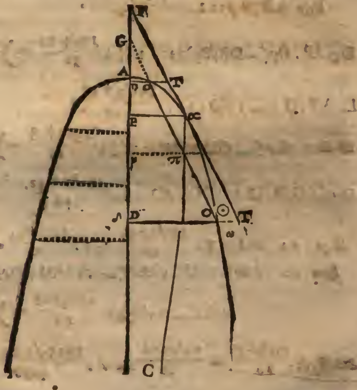
Non itaque vel recta α C, vel quidem alia ulla recta (*quippe nulla alia recta tranſit puncta α, π.*) *diameter eſſe poteſt ad verticem α.*

Sed neque (*ut videtur*) *regularis curva; ſed quæ rectæ α π T C occurrat tum in α, tum iterum in π, & poſtea inter T & C,* (*incidit enim ſupra T, verſus B; at infra punctum C, verſus M;*) *adeoque rectam α C ſæpius ſecet neceſſe eſt. Quæ cum admodum irregularis videatur, utpote circa rectam α C tortuoſe incedens, non videtur operæ pretium in illius naturam ſtudioſius inquirere.*

Iſtius autem curvæ (qualiſcunque demum fuerit) ſitus eſt hujuſmodi; Nempe, Rectæ α C occurrens in α, hinc ſubtùs tendit ad uſque π punctum; tranſiens autem rectam in π, deinceps ſupra incedit uſque dum præteriverit punctum T; tum demũ non procul ab illo puncto T rectam jam tertio tranſiens, deinceps deorſum tendit: neque poſtea vel rectã illam α C attingit uſquam, vel etiam diametrum A P. Quo enim argumento concludit tua demonſtratio, ad punctum C non attingere curvam illam, eodem concludi poterit, neque ad ullum alium diametri punctum pertingere, nedum ad eam rectæ α C partem quæ eſt ultra C.

Ne

Ne autem id gratis dictum videatur, quòd, ab α ad π (punctū medium rectæ per verticem inſcriptæ) curva ſubtùs tendat; facit demonſtratio tua quarta, quæ hoc evincit: Quam ego ad meam (quippe tuam inciſam non habeo, neque jam licebit exſpectare dum eam a cœlatore poſſim obtinere) utcunque aptavi. Ubi tamen imaginatione ſupplendum eſt (vel, ſi libet, calamo emendandum) rectam $\alpha\pi$ non jam παραλλήλως incedere, ſed ad diametrum inclinare, eique tandem occurrere, ut in figuris duabus præcedentibus, in puncto C. Punctum autem D inferius (quod tantundem deorſum a p diſtare ſupponitur quanto D alterum ſurſum) appello, diſtinctionis ergo, δ. Eique ordinatim applicata $\delta\odot$, occurrere ſupponitur curvæ in $\odot$, rectæque O O in O, quod intra curvam cadere evincit hæc demonſtratio.



Sumpto $AD = \frac{1}{8} AP$. (*Adeoque* $PD = \frac{7}{8} AP$.)

Erit $P\alpha . DO :: \sqrt{c}AP . \sqrt{c}AD :: \sqrt{c}1 . \sqrt{c}\frac{1}{8} :: 1 . \frac{1}{2}$.

Cumq; ſit $P\alpha . DO :: PF . DG :: 1 . \frac{1}{2} :: 3 . \frac{3}{2}$.

ſitq; $AP . PF :: 1 . 3$.

Erit $AP . DG :: 1 . \frac{3}{2}$.

Et $AP . FG (= PF - PD - DG) :: 1 . (3 - \frac{7}{8} - \frac{3}{2} =) \frac{5}{8}$.

Tum quia $AP . PC :: 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} . \frac{1}{2}\sqrt{3} - 1 :: 1 . 4\sqrt{3} + 5$. (*ut ſup. demõſt.*)

Erit $FP . PC :: 3 . 4\sqrt{3} + 5$.

Et $AP . FC (= FP + PC) :: 1 . 4\sqrt{3} + 8$.

Et quia $FC . FG :: \alpha C . \alpha\pi :: PC . Pp :: 4\sqrt{3}+8 . \frac{5}{8} ::$

$$:: 4\sqrt{3}+5 . \left(\frac{\frac{5}{8} \text{ in: } 4\sqrt{3}+5.}{4\sqrt{3}+8} =\right) \frac{15\sqrt{3} - 10}{32}.$$

Erit $AP . Pp :: 1 . \frac{15\sqrt{3} - 10}{32}$.

Ergo $AP . Dp (= DP + Pp) :: 1 . \left(\frac{7}{8} + \frac{15\sqrt{3} - 10}{32} =\right) \frac{15\sqrt{3} + 18}{32}$.

Et $AP . D\delta = 2pD :: 1 . \frac{15\sqrt{3} + 18}{16}$.

Et $AP . G\delta (= GD + D\delta) :: 1 . \left(\frac{3}{2} + \frac{15\sqrt{3} + 18}{16} =\right) \frac{15\sqrt{3} + 42}{16}$.

Et quia $GD . G\delta :: DO . \delta O :: \frac{3}{2} . \frac{15\sqrt{3} + 42}{16}$.

Ergo $P\alpha . \delta O :: 3 . \frac{15\sqrt{3} + 42}{16} :: 1 . \frac{5\sqrt{3} + 14}{16}$.

Item $P\alpha . \delta\odot :: \sqrt{c}AP . \sqrt{c}A\delta (= \sqrt{c} : AD + D\delta :)$

$$:: \sqrt{c}1 = 1 . \sqrt{c}\left(\frac{1}{8} + \frac{15\sqrt{3} + 18}{16} =\right) \frac{15\sqrt{3} + 20}{16}.$$

Sed eſt $\sqrt{c}\,\frac{15\sqrt{3} + 20}{16} > \frac{5\sqrt{3} + 14}{16} = \sqrt{c}\,\frac{3315\sqrt{3} + 5894}{4096}$

Hoc eſt, $\frac{3840\sqrt{3}+5120}{4096} > \frac{3315\sqrt{3}+5894}{4096}$.

Sive $3840\sqrt{3}+5120 > 3315\sqrt{3}+5894$.

Hoc eſt $525\sqrt{3} > 774$

Vel $\sqrt{826875} > \sqrt{599076}$

Ergo $\delta\odot > \delta O$

Adeoque & $\pi\omega > \pi O$.

Et propterea punctum biſectionis inſcriptæ eſt infra punctum π. *Quod erat oſtendendum.* Et ſimiliter oſtenditur de alia quavis inſcripta, quæ ſuperior ſit eâ quæ per verticem tranſit.

Cumque hæc omnia ſint legitime demonſtrata; Quid interim, inquies, de Æquatione noſtra dicendum erit, quæ demonſtrationibus hiſce tuis ſubverti plane videatur. Quamvis enim utrobique conveniat propoſitionem examinandam falſam eſſe: At tamen de ſitu puncti D ſuperioris, pugnare mutuo videantur. Quippe per Æquationis noſtræ radicem ſupra inventam, eſſet pD ſuperius $= 3d\sqrt{3}+3d$; at in demonſtratione tua prima, habetur pA (hoc eſt pD ſurſum) $= 3d$. Item cum ſit pD ſuperius $= 3d\sqrt{3}+3d$, & pD inferius $= 3d\sqrt{3}-3d$, eſſet utriuſque aggregatum, hoc eſt, recta DD $= 6d\sqrt{3}$: at in demonſtratione tua ſecunda, eſt AD (hoc eſt, in præſenti caſu, DD) ad AP, ut 1 ad $3\sqrt{3}$; adeoque cum ſit AP $= d$, erit AD $=$ DD $= 3d\sqrt{3}$, non $6d\sqrt{3}$.

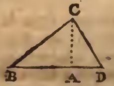
Quid itaque dicemus; Num utraque vera eſſe? (tum Analyſin noſtram, tum demonſtrationes tuas?) At quî illud fieri poſſit? ſiquidem ἀληθῆ συναληθεύει. Num itaque vel has vel illam falſi accuſabimus? atque alicubi erratum eſſe dicemus? Sed neque videtur hoc dicendum. Eccubi enim? Num igitur dicemus tandem (quod tamen ut dicam non niſi extrema neceſſitate adigar) Analyſeos leges non ſatis ratas habendas eſſe? adeoque Analyticen ipſam (quod faciunt nonnulli, ipſius parum gnari,) accuſabimus, quaſi quid falſum doceat? At ab hoc ego D. V. ſatis abhorrere non dubito; quippe quo Analyſin accuratius nemo, nemo ſubtilius, exercet. Fateor equidem fieri nonnunquam poſſe (quod tamen nemo quem ſcio Analyſta hactenus prodidit,) ut in caſu impoſſibili, non eam ſtatim detegat

tegat

tegat analyſis impoſſibilitatem, ſed rem quaſi poſſibilis eſſet ſolvit; & vice verſa, videatur aliquando analyſis in ἀδύνατον exire, quum interim res expoſita non ſit plane impoſſibilis: At nihil ego tale hoc in caſu dicendum autumo.

Ne autem ego temere illud faſſus videar, & cui Tu forſan haud ſtatim aſſentiendum eſſe putaveris; non abs re fore autumo, utut πάρεργον videatur, eorum utrumque exſemplo indicare.

Si ſupponatur Triangulum cujus duo crura ſint $BC = 2$, $CD = 1$, & baſis $BD = 4$, petatur autem, ſi a vertice C demittatur ad baſin perpendicularis CA, quod nam illa baſis punctum deſignet; ſive, quanta futurà ſit recta BA. Analyſis ſic procedit. Eſt $CBq - BAq = CAq = CDq - ADq = CDq - Q{:}BD - BA{:} = CDq - BDq + 2BD \times BA - BAq$. Adeoque $CBq = CDq - BDq + 2BD \times BA$. Hoc eſt $CBq - CDq + BDq = 2BD \times BA$. Ideoque $\frac{CBq - CDq + BDq}{2BD} = BA$



Hoc eſt $\frac{4 - 1 + 16}{8} = \frac{19}{8} = 2\frac{3}{8} = BA$. quod erat inquirendum. quin caſus autem ille ſit impoſſibilis, ecquis dubitet? quippe ponitur Baſis utriſque ſimul cruribus major. Tentata tamen Analyſis non ſecus procedit quam ſi caſus eſſet maximè poſſibilis.

Ad alteram conceſſionis partem quod attinet; Nempe quod Analyſis aliquando ad quid impoſſibile nos deducere videatur, cum interim caſus expoſitus minime ſit impoſſibilis: Quò hoc rectius oſtendam, opus erit de Æquationibus Cubicis reſolvendis pauca præmittere; quæ tum huic negotio, tum etiam inquiſitioni noſtræ primariæ ſubſerviant.

Æquationes omnes cubicas vel tales eſſe vel ad tales ſaltem reduci poſſe, quæ non niſi ſub Radice (ut loquuntur) ſint affectæ, notum eſt. (quippe ſi ſub quadrato ſit affecta æquatio, gradum ſupremo proximum tolli poſſe docuit Carteſius, atque ante illnm Vieta, Harriotus, aliiq;) Poſſunt autem illæ omnes

vel

vel ad hanc formam $Ac - BqA = \pm Dc$, vel ad hanc reduci $Ac + BqA = \pm Dc$.

Hujuſmodi vero ego Æquationes Cubicas, adeoq; ſolutu difficiliores, memini me olim conatum (exercitii gratia, poſtquam Analytices rudimenta imbiberim) ad quadraticas reducere. Idque hac methodo.

$$\text{Poſitis, } Z = A + E.\ Æ = AE.\ \text{Z} = Ac + Ec.$$

$$\text{Erit, } Zc = Ac + Ec + 3AAE + 3AEE = \text{Z} + 3ÆZ.$$

$$\text{Adeoq; } Zc - 3ÆZ = \text{Z}.$$

$$\text{Item poſitis } X = A - E:\ \text{X} = Ac - Ec.$$

$$\text{Erit } Xc = Ac - Ec - 3AAE + 3AEE = \text{X} - 3ÆX.$$

$$\text{Adeoq; } Xc + 3ÆX = \text{X}.$$

In Æquationibus itaque cubicis ad hanc formam conſtitutis, $Zc - 3ÆZ = \text{Z}$, animadvertebam, *Æquationis radicem* Z, *eſſe ſummam duarum quantitatum* A E, *quarum rectangulum* Æ (*tertia pars coefficientis intermedii termini;*) *&, cuborum aggregatum* Z, *terminus abſolutus.*

Item, in Æquationibus Cubicis ad hanc formam conſtitutis, $Xc + 3ÆX = \text{X}$; *eſt æquationis radix X, duarum quantitatum differentia, quarum rectangulum eſt Æ* (*tertia pars coefficientis;*) *&, cuborum differentia,* X, *terminus abſolutus.*

Adeoq; redacta eſt illarum Æquationum difficultas, ad hoc problema; *Datis duarum quantitatum, tum Rectangulo, tum Cuborum ſummâ vel differentiâ ipſarum quantitatum vel ſummam vel differentiam aut ipſas etiam quantitates inveſtigare.* Quod ſic efficitur,

$$\text{Eſt } \frac{Æ}{A} = E.\ \frac{Æc}{Ac} = Ec.$$

$$\text{Ergo } Ac + \frac{Æc}{Ac} = Ac + Ec = \text{Z}.$$

$$\text{Et } Acc + Æc = \text{Z}Ac.$$

$$\text{Sive } \text{Z}Ac - Acc = Æc.$$

$$\text{Similiter } \frac{Æ}{E} = A.\ \frac{Æc}{Ec} = Ac$$

Adeoque $\frac{\text{Æ}c}{Ec} + Ec = \mathcal{Z} = Ac + E.$

Et $\mathcal{Z}Ec - Ecc = \text{Æ}c.$

Reſolutis itaque æquationibus (quadraticis quidem, ſed ex radice ſolida ortis,)

$$\mathcal{Z}Ac - Acc = \text{Æ}c = \mathcal{Z}Ec - Ecc.$$

$$\text{Erit } \tfrac{1}{2}\mathcal{Z} \pm \sqrt{:}\, \tfrac{1}{4}\mathcal{Z}q - \text{Æ}c. = \begin{cases} Ac. \\ Ec. \end{cases}$$

$$\text{Adeoque } \left.\begin{array}{l} \sqrt{c}.\, \tfrac{1}{2}\mathcal{Z} + \sqrt{:}\, \tfrac{1}{4}\mathcal{Z}q - \text{Æ}c. \\ + \sqrt{c}.\, \tfrac{1}{2}\mathcal{Z} - \sqrt{:}\, \tfrac{1}{4}\mathcal{Z}q - \text{Æ}c. \end{array}\right\} = A + E = \mathcal{Z}.$$

Ad quam regulã exigendæ ſunt Æquationes Cubicæ hujus formæ $Zc - 3\text{Æ}Z = +\mathcal{Z}$: (vel etiam hujus $Zc - 3\text{Æ}Z = -\mathcal{Z}$, quæ ab illa hoc ſolo differt, quod quæ illic affirmative exponendæ ſint quantitates $+A+E, = Z$; hic interpretandæ ſint negative, $-A-E=Z$.) Quam, *Regulam primam* jam appellabimus.

Eodem modo, cum ſit $Ac - \frac{\text{Æ}c}{Ac} = Ac - Ec = \mathcal{X}$;

Erit $Acc - \text{Æ}c = \mathcal{X}Ac.$

ſive $Acc - \mathcal{X}Ac = \text{Æ}c.$

Item $\frac{\text{Æ}c}{Ec} - Ec = Ac - Ec = \mathcal{X}.$

& $\text{Æ}c - Ecc = \mathcal{X}Ec.$

hoc eſt $Ecc + \mathcal{X}Ec = \text{Æ}c.$

Reſolutis itaque æquationibus

$$Acc - \mathcal{X}Ac = \text{Æ}c = Ecc + \mathcal{X}Ec.$$

$$\text{Erit } \sqrt{:}\, \tfrac{1}{4}\mathcal{X}q + \text{Æ}c: \pm \tfrac{1}{2}\mathcal{X}: = \begin{cases} Ac. \\ Ec. \end{cases}$$

$$\text{Adeoque } \left.\begin{array}{l} \sqrt{c}.\, \sqrt{:}\, \tfrac{1}{4}\mathcal{X}q + \text{Æ}c: + \tfrac{1}{2}\mathcal{X}. \\ - \sqrt{c}.\, \sqrt{:}\, \tfrac{1}{4}\mathcal{X}q + \text{Æ}c: \tfrac{1}{2}\mathcal{X}. \end{array}\right\} = A - E = \mathcal{X}.$$

Atque

Atque ad hanc regulam exigendæ ſunt hujus formæ $Xc + 3ÆX = +X$ æquationes omnes. Vel etiam hujus $Xc + 3ÆX = -X$: cum hoc ſolo diſcrimine, quod cum illic quantitas major A, ſit affirmativa; minor E, negativa; & $X = A - E$ quantitas affirmativa; hic, major A erit negativa, minor E affirmativa, adeoque & $X = -A + E$ quantitas negativa. Atque hanc jam appellamus *Regulam Secundam*.

Exſemplum poſterioris Regulæ hoc eſto $Xc + 12X = 63$. Hoc eſt, inquam, $Xc + 3ÆX = X$. Ergo $\frac{12}{3} = 4 = Æ$. Et $\frac{4}{A} = \frac{Æ}{A} = E$. Et $Ac - \frac{64}{Ac} = Ac - Ec = X = 63$. Adeoque $Acc - 64 = 63\,Ac$. vel $Acc - 63\,Ac = 64$. (Et ſimiliter $\frac{64}{Ec} = Ac$. et $\frac{64}{Ec} - Ec, -Ec = Ac = X = 63$. adeoq; $64 - Ecc = 63\,Ec$. vel $64 = Ecc + 63Ec$.) Ergo

$$\surd: \tfrac{3969}{4} + 64 : \pm \tfrac{63}{2} = \surd \tfrac{4225}{4} \pm \tfrac{63}{2} = \tfrac{65}{2} \pm \tfrac{63}{2} = \begin{cases} 64 = Ec \\ 1 = Ec \end{cases}$$

Et propterea $\surd c64 - \surd c1 = 4 - 1 = 3 = X = A - E$. Vel etiam, (ſi principio poſitum eſſet -63) mutatis ubique ſignis numeri 63 proveniret $-4 + 1 = -3 = X = -A + E$.

Vel ſic (immediate ad regulam exigendo) Æquatio eſt $Xc + 12X = \pm 63$. Ergo $3)\,12\,(4 = Æ$. adeoq; $64 = Æc$. Et $\frac{63}{2} = \frac{1}{2}X$. adeoque $\frac{3969}{4} = \frac{1}{4}Xq$. & propterea, $\surd: \frac{1}{4}Xq + Æc : \pm \frac{1}{2}X = \surd : \frac{3969}{4} + 64 : \pm \frac{63}{2} = \begin{cases} 64 = Ac. \\ 1 = Ec. \end{cases}$ Adeoq;

$\pm \surd c64 \mp \surd c1 = \pm 4 \mp 1 = \pm 3 = X$.

Exſemplum prioris hoc eſto, $Zc - 12Z = 65$. Hoc eſt, inquam, $Zc - 3ÆZ = Z$. Ergo $3)\,12\,(4 = Æ$. & $\frac{4}{A} = E$. & $Ac + \frac{64}{Ac} = (Ac + Ec = Z =)\ 65$. Et $Acc + 64 = 65\,Ac$

65Ac. vel $64 = 65Ac - Acc$. (& ſimiliter $\frac{64}{Ec} + Ec = Ac + Ec = Z = 65$. adeoque $64 = 65Ec - Ecc$.) Ergo

$$\frac{65}{2} \pm \sqrt{:\frac{4225}{4} - 64:} = \frac{65}{2} \pm \sqrt{\frac{3969}{4}} = \frac{65}{2} \pm \frac{63}{2} = \begin{cases} 64 = Ac. \\ 1 = Ec. \end{cases}$$

Et propterea $\sqrt{c}\,64 + \sqrt{c}\,1 = 4 + 1 = 5 = Z$. Vel etiam, (ſi principio poſitum eſſet -65,) mutatis ubique ſignis numeri 65, proveniſſet $-4 - 1 = -5 = Z$.

Vel ſic (immediate ad regulam exigendo;) Æquatio propoſita eſt $Zc - 12Z = \pm 65$. Ergo $3)12(4 = Æ$. adeoq; $64 = Æc$. Et $\frac{65}{2} = \frac{1}{2}Z$. adeoque $\frac{4225}{4} = \frac{1}{4}Zq$. Et propterea $\frac{1}{2}Z \pm \sqrt{:\frac{1}{4}Zq - Æc:} = \frac{65}{2} \pm \sqrt{:\frac{4225}{4} - 64:}$

$$= \begin{cases} 64 = Ac. \\ 1 = E. \end{cases}$$ Adeoque $\pm\sqrt{c}\,64 \pm \sqrt{c}\,1 = \pm 4 \pm 1 = \pm 5 = Z$.

Poſtquam has ego Regulas inveneram; nec illis ſimile quidquam apud eos quos tum videram Analyſtas notaveram (Cardanum ſiquidē non videram,) apud quos de Æquationibus Cubicis reſolvendis altum erat ſilentium: In Carteſii Geometriam, (quæ ſub id temporis aut paulo ſerius, Gallice primum prodiit, necdum enim tunc temporis exſtabat Latine, ſed poſt annos aliquot,) incidebam. Apud quem duas itidem inveni regulas, quas *Cardani Regulas* appellat, eaſdem plane cum noſtris, utut paulo aliter deſignatas, nulla tamen demonſtratione munitas, nec vel leviſſimo dato indicio, quo de illarum fundamento conſtare poſſit. Cardanum tandem nactus, (qui illas *Scipioni* cuidem *Ferreo* acceptas refert,) eaſdem apud eum inveni aliâ quidem methodo demonſtratas, (longa ſatis & perplexa, quæque rei originem neutiquam explicat,) quas ego ex Analyſeos principiis, ut dictum eſt, collegeram. Quæ quidem inveſtigatio, ſi nihil aliud novi in ſe contineat, ſaltem eo nomine Dni Veſtræ non ingrata forſan eſt futura, quod earum originem patefaciat.

Jam itaque poſita æquatione reſolvenda, $r^3 + 27r = 172$.

Quoniam

Quoniam r^3, & $27\,r$, eodem ſigno notantur, pertinebit ea ad regulam ſecundam. Adeoque cum ſit $3)\,27\,(9$, & $9\times9\times9 = 729$, item $2)\,172\,(= 86$, & $86\times86 = 7396$; Erit $\sqrt{:7396+729:}\pm86 = \sqrt{8125}\pm86 = \frac{Ac.}{Ec.}$ adeoque $\sqrt{c:\sqrt{8125}\pm86:} = \sqrt{13}\pm2 = \frac{A.}{E.}$ adeoque $A - E = r = 4.$

$$r^3 + 27\,r = 172.$$

$$2)\,172\,(86 \qquad 3)\,27\,(9$$

$$\begin{array}{r} \times86 \\ \hline 516 \\ 688 \\ \hline 7396 \\ +729 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times9 \\ \hline 81 \\ \times9 \\ \hline 729 \end{array}$$

$$\sqrt{c:25\sqrt{13}(=\sqrt{8125})\pm86:} = \begin{cases} \sqrt{13}+2 = A. \\ \sqrt{13}-2 = E. \end{cases}$$

Ergo Æquationis $r^3 + 27\,r = 172$, rad. $r = +4 = A - E$; & Æquationis $r^3 + 27\,r = -172$, rad. $r = -4 = -A + E$.

Et eodem modo de Æquationibus hujuſce formæ omnibus ſtatuendum: Nulla enim omnino eſt iſtius formæ æquatio, quæ non unam aliquam radicem habet realem: Sed & unicam; nam quas exſpectes duæ reliquæ, ſunt tantum imaginariæ, & impoſſibiles.

Pari methodo; Si exponatur æquatio reſolvenda $r^3 - 27\,r = 154$. quæ, propter duarum poteſtatum contraria ſigna, ad regulam primam exigenda eſt. Adeoque cum ſit $2)\,154\,(77$, & $77\times77 = 5929$, item $3)\,27\,(9$, & $9\times9\times9 = 729$: Erit $77\pm\sqrt{:5929-729:} = 77\pm\sqrt{5200} = \frac{Ac.}{Ec.}$

Adeoque $\sqrt{c:77\pm\sqrt{5200}:} = \frac{7}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{A.}{E.}$ adeoq; $A+E = 7 = r.$

$$r^3 - 27r = 154$$

2) 154 (77	3) 27 (9
×77	×9
539	81
539	×9
5929	729.
−729	

$$\sqrt{c}: 77 \pm (\sqrt{5200} =) 20\sqrt{13} : = \begin{cases} \frac{7}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13} = A. \\ \frac{7}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13} = E. \end{cases}$$

Ergo æquationis $r^3 - 27r = 154$, *radix* $r = 7 = A + E$.
Et æquationis $r^3 - 27r = -154$, *rad.* $r = -7 = -A - E$.

Sic æquationis $r^3 - 27r = \pm 296$, invenietur radix ± 8; ſunt enim Ac, Ec, $= 148 \pm (\sqrt{21175} =) 55\sqrt{7}$. adeoq; $A, E, = 4 \pm \sqrt{7}$. & $A + E = 8 = r$. Atque ad hanc formam æquationes aliæ innumeræ reſolvendæ, radicem exhibebunt realem unam; & quidem unicam. Nam quas exſpectes duæ reliquæ erunt tantum imaginariæ; unicum ſaltem ſi excipias caſum, nempe quando quadratum ſemiſſis termini abſolute cogniti, æquatur cubo trientis coefficientis termini medii; tunc enim tum $\pm A$ tum $\pm E$, (quæ erunt invicem æquales) tum $\pm A \pm E$, erunt radices reales. Puta $r^3 - 27r = \pm 54$, cujus radices ſunt ± 6, ∓ 3, ∓ 3.

Verum ſi exponatur æquatio reſolvenda $r^3 - 27r = \pm 44$, ejuſdem cum illis formæ; eaque ad eandem regulam primam exigatur: res ſtatim tranſibit ad impoſſibile. Cum enim, ex methodo iſtius regulæ, cubus trientis coefficientis, auferendus ſit ex quadrato ſemiſſis termini abſoluti, atque reſidui latus quadraticũ tum adddendus tum auferendus ſemiſſi termini abſoluti, ut habeantur Ac, Ec, hoc eſt $\frac{1}{2}Z \pm \sqrt{:\frac{1}{4}Zq - Æc}$. Id fieri omnino nequit; quia 729 ($Æc$ cubus trientis coefficientis) ex 484 ($\frac{1}{4}Zq$ quadrato ſemiſſis termini abſoluti) non poteſt auferri (major ex minori) vel ſaltem (ſi utcunque auferatur) reſiduum ($484 - 729 = -245$) erit negativa quantitas, cujus itaque nulla poteſt eſſe radix quadratica, (quippe quadratum omne, ſive ex radice affirmativa, ſive negativa, ſemper eſt affirmativum,) adeoque cum $\sqrt{:\frac{1}{4}Zq -}$

$Æc$

$Ec: = \sqrt{:} - 245$. ſit quid impoſſibile, erunt etiam (propter ipſius radicis impoſſibilitatem) $\frac{1}{2}Z \pm \sqrt{:}\frac{1}{4}Zq - Ec$, (nempe $22 \pm \sqrt{-245}$,) hoc eſt, Ac, Ec, impoſſibilia.

$$r^3 - 27r = \pm 44.$$

$$\begin{array}{ll} 2)\,44\,(22 & 3)\,27\,(9 \\ \quad\times 22 & \quad\times 9 \\ \quad\overline{\;44\;} & \quad\overline{\;81\;} \\ \quad 44 & \quad\times 9 \\ \quad\overline{+484} & \quad\overline{729} \\ \quad -729 & \end{array}$$

$$22 \pm (\sqrt{-245} =)\ 7\sqrt{-5}.\quad \text{Impoſſibile.}$$

(Atq; idem continget quotieſcunque cubus trientis coefficientis, major eſt quam quadratum termini abſoluti. Sicut in æquatione quadratica $-Aq + BA = Æ$, quoties contingit Æ majus eſſequam $\frac{1}{4}Bq$, quod illic ſemper eſt indicium caſûs impoſſibilis.)

Quid autem? Num itaque dicemus æquationem $r^3 - 27r = \pm 44$, plane impoſſibilem eſſe? nullamque omnino habere radicem? Nullo modo. Habet ſiquidem omnino tres radices, nempe, $\pm\sqrt{15} \pm 2$, $\mp\sqrt{15} \pm 2$, ∓ 4; hoc eſt, æquationis $r^3 - 27r = +44$, radices ſunt, $+\sqrt{15}+2$, $-\sqrt{15}+2$, -4; & æquationis $r^3 - 27r = -44$, radices ſunt $-\sqrt{15}-2$, $+\sqrt{15}-2$, $+4$.

Eodem modo, æquationis $r^3 - 27r = \pm 10$, radices ſunt $\pm\frac{1}{2}\sqrt{33} \pm 1$, $\mp\frac{1}{2}\sqrt{33} \pm 1$, ∓ 5.

Item, æquationis $r^3 - 27r = \pm 26$, radices ſunt, $\pm\frac{1}{2}\sqrt{105} \pm \frac{1}{2}$, $\mp\frac{1}{2}\sqrt{105} \pm \frac{1}{2}$, ∓ 1.

Sic, æquationis $r^3 - 27r = \pm 46$, radices ſunt $\pm 2\sqrt{6} \pm 1$, $\mp 2\sqrt{6} \pm 1$, ∓ 2.

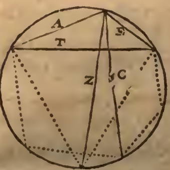
Item, æquationis $r^3 - 7r = \pm 6$, radices ſunt ∓ 1, ∓ 2, ± 3.

Atque in aliis pariter. Non itaque, ex eo quod Analyſis nos ducat aliquando ad impoſſibile, concludendum protinus erit,

&

& caſum eſſe impoſſibilem: Sive, (quod tantundem valet,) quod oſtendit Analyſis juxta unam aliquam ſuppoſitionem impoſſibile eſſe, eſſe propterea impoſſibile ſimpliciter.

Porro ſub id ipſum tempus, quo Regulas illas duas inveniebam; De Angulorum ſectionibus (exercitii cauſa) nonnulla commentatus eram. Atque illic, inter alia, ad Anguli Triſectionem has obſervabam æquationes; $3RqA - Ac = RqC = 3RqE - Ec = -3RqZ + Zc$; quarum Radices recepto aliquo notationis modo explicare fruſtra conatus, non aptiorem videbam modum illud exprimendi; (ſed nec Carteſius, qui, ut poſtea reperi, eandem ſibi rem tractandam propoſuerat,) quam quod, *Poſito R circuli radio, recta C circulo inſcripta peripheriam totam in duo ſegmenta divideret, quorum unius trientem ſubtenderet A, alterius E, (ejuſdem æquationis duæ radices,) & radix tertia Z, ſubtenderet totius peripheriæ trientem utrovis arcuum A vel E auctum, (nam & hujus arcus triplum ſubtendit C:) Ea tamen lege, ut ubi A, E, ſunt quantitates affirmativæ, tertia Z ſit utriq; ſimul æqualis, ſed negative interpretanda: ubi autem Z affirmativa, ibi A, E, negativæ.* (Quippe illud ubique obtinet, in æquationibus cujuſcunque gradus; ſi omnino deſit poteſtas ſupremæ proxima, radices omnes affirmativæ ſimul ſumptæ, negativis omnibus ſimul ſumptis, neglectis ſignis, æquales erunt, ſive radices illæ reales ſint ſive ſaltē imaginariæ; adeoque ſervatis ſignis, ſe mutuo deſtruunt: unde fit quod poteſtas illa ſupremæ proxima, cujus coefficiens ſemper eſt radicū ſimul omniū mutatis ſignis, aggregatum; hoc caſu, propter radices affirmativas & negativas ſe mutuo perimentes, prorſus excidat.) puta Æquationis hujus $3RqL - Lc = RqC$, vel $Lc - 3RqL = -Rqc$: exponitur radix, L, de tribus radicibus puta $+A$, $+E$, & $-Z = -A - E$. Hujus autem $+Lc - 3RqL = RqC$, vel $+3RqL - Lc = -RqC$, radix L, de tribus



tribus radicibus exponetur $-A, -E, +Z = +A+E$. Atque hanc Regulam *tertiam* jam appellabimus.

Quo pacto ad hanc regulam perveneram, non opus eſt ut jam oſtendam; quippe longius illud eſſet quam ut hic commode inferatur, quodque alibi forſan aliquando ſumus demonſtraturi.

Interim; ſi ad hanc regulam exigatur hujuſmodi æquatio, $r^3 - 27r = \pm 44$ hoc eſt, inquam, $Lc - 3RqL = \pm RqC$. Erit triens coefficientis $\frac{27}{3} = 9 = Rq$, ergo $3 = R$. Item quia $44 = RqC$, erit $\frac{44}{9} = R$. Scribatur itaque circulus cujus radius $R = 3$, eique aptetur recta $C = \frac{44}{9}$, peripheriam dirimens in duo ſegmenta; quorum majoris trienti ſubtendat A, minoris trienti E, atque his ſimul æqualis ſumatur Z. Erunt, per expoſitam Regulam, Æquationis expoſitæ radices $\pm Z, \mp A, \mp E$.

$r^3 - 27r = \pm 44$. $Lc - 3RqL = \pm RqC$.
$3)27(9 = Rq$. $\sqrt{9} = 3 = C$.
$9)44(4\frac{8}{9} = C$, ſubtenſa arcus tripli.
$\mp A, \mp E, \pm Z$, (ſubtenſæ ſimpli) radices.
$\mp 4, \mp \sqrt{15} \pm 2, \pm \sqrt{15} \pm 2$.

Et eodem modo, Æquationes $r^3 - 27r = \pm 10$, $r^3 - 27r = \pm 26$, $r^3 - 27r = \pm 46$, $r^3 - 7r = \pm 6$, aliæque innumeræ, ſolvi poſſunt per triſectionem arcûs.

Verum ſi ad eandem regulam exigatur æquatio, $r^3 - 27r = \pm 154$: res ſtatim ad impoſſibile deveniet: Quippe $3)27(9 = Rq$, adeoque $\sqrt{9} = 3 = R$. Atque $9)154(17\frac{1}{9} = C$. At circulo cujus Radius eſt 3, non poterit inſcribi ſubtenſa $17\frac{1}{9}$, cum hæc ſit duobus radiis, hoc eſt diametro, major.

Similiter ſi ad eandem regulam exigatur æquatio $r^3 - 27r = \pm 296$; omnino idem obtinget. Quippe $9)296(32\frac{8}{9} = C$, major eſſet quam duplum $R = 3$. Adeoque recta illa huic circulo non inſcriptibilis.

$r^3 - 27r = \pm 154.$ $\qquad$ $r^3 - 27r = \pm 296.$

$3)\ 27\ (9 = Rq.$ $\qquad$ $3)\ 27\ (9 = Rq.$

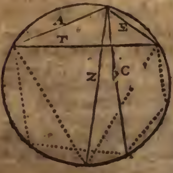
$\sqrt{9} = 3 = R.$ $\qquad$ $\sqrt{9} = 3 = R.$

$9)\ 154\ (17\tfrac{1}{9} = C.$ $\qquad$ $9)\ 296\ (32\tfrac{8}{9} = C.$

ſubtenſæ impoſſibiles.

Quid autem? num æquationes has (& ejuſmodi mille alias) omnino impoſſibiles dicemus? Nullo modo. Habet etenim illa radicem $r = \pm 7$; hæc, radicem $r = \pm 8$; Ut modo oſtenſum eſt, eaſdem ad Regulam primam exigendo.

Et quidem æquationes omnes hujuſce formæ, quæ ad regulam primam examinatæ radicem realem habent (vel affirmativam, vel ſaltem negativam,) illæ ad hanc regulam ſi exigantur, ad impoſſibile nos deducunt; (hoc eſt, illæ omnes in quibus quadratum ſemiſſis quantitatis abſolutæ, majus eſt cubo trientis coefficientis termini medii:) contra vero, quæ videbantur illic impoſſibiles, (nempe ubi quadratum ſemiſſis quantitatis abſolutæ, minus eſt cubo trientis coefficientis,) radices hic habebunt reales. Nec ulla interim æquatio utrobique exhibebit radices reales, niſi illæ ſolæ ubi quadratum ſemiſſis termini abſoluti, æquatur cubo trientis coefficientis. Qualis eſt $r^3 - 27r = \pm 54$; item $r^3 - 12r = \pm 16$. (quippe illic $9 \times 9 \times 9 = 729 = 27 \times 27$; hic $4 \times 4 \times 4 = 64 = 8 \times 8$.) aliæque ſimiles. Cujus quidem ratio eſt, quia coefficiens medii termini in prima regula ſupponitur 3 Æ (triplum rectanguli duarum quantitatum A, E;) in ſecunda vero, (non 3 Æ, ſed 3 R q hoc eſt) A q + Æ + E q, (nam, in circulo, 3Rq = Tq = Aq + Æ + E q, quod nos alibi demonſtravimus, eſtq; cognitu non inutile:) adeoque quoties contingit æquales invicem eſſe A, E, (quod tunc evenit quando dictum Quadratum dicto cubo æquatur, nec alias unquam,) perinde erit ſive dicatur coefficiens 3 Æ, ſive A q +



Æ +

Æ+Eq; adeoque perinde erit ad utram exigatur regulam æquatio illa; Secus autem, ubi non æquantur. Atque hæc quidem utut digna ſint quæ fuſius explicentur; non tamen id erit hujus loci; cum videam me jam ſatis (ne dicam nimium) prolixum eſſe.

At quorſum, inquies, tendunt hæc omnia? Num ut Analyticen fallacem oſtendam? (ut quæ nec caſus impoſſibiles detegat, & poſſibiles interim tanquam impoſſibiles perhibeat.) Nullo modo: Sed, cautè tractandam; ne nos ipſos decipiamus dum ea quaſi inde tradita reputemus quæ non ſunt; & pro determinatis habeamus quæ Analyſis in ambiguo relinquit, & indeterminata.

At quid, inquies, de Æquatione noſtra dicendum eſt? aut quomodo ſolvenda ſunt iſta ἐναντιοφανῆ?

Dicam brevi. Nempe vexanda adhuc eſt æquatio illa, quæ nos vexavit hactenus; ut tandem quid certi prodat. Quippe ſimile omnino non raro patitur Æquatio Analytica, atque Proteus Homericus, (Odyſſ. δ.)

——— γέρων ἅλιος νημερτὴς,
Ἀθάνατος Πρωτεὺς Αἰγύπτιος· ὅς τε θαλάσσης
Πάσης βένθεα οἶδε.

Utut enim νημερτὴς ſit, *veridica*, nec plane fidem fallat; ſuas tamen habet *inſidias*,

——— ον θείοιο γέροντος,

Et *formidabiles aſtutias*,

——— ὀλοφώϊα τοῖο γέροντος·

nec niſi fortius tandem preſſa verum fatebitur. Comprimendus itaque eſt hic Proteus, & prenſandus fortius, ne elabatur.

Τὸν μὲν ἐπὴν δὴ πρῶτα κατευνηθέντα ἴδησθε,
Καὶ τότ' ἔπειθ' ὔμμιν μελέτω κάρτος τε, βίη τε,
Αὖθι δ' ἔχειν, μεμαῶτα καὶ ἐσσύμενόν περ ἀλύξαι.

Et varias licet formas induat verſipellis, variaſque ſubire tentet latebras & vel inſidias ſtruere; quò ſe ſubducat incautis, vel etiam imponat;

Πάντα δὲ γινόμενος, πειρήσεται, ὅσσ' ἐπὶ γαῖαν
Ἑρπετὰ γίνονται, καὶ ὕδωρ, καὶ θεσπιδαὲς πῦρ.

Adeoque $\frac{Æc}{Ec} + Ec = Z = Ac + E.$

Et $Z\,Ec - Ecc = Æc.$

Reſolutis itaque æquationibus (quadraticis quidem, ſed ex radice ſolida ortis,)

$$Z\,Ac - Acc = Æc = Z\,Ec - Ecc.$$

$$\text{Erit } \tfrac{1}{2}Z \pm \surd : \tfrac{1}{4}Zq - Æc. = \left\{\begin{matrix} Ac. \\ Ec. \end{matrix}\right.$$

$$\text{Adeoque } \left.\begin{matrix} \surd c.\tfrac{1}{2}Z + \surd : \tfrac{1}{4}Zq - Æc. \\ + \surd c.\tfrac{1}{2}Z - \surd : \tfrac{1}{4}Zq - Æc. \end{matrix}\right\} = A + E = Z.$$

Ad quam regulã exigendæ ſunt Æquationes Cubicæ hujus formæ $Zc - 3ÆZ = +Z$: (vel etiam hujus $Zc - 3ÆZ = -Z$, quæ ab illa hoc ſolo differt, quod quæ illic affirmative exponendæ ſint quantitates $+A + E, = Z$; hic interpretandæ ſint negative, $-A - E = Z$.) Quam, *Regulam primam* jam appellabimus.

Eodem modo, cum ſit $Ac - \frac{Æc}{Ac} = Ac - Ec = X.$

Erit $Acc - Æc = X\,Ac.$

ſive $Acc - X\,Ac = Æc.$

Item $\frac{Æc}{Ec} - Ec = Ac - Ec = X.$

& $Æc - Ecc = X\,Ec.$

hoc eſt $Ecc + X\,Ec = Æc.$

Reſolutis itaque æquationibus

$$Acc - X\,Ac = Æc = Ecc + X\,Ec.$$

$$\text{Erit } \surd : \tfrac{1}{4}Xq + Æc : \pm \tfrac{1}{2}X : = \left\{\begin{matrix} Ac. \\ Ec. \end{matrix}\right.$$

$$\text{Adeoque } \left.\begin{matrix} \surd c.\surd : \tfrac{1}{4}Xq + Æc : + \tfrac{1}{2}X. \\ - \surd c.\surd : \tfrac{1}{4}Xq + Æc : \tfrac{1}{2}X. \end{matrix}\right\} = A - E = X.$$

Atque

Atque ad hanc regulam exigendæ ſunt hujus formæ $Xc + 3\,ÆX = +X$ æquationes omnes. Vel etiam hujus $Xc + 3\,ÆX = -X$: cum hoc ſolo diſcrimine, quod cum illic quantitas major A, ſit affirmativa; minor E, negativa; & $X = A - E$ quantitas affirmativa; hic, major A erit negativa, minor E affirmativa, adeoque & $X = -A + E$ quantitas negativa. Atque hanc jam appellamus *Regulam Secundam.*

Exſemplum poſterioris Regulæ hoc eſto $Xc + 12\,X = 63$. Hoc eſt, inquam, $Xc + 3\,ÆX = X$. Ergo $\frac{12}{3} = 4 = Æ$. Et $\frac{4}{A} = \frac{Æ}{A} = E$. Et $Ac - \frac{64}{Ac} = Ac - Ec = X = 63$. Adeoque $Acc - 64 = 63\,Ac$. vel $Acc - 63\,Ac = 64$. (Et ſimiliter $\frac{64}{Ec} = Ac$. et $\frac{64}{Ec} - Ec = Ac - Ec = X = 63$. adeoq; $64 - Ecc = 63\,Ec$. vel $64 = Ecc + 63\,Ec$.) Ergo

$$\sqrt{:\tfrac{3969}{4} + 64:} \pm \tfrac{63}{2} = \sqrt{\tfrac{4225}{4}} \pm \tfrac{63}{2} = \tfrac{65}{2} \pm \tfrac{63}{2} = \begin{cases} 64 = Ec \\ 1 = Ec \end{cases}$$

Et propterea $\sqrt{c64} - \sqrt{c1} = 4 - 1 = 3 = X = A - E$. Vel etiam, (ſi principio poſitum eſſet -63) mutatis ubique ſignis numeri 63 proveniret $-4 + 1 = -3 = X = -A + E$.

Vel ſic (immediate ad regulam exigendo) Æquatio eſt $Xc + 12\,X = \pm 63$. Ergo $3)\,12\,(4 = Æ$. adeoq; $64 = Æc$. Et $\frac{63}{2} = \frac{1}{2}X$. adeoque $\frac{3969}{4} = \frac{1}{4}Xq$. & propterea, $\sqrt{:\tfrac{1}{4}Xq + Æc:} \pm \tfrac{1}{2}X = \sqrt{:\tfrac{3969}{4} + 64:} \pm \tfrac{63}{2} = \begin{cases} 64 = Ac. \\ 1 = Ec. \end{cases}$ Adeoq;

$$\pm\sqrt{c64} \mp \sqrt{c1} = \pm 4 \mp 1 = \pm 3 = X.$$

Exſemplum prioris hoc eſto, $Zc - 12\,Z = 65$. Hoc eſt, inquam, $Zc - 3\,ÆZ = Z$. Ergo $3)\,12\,(4 = Æ$. & $\frac{4}{A} = E$. & $Ac + \frac{64}{Ac} = (Ac + Ec = Z =)\ 65$. Et $Acc + 64 = 65\,Ac$

65Ac. vel $64 = 65Ac - Acc$. (& ſimiliter $\frac{64}{Ec} + Ec = Ac + Ec = Z = 65$. adeoque $64 = 65Ec - Ecc$.) Ergo

$$\frac{65}{2} \pm \sqrt{:\frac{4225}{4} - 64:} = \frac{65}{2} \pm \sqrt{\frac{3969}{4}} = \frac{65}{2} \pm \frac{63}{2} = \begin{cases} 64 = Ac. \\ 1 = Ec. \end{cases}$$

Et propterea $\sqrt{c}\,64 + \sqrt{c}\,1 = 4 + 1 = 5 = Z$. Vel etiam, (ſi principio poſitum eſſet -65,) mutatis ubique ſignis numeri 65, proveniſſet $-4 - 1 = -5 = Z$.

Vel ſic (immediate ad regulam exigendo;) Æquatio propoſita eſt $Zc - 12Z = \pm 65$. Ergo $3)12(4 = Æ$. adeoq; $64 = Æc$. Et $\frac{65}{2} = \frac{1}{2}Z$. adeoque $\frac{4225}{4} = \frac{1}{4}Zq$. Et propterea $\frac{1}{2}Z \pm \sqrt{:\frac{1}{4}Zq - Æc:} = \frac{65}{2} \pm \sqrt{:\frac{4225}{4} - 64:}$

$$= \begin{cases} 64 = Ac. \\ 1 = E. \end{cases}$$ Adeoque $\pm\sqrt{c}\,64 \pm \sqrt{c}\,1 = \pm 4 \pm 1 = \pm 5 = Z$.

Poſtquam has ego Regulas inveneram; nec illis ſimile quidquam apud eos quos tum videram Analyſtas notaveram (Cardanum ſiquidē non videram,) apud quos de Æquationibus Cubicis reſolvendis altum erat ſilentium: In Carteſii Geometriam, (quæ ſub id temporis aut paulo ſeriùs, Gallice primum prodiit, necdum enim tunc temporis exſtabat Latine, ſed poſt annos aliquot,) incidebam. Apud quem duas itidem inveni regulas, quas *Cardani Regulas* appellat, eaſdem plane cum noſtris, utut paulo aliter deſignatas, nulla tamen demonſtratione munitas, nec vel leviſſimo dato indicio, quo de illarum fundamento conſtare poſſit. Cardanum tandem nactus, (qui illas *Scipioni* cuidem *Ferreo* acceptas refert,) eaſdem apud eum inveni aliâ quidem methodo demonſtratas, (longa ſatis & perplexa, quæque rei originem neutiquam explicat,) quas ego ex Analyſeos principiis, ut dictum eſt, collegeram. Quæ quidem inveſtigatio, ſi nihil aliud novi in ſe contineat, ſaltem eo nomine Dni Veſtræ non ingrata forſan eſt futura, quod earum originem patefaciat.

Jam itaque poſita æquatione reſolvenda, $r^3 + 27r = 1722$

Quoniam

Quoniam r^3, & $27\,r$, eodem ſigno notantur, pertinebit ea ad regulam ſecundam. Adeoque cum ſit $3)27(9$, & $9 \times 9 \times 9 = 729$, item $2)172(=86$, & $86 \times 86 = 7396$; Erit $\sqrt{:7396+729:} \pm 86 = \sqrt{8125} \pm 86 = \frac{A\,c.}{E\,c.}$ adeoque $\sqrt{c:\sqrt{8125} \pm 86:} = \sqrt{13} \pm 2 = \frac{A.}{E.}$ adeoque $A - E = r = 4$.

$$r^3 + 27r = 172.$$

```
2)172(86      3)27(9
    ×86           ×9
    516           81
   688            ×9
   7396          729
   +729
```

$$\sqrt{c:25\sqrt{13}(=\sqrt{8125}) \pm 86:} = \begin{cases} \sqrt{13} + 2 = A. \\ \sqrt{13} - 2 = E. \end{cases}$$

Ergo Æquationis $r^3 + 27\,r = 172$, rad. $r = +4 = A - E$:
& Æquationis $r^3 + 27\,r = -172$, rad. $r = -4 = -A + E$.

Et eodem modo de Æquationibus hujuſce formæ omnibus ſtatuendum: Nulla enim omnino eſt iſtius formæ æquatio, quæ non unam aliquam radicem habet realem: Sed & unicam; nam quas exſpectes duæ reliquæ, ſunt tantum imaginariæ, & impoſſibiles.

Pari methodo; Si exponatur æquatio reſolvenda $r^3 - 27\,r = 154$. quæ, propter duarum poteſtatum contraria ſigna, ad regulam primam exigenda eſt. Adeoque cum ſit $2)154(77$, & $77 \times 77 = 5929$; item $3)27(9$, & $9 \times 9 \times 9 = 729$: Erit $77 \pm \sqrt{:5929 - 729:} = 77 \pm \sqrt{5200} = \frac{A\,c.}{E\,c.}$

Adeoque $\sqrt{c:77 \pm \sqrt{5200}:} = \frac{7}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{A.}{E.}$ adeoq; $A + E = 7 = r$.

$$r^3 - 27r = 154$$

2) 154 (77	3) 27 (9
×77	×9
539	81
539	×9
5929	729.
−729	

$$\sqrt[3]{c:77 \pm (\sqrt{5200} =) 20\sqrt{13}:} = \begin{cases} \frac{7}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13} = A. \\ \frac{7}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13} = E. \end{cases}$$

Ergo æquationis $r^3 - 27r = 154$, *radix* $r = 7 = A + E$.
Et æquationis $r^3 - 27r = -154$, *rad.* $r = -7 = -A - E$.

Sic æquationis $r^3 - 27r = \pm 296$, invenietur radix ± 8; ſunt enim Ac, Ec, $= 148 \pm (\sqrt{21175} =) 55\sqrt{7}$. adeoq; A, E, $= 4 \pm \sqrt{7}$. & $A + E = 8 = r$. Atque ad hanc formam æquationes aliæ innumeræ reſolvendæ, radicem exhibebunt realem unam; & quidem unicam. Nam quas exſpectes duæ reliquæ erunt tantum imaginariæ; unicum ſaltem ſi excipias caſum, nempe quando quadratum ſemiſſis termini abſolute cogniti, æquatur cubo trientis coefficientis termini medii; tunc enim tum $\pm A$ tum $\pm E$, (quæ erunt invicem æquales) tum $\pm A \pm E$, erunt radices reales. Puta $r^3 - 27r = \pm 54$, cujus radices ſunt $\pm 6, \mp 3, \mp 3$.

Verum ſi exponatur æquatio reſolvenda $r^3 - 27r = \pm 44$, ejuſdem cum illis formæ; eaque ad eandem regulam primam exigatur: res ſtatim tranſibit ad impoſſibile. Cum enim, ex methodo iſtius regulæ, cubus trientis coefficientis, auferendus ſit ex quadrato ſemiſſis termini abſoluti, atque reſidui latus quadraticū tum adddendus tum auferendus ſemiſſi termini abſoluti, ut habeantur Ac, Ec, hoc eſt $\frac{1}{2}Z \pm \sqrt{:\frac{1}{4}Zq - Æc}$. Id fieri omnino nequit; quia 729 (Æc cubus trientis coefficientis) ex 484 ($\frac{1}{4}Zq$ quadrato ſemiſſis termini abſoluti) non poteſt auferri (major ex minori) vel ſaltem (ſi utcunque auferatur) reſiduum ($484 - 729 = -245$) erit negativa quantitas, cujus itaque nulla poteſt eſſe radix quadratica, (quippe quadratum omne, ſive ex radice affirmativa, ſive negativa, ſemper eſt affirmativum,) adeoque cum $\sqrt{:\frac{1}{4}Zq -}$

Æc

$Æc : = \surd : -245$. ſit quid impoſſibile, erunt etiam (propter ipſius radicis impoſſibilitatem) $\frac{1}{2}Z \pm \surd : \frac{1}{4}Zq - Æc$, (nempe $22 \pm \surd -245$,) hoc eſt, Ac, Ec, impoſſibilia.

$$r^3 - 27r = \pm 44.$$

$$\begin{array}{rr} 2)\,44\,(\,22 & 3)\,27\,(\,9 \\ \times 22 & \times 9 \\ \hline 44 & 81 \\ 44 & \times 9 \\ \hline +484 & 729 \\ -729 & \\ \hline \end{array}$$

$$22 \pm (\surd -245 =)\ 7\surd -5.$$ Impoſſibile.

(Atq; idem continget quotieſcunque cubus trientis coefficientis, major eſt quam quadratum termini abſoluti. Sicut in æquatione quadratica $-Aq + BA = Æ$, quoties contingit Æ majus eſſe quam $\frac{1}{4}Bq$, quod illic ſemper eſt indicium caſûs impoſſibilis.)

Quid autem? Num itaque dicemus æquationem $r^3 - 27r = \pm 44$, plane impoſſibilem eſſe? nullamque omnino habere radicem? Nullo modo. Habet ſiquidem omnino tres radices, nempe, $\pm\surd 15 \pm 2$, $\mp\surd 15 \pm 2$, ∓ 4; hoc eſt, æquationis $r^3 - 27r = +44$, radices ſunt, $+\surd 15 + 2$, $-\surd 15 + 2$, -4; & æquationis $r^3 - 27r = -44$, radices ſunt $-\surd 15 - 2$, $+\surd 15 - 2$, $+4$.

Eodem modo, æquationis $r^3 - 27r = \pm 10$, radices ſunt $\pm\frac{1}{2}\surd 33 \pm 1$, $\mp\frac{1}{2}\surd 33 \pm 1$, ∓ 5.

Item, æquationis $r^3 - 27r = \pm 26$, radices ſunt, $\pm\frac{1}{2}\surd 105 \pm \frac{1}{2}$, $\mp\frac{1}{2}\surd 105 \pm \frac{1}{2}$, ∓ 1.

Sic, æquationis $r^3 - 27r = \pm 46$, radices ſunt $\pm 2\surd 6 \pm 1$, $\mp 2\surd 6 \pm 1$, ∓ 2.

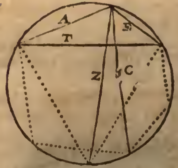
Item, æquationis $r^3 - 7r = \pm 6$, radices ſunt ∓ 1, ∓ 2, ± 3.

Atque in aliis pariter. Non itaque, ex eo quod Analyſis nos ducat aliquando ad impoſſibile, concludendum protinus erit,

&

& caſum eſſe impoſſibilem : Sive, (quod tantundem valet,) quod oſtendit Analyſis juxta unam aliquam ſuppoſitionem impoſſibile eſſe, eſſe propterea impoſſibile ſimpliciter.

Porro ſub id ipſum tempus, quo Regulas illas duas inveniebam; De Angulorum ſectionibus (exercitii cauſa) nonnulla commentatus eram. Atque illic , inter alia , ad Anguli Triſectionem has obſervabam æquationes; $3RqA - Ac = RqC = 3RqE - Ec = -3RqZ + Zc$; quarum Radices recepto aliquo notationis modo explicare fruſtra conatus , non aptiorem videbam modum illud exprimendi ; (ſed nec Carteſius , qui, ut poſtea reperi , eandem ſibi rem tractandam propoſuerat,) quam quod, *Poſito R circuli radio , recta C circulo inſcripta peripheriam totam in duo ſegmenta divideret, quorum unius trientem ſubtenderet A, alterius E , (ejuſdem æquationis duæ radices,) & radix tertia Z , ſubtenderet totius peripheriæ trientem utrovis arcuum A vel E auctum , (nam & hujus arcus triplum ſubtendit C:) Ea tamen lege , ut ubi A , E, ſunt quantitates affirmativæ, tertia Z ſit utriq; ſimul æqualis, ſed negative interpretanda : ubi autem Z affirmativa , ibi A, E, negativæ.*



(Quippe illud ubique obtinet, in æquationibus cujuſcunque gradus; ſi omnino deſit poteſtas ſupremæ proxima, radices omnes affirmativæ ſimul ſumptæ, negativis omnibus ſimul ſumptis, neglectis ſignis, æquales erunt, ſive radices illæ reales ſint ſive ſaltē imaginariæ ; adeoque ſervatis ſignis, ſe mutuo deſtruunt : unde fit quod poteſtas illa ſupremæ proxima, cujus coefficiens ſemper eſt radicū ſimul omniū mutatis ſignis, aggregatum ; hoc caſu, propter radices affirmativas & negativas ſe mutuo perimentes, prorſus excidat.) puta Æquationis hujus $3RqL - Lc = RqC$, vel $Lc - 3RqL = -Rqc$: exponitur radix, L, de tribus radicibus puta $+A$, $+E$, & $-Z = -A - E$. Hujus autem $+Lc - 3RqL = RqC$, vel $+3RqL - Lc = -RqC$, radix L, de

tribus

tribus radicibus exponetur $-A$, $-E$, $+Z = +A + E$. Atque hanc Regulam *tertiam* jam appellabimus.

Quo pacto ad hanc regulam perveneram, non opus eſt ut jam oſtendam; quippe longius illud eſſet quam ut hic commode inferatur, quodque alibi forſan aliquando ſumus demonſtraturi.

Interim; ſi ad hanc regulam exigatur hujuſmodi æquatio, $r^3 - 27r = \pm 44$ hoc eſt, inquam, $Lc - 3RqL = \pm RqC$. Erit triens coefficientis $\frac{27}{3} = 9 = Rq$, ergo $3 = R$. Item quia $44 = RqC$, erit $\frac{44}{9} = R$. Scribatur itaque circulus cujus radius $R = 3$, eique aptetur recta $C = \frac{44}{9}$, peripheriam dirimens in duo ſegmenta; quorum majoris trienti ſubtendat A, minoris trienti E, atque his ſimul æqualis ſumatur Z. Erunt, per expoſitam Regulam, Æquationis expoſitæ radices $\pm Z$, $\mp A$, $\mp E$.

$r^3 - 27r = \pm 44$. $\qquad Lc - 3RqL = \pm RqC$.
$3)\,27\,(\,9 = Rq$. $\qquad \sqrt{9} = 3 = C$.
$9)\,44\,(\,4\frac{8}{9} = C$, ſubtenſa arcus tripli.
$\mp A$, $\mp E$, $\pm Z$, (ſubtenſæ ſimpli) radices.
∓ 4, $\mp \sqrt{15} \pm 2$, $\pm \sqrt{15} \pm 2$.

Et eodem modo, Æquationes $r^3 - 27r = \pm 10$, $r^3 - 27r = \pm 26$, $r^3 - 27r = \pm 46$, $r^3 - 7r = \pm 6$, aliæque innumeræ, ſolvi poſſunt per triſectionem arcûs.

Verum ſi ad eandem regulam exigatur æquatio, $r^3 - 27r = \pm 154$: res ſtatim ad impoſſibile deveniet: Quippe $3)\,27\,(\,9 = Rq$, adeoque $\sqrt{9} = 3 = R$. Atque $9)\,154\,(\,17\frac{1}{9} = C$. At circulo cujus Radius eſt 3, non poterit inſcribi ſubtenſa $17\frac{1}{9}$, cum hæc ſit duobus radiis, hoc eſt diametro, major.

Similiter ſi ad eandem regulam exigatur æquatio $r^3 - 27r = \pm 296$; omnino idem obtinget. Quippe $9)\,296\,(\,32\frac{8}{9} = C$, major eſſet quam duplum $R = 3$. Adeoque recta illa huic circulo non inſcriptibilis.

Æ† Eq; adeoque perinde erit ad utram exigatur regulam æquatio illa; Secus autem, ubi non æquantur. Atque hæc quidem utut digna ſint quæ fuſius explicentur; non tamen id erit hujus loci; cum videam me jam ſatis (ne dicam nimium) prolixum eſſe.

At quorſum, inquies, tendunt hæc omnia? Num ut Analyticen fallacem oſtendam? (ut quæ nec caſus impoſſibiles detegat, & poſſibiles interim tanquam impoſſibiles perhibeat.) Nullo modo: Sed, cautè tractandam; ne nos ipſos decipiamus dum ea quaſi inde tradita reputemus quæ non ſunt; & pro determinatis habeamus quæ Analyſis in ambiguo relinquit, & indeterminata.

At quid, inquies, de Æquatione noſtra dicendum eſt? aut quomodo ſolvenda ſunt iſta ἐναντιοφανῆ?

Dicam brevi. Nempe vexanda adhuc eſt æquatio illa, quæ nos vexavit hactenus; ut tandem quid certi prodat. Quippe ſimile omnino non raro patitur Æquatio Analytica, atque Proteus Homericus, (Odyſſ. δ.)

——— γέρων ἅλιος νημερτὴς,
Ἀθάνατος Πρωτεὺς Αἰγύπτιος· ὅς τε θαλάσσης
Πάσης βένθεα οἶδε.

Utut enim νημερτὴς ſit, *veridica*, nec plane fidem fallat; ſuas tamen habet *inſidias*,

——— ον θείοιο γέροντος,

Et *formidabiles aſtutias*,

——— ὀλοφώϊα τοῖο γέροντος·

nec niſi fortius tandem preſſa verum fatebitur. Comprimendus itaque eſt hic Proteus, & prenſandus fortius, ne elabatur.

Τὸν μὲν ἐπὴν δὴ πρῶτα κατευνηθέντα ἴδηθε,
Καὶ τότ᾽ ἔπειτ᾽ ὔμμιν μελέτω κάρτος τε, βίη τε,
Αὖθι δ᾽ ἔχειν, μεμαῶτα καὶ ἐσσύμενόν περ ἀλύξαι.

Et varias licet formas induat verſipellis, variaſque ſubire tentet latebras & vel inſidias ſtruere; quò ſe ſubducat incautis, vel etiam imponat;

Πάντα δὲ γινόμενος, πειρήσεται, ὅσσ᾽ ἐπὶ γαῖαν
Ἑρπετὰ γίνονται, καὶ ὕδωρ, καὶ θεσπιδαὲς πῦρ.

premendus tamen adhuc, & quidem fortiter

Ὑμεῖς δ' ἀστεμφέως ἐχέμεν, μᾶλλόν τε πιέζειν·

nec prius hic dimittendus eſt

——— γέρων ὀλοφώια εἰδὼς,

quam,latebris exutus omnibus, palam eloquatur, totumque pandat negotium;

Τόν γ' εἴ πως σὺ δύναιο λοχησάμενος λελαβέσθαι,

Ὅς κέν τοι εἴπῃσιν ὁδὸν καὶ μέτρα κελεύθου.

Nec quidem Analyticen Homerus rectius depingere potuiſſet, ſi vel maxime fuiſſet Analyſta.

Eſto itaque quod nobis hactenus moleſtus fuerit hic Proteus noſter;

——— οὐδ' ὁ γέρων δολίης ἐπελήθετο τέχνης·

Ἀλλ' ἤτοι πρώτιστα λέων γένετ' ἠϋγένειος.

Αὐτὰρ ἔπειτα δράκων, καὶ πάρδαλις. ἠδὲ μέγας σῦς,

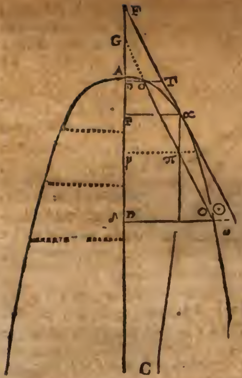
Γίνετο δ' ὑγρὸν ὕδωρ, καὶ δένδρεον ὑψιπέτηλον·

Ne tamen animum deſpondeamus. Quippe dum

Ἡμεῖς ἀστεμφέως ἔχομεν τετληότι θυμῷ,

non dubitandum eſt, quin, vi tandem adactus, id eloquatur, quod forte quæſiiſſe non pigebit.

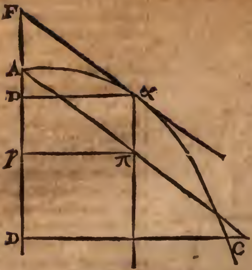
Reſumamus itaque æquationem noſtram (ut, quid factum ſit, diſtinctè perpendamus;) $9dq^2$ [illegible] $= 27d^2g$, hoc eſt $q^3 \pm 9dq^2 = \pm 27d^2g$, (variatis nempe ſignis $+$, $-$, prout pD vel deorſum vel ſurſum, a puncto p, ſumenda ſupponatur) Eam autem in hanc protinus æquationem mutavimus $r^3 - 27d^2r = \pm 27d^2g \mp 54d^3$: ſubſtituta nova radice $r = q \pm 3d$ (quod quidem pD, quatenus ſupponimus deorſum ſumendam, auget; ſurſum vero, minuit; quantitate $3d$:) Quod quidem tantundem eſt, atque, pro puncto p, aliud diametri punctum ſumere quod ſit tribus diametris altius quam eſt p punctum; (quippe hoc tanto tum auget pD deorſum ſumendam, tum pD ſurſum ſumendam minuit.) Punctum autem ſic ſumendum, id ipſum eſt quod hactenus G diximus



mus, (communis interſectio Diametri AP, & inſcriptæ OO, ſaltem productarum;) quippe pG = PF = $3d$; adeoque GD = pD ± pG = $q \pm 3d = r$. (Adeoque jam licebit, ſi libeat, quantum ad puncta D deſignanda, punctum p negligere; adeoque lineatum $\alpha\,\pi$, π p, conſtructionem, quæ ad deſignandum p punctum inſtituta eſt; cum non minus poſſit punctum D per ipſius a puncto G diſtantiam deſignari, quam per diſtantiam a puncto p.) Nec interim hinc aliquid mali metuendum quod nonnunquam $3d$ major ſit quam q. Nam ubi hoc accidit, GD $= q - 3d = r$ (hoc eſt, quatenus ſupponitur ſurſum ſumenda) eſt quantitas negativa, adeoque punctum D (quod ſupponitur ſupra) cadit infra G. Quod quidem, quoad D infimum, ſemper contingit, &, quoad aliud D tum quum G eſt ſupra A. Adeoque priori caſu æquatio quæ reſpicit D ſurſum, unam habet radicem negativam, poſteriori, duas; (nempe quoad radicem r; nam harum una, adjectione $3d$, ut habeatur $q = r + 3d$, evadet affirmativa; puta ſi $r = -d$, erit $r + 3d = -d + 3d = + 2d = q$. adeoque, licet r ſit hoc caſu quantitas negativa, erit q poſitiva; hoc eſt, punctum D erit infra G, ſed ſupra p) contra vero in æquatione quæ reſpicit D deorſum. ut poſt patebit. Sed hoc obiter.

Porro, cum ſit $r^3 - 27d^2 r = \pm 27 d^2 g \mp 54 d^3 = 27 d^2$ in: $\pm g \mp 2d : = \pm 27 d^2 h$ (poſito ſcilicet $h = g - 2d$:) quoties contingit eſſe $g = 2d$ (quod tunc ſit cum punctum G

puncto



puncto A coincidit, qui tuus caſus eſt; quippe tum $FG = FA = 2d$;) erit $b = g - 2d = 0$. Adeoque, $r^3 - 27 d^2 r = \pm 27 d^2 g \mp 54 d^3 = \pm 27 d^2 \cdot 0 = \pm 0$. Et propterea $r^3 = 27 d^2 r$, & $r^2 = 27 d^2$, adeoque $r = \pm \sqrt{27 d^2} = \pm 3d\sqrt{3}$. (poteſt enim quadrati ſimplicis radix exponi tum affirmative tum negative.) Adeoque ſive ſurſum ſive deorſum ſumatur, erit $GD = 3d\sqrt{3}$. Et propterea utriuſque aggregatum, $DD = 6d\sqrt{3}$.

Verum, inquies, cum ex hypotheſi inſcripta O O, hoc eſt, in præſenti caſu, A O, occurrat curvæ in A, erit & ipſum punctum A, punctorum D alterum, nempe ſuperius: cumque eidem puncto A, coincidat etiam punctum G, qui fieri poteſt, ut G D ſuperius, hoc eſt A A, ſeu potius ipſum A punctum, æquari poſſit $3d\sqrt{3}$? (niſi ſaltem ſit $d = 0$, quod non ſupponitur.) Et quidem, cum antea demonſtratum ſit, AD (hoc eſt D D) $= 3d\sqrt{3}$; qui fieri poteſt ut jam ſit $DD = 6d\sqrt{3}$?

Dicam brevi qui hoc fiat. Nempe; æquationis $r^2 = 27 d^2$, radices duas (nec enim plures habet) $+ 3d\sqrt{3}$, $- 3d\sqrt{3}$, duo deſignare puncta D (nempe rectas G D, G D, terminantia,) quorum alterum tanto ſuperius eſt, quanto alterum eſt inferius puncto G vel (in preſenti caſu) A: verum aliud adhuc eſſe punctum D quod ipſi A coincidit, preter duo illa D, hac æquatione deſignata. Quod ne miremur, animadvertendum eſt, utut æquatio $r^2 = 27 d^2$ quadratica cum ſit, non niſi duas habeat radices, eam tamen unde huc deventum eſt, $9dq^2 \pm q^3 = 27 d^2 g$, cubica cum fuerit, omnino tres habuiſſe, (vel reales vel ſaltem imaginarias;) quarum cum in proceſſu

proceſſu perierit una, non tamen ea propterea prorſus negligenda eſt, ſed ſolicite potius inquirenda. Non autem ea prius perierat, quam poſitum fuerit tum $q \pm 3d = r$, tum etiam (nam niſi & hoc etiam ponatur nondum periit) $g = 2d$. Cum itaque, tum in æquatione $9dq^2 \pm q^3 = 27d^2g$, tum etiam in $r^3 - 27d^2r = \pm 2d^2g \mp 54d^3$ (extra præſentem caſum) radices omnino tres ſint; ex tribus autem radicibus r, r, r, cum (poſito $g = 2d$,) evaneſcat una, erit harum ſaltem una $r = 0$. (Quod quidem ſemper obtinet in æquationibus cujuſcunque gradûs, quando abſoluta quantitas evaneſcit, ſive fit $= 0$; nempe radicum ſaltem unam eſſe $= 0$: reliquæ autem radices, depreſſione facta per communem partium omnium diviſionem, in ea quæ prodit inferioris gradus æquatione manebunt involutæ.) Cum enim in æquationibus omnino omnibus id univerſaliter verum ſit, quod quantitas abſoluta æqualis ſit facto ex omnibus radicibus invicem ductis, (neglectis ſaltem utrobiq; ſignis $+ -$,) fieri non poteſt, ut ſit $\pm 27d^2g \mp 54d^3 = \pm 27d^2h = r \times r \times r = 0$, niſi ex tribus r, ſit ſaltem una $r = 0$; adeoque, quoad hanc, $q \pm 3d = r = 0$, hoc eſt $q = \mp 3d$. Hoc eſt; ſi ſupponatur pD deorſum ſumenda erit (præter duas alias) radix una $q = -3d$; adeoque ſumpta in contrarias partes (nempe ſurſum) $pD = 3d$ habebitur punctum illud D, (quod propterea puncto A coincidit, cum ſit etiam $pA = 3d$:) ſi vero ſupponatur pD ſurſum ſumenda, erit radix una $q = +3d$ (quod duorum ſignorum inferius denotat,) adeoque ſumpta in eaſdem partes (hoc eſt ſurſum) $pD = 3d$, habebitur iterum punctum illud D, idem cum A. Quod autem reliqûa duo puncta D; cum ſit $r = \pm 3d\sqrt{3}$, (ſive ſupponatur D ſurſum ſive deorſum poni, quippe utrobique duæ ſunt radices altera affirmativa, altera negativa,) & ($q \pm 3d = r$, ſive) $r \pm 3d = q$, (nempe ſi ſupponatur pD deorſum, $r - 3d = q$; ſi ſurſum, $r + 3d = q$;) erit, quæ ſupponitur deorſum, $\pm 3d\sqrt{3} - 3d = q = pD$ quæ ſurſum, $\pm 3d\sqrt{3} + 3d = q = pD$; (utrobique ſcilicet duæ radices; affirmativa, quæ juxta ſuppoſitionem contingit, & negativa, quæ in partes ſuppoſitioni con-

trarias

trarias quæ igitur eadem eſt cum contrariæ ſuppoſitionis affirmativa.)

Ut dicta igitur recolligam. Poſita æquatione $9dq^2 + q^3 = 27d^3$, ſive $q^3 + 9dq^2 = 27d^2g$. (quæ ſupponit punctum D deorſum, adeoque ipſius radices affirmativæ deſignant D deorſum, negativæ ſurſum;) poſito $r = q + 3d$, erit $r^3 - 27d^2r = + 27d^2g - 54d^3$; adeoque (ſi $g = 2d$) eſt $r^3 - 27d^2r = 0$; cujus tres radices $+3d\sqrt{3}$, $-3d\sqrt{3}$, ± 0, (quibus deſignantur GD, GD, GD, ſive AD, AD, AA. hoc eſt AD $= 3d\sqrt{3}$ deorſum, AD $= 3d\sqrt{3}$ ſurſum, & AD $=$ AA $= 0$) & propterea, æquationis $q^3 + 9dq^2 = 27d^2g$, (cum ſit $r = q + 3d$, hoc eſt $q = r - 3d$) erunt tres radices $+3d\sqrt{3} - 3d$, $-3d\sqrt{3} - 3d$, $0 - 3d$; quibus deſignantur tres rectæ pD, pD, pD; hoc eſt pD $= 3d\sqrt{3} - 3d$ deorſum, pD $= 3d\sqrt{3} + 3d$ ſurſum, itemque pD $= 3d$ ſurſum $=$ pA.

Atque id ipſum plane eveniet, poſita æquatione $9dq^2 - q^3 = 27d^2g$, vel $q^3 - 9dq^2 = -27d^2g$, (quæ ſupponit punctum D ſurſum, adeoque hujus radices affirmativæ deſignant D ſurſum, negativæ deorſum.) Poſito $r = q - 3d$, hoc eſt $q = r + 3d$, erit $r^3 - 27d^2r = -27d^2g + 54d^3$; adeoque (ſi $g = 2d$,) erit $r^3 - 27d^2r = 0$: cujus æquationis tres radices ſunt $+3d\sqrt{3}$, $-3d\sqrt{3}$, ± 0; quibus deſignantur GD, GD, GD, ſive AD, AD, AD $=$ AA; hoc eſt AD $= 3d\sqrt{3}$ ſurſum, AD $= 3d\sqrt{3}$ deorſum, & AD $=$ AA $= 0$. Et propterea, cum ſit $q = r + 3d$, erunt æquationis $q^3 - 9dq^2 = -27d^2g$ tres radices $q = +3d\sqrt{3} + 3d$, $q = -3d\sqrt{3} + 3d$, $q = 0 + 3d$; hoc eſt pD $= 3d\sqrt{3} + 3d$ ſurſum, pD $= 3d\sqrt{3} - 3d$ deorſum, & pD $= 3d$ ſurſum $=$ pA.

Habemus itaque in utraque æquatione (quæ nempe ſupponit D deorſum, & quæ ſupponit D ſurſum) tres radices eaſq; utiles omnes, ſed & (mutatis ſignis ob ſuppoſitiones contrarias

rarias) eaſdem utrobique. Eſt enim r hoc eſt, G D, id eſt (hoc caſu) A D. Nempe

$$AD \begin{cases} \text{ſuprema} = \text{ſurſum} + 3d\sqrt{3} = \text{deorſum} - 3d\sqrt{3}. \\ \text{media} = AA = \text{ſurſum } 0 = \text{deorſum } 0. \\ \text{infima} = \text{ſurſum} - 3d\sqrt{3} = \text{deorſum} + 3d\sqrt{3}. \end{cases}$$

Adeoque (cum ſit pD, hoc eſt q ſurſum $= r + 3d$, & q deorſum $= r - 3d$,) erit

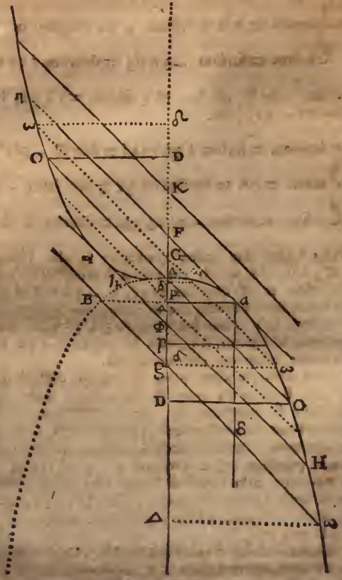
$$pD \begin{cases} \text{ſuprema} = \text{ſurſum} + 3d\sqrt{3} + 3d = \text{deorſũ} - 3d\sqrt{3} - 3d. \\ \text{media} = pA = \text{ſurſum } 0 + 3d = \text{deorſum } 0 - 3d. \\ \text{infima} = \text{ſurſum} - 3d\sqrt{3} + 3d = \text{deorſum} + 3d\sqrt{3} - 3d. \end{cases}$$

Vides itaque jam probe convenire omniã. Nempe tum pA $= 3d$ quod ſupponit tua prima demonſtratio; tum Ap + pD deorſum = AD deorſum $= 3d\sqrt{3} - 3d$, pl: $+3d = 3d\sqrt{3}$, quod habet demonſtratio tua ſecunda; tum rectam AD non eſſe biſectam in p, (non quidem quia $3d\sqrt{3} + 3d > 3d\sqrt{3} - 3d$, uti primum videbatur, ſed) quia $3d > 3d\sqrt{3} - 3d$. Et propterea neque rectam $\alpha\pi$ eſſe diametrum.

Verùm adhuc inquies, nova hic emergit difficultas, (quaſi non tam Proteus ſit quam Hydra quicum hunc agatur.) Cum enim D punctum, ſit, per conſtructionem, diametri punctum illud cui ordinatim applicatur recta O D in curva α A terminata: quî omnino fieri poſſit, ut ejuſmodi ullum reperiatur punctum ſupra verticem A? quod tamen inſinuat hæc æquatio: cujus ſiquidem ſaltem una radix, ſurſum ſumenda, ſupra verticem excurrit, (nam pD $= 3d\sqrt{3} + 3d$ ſurſum, major eſt quam pA $= 3d$, adeoque verticem ſuperat rectâ AD $= 3d\sqrt{3}$.)

Dicendum itaque (quod quidem hæc evincit inſtantia) curvam Paraboloidis Cubicalis α A, ſupponendam eſſe ultra verticem A non deorſum flecti ad B, ſed ſurſum potius ad a: Adeoque ipſius genuinum ſitum eſſe (quod paſum forſan pu-

taveris)non α A B, ſed α A a. (Atque hoc illud eſt myſterium quod pridem inſinuabam deinceps detegendum.) Cui quidem curvæ occurrit recta O O in tribus omnino punctis;



ſemper O, A, O: unde ordinatim-applicatæ, diametro occurrunt

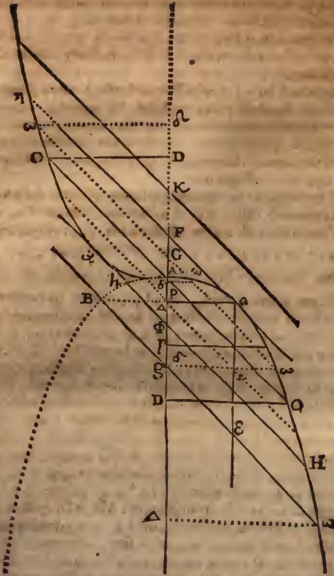
currunt in punctis D, A, D; coincidentibus ſiquidem O D mediis, ipſi puncto A, quoties ſcilicet per ipſum verticem tranſit ea recta: (Similiter, mutatis mutandis, recta $\omega\,\omega$, occurrit curvæ in punctis tribus ω, ω, ω; quibus in diametro reſpondent δ, δ, δ.) Quæ tria puncta, tribus æquationis cubicæ radicibus indicantur.

Ne autem hunc (inexſpectatum forſan) curvæ ſitum mireris nimium; eundem plane poſtulat, ſi intimius perpendatur, ipſa Paraboloideos Cubicalis natura; utpote cujus ordinatim-applicatæ, ponuntur, in diametrorum ratione ſubtriplicata; adeoque diametri in ordinatim-applicatarum ratione triplicata. Quod ſic colligimus.

Si, verbi gratia, ordinatim applicata DO, quæ deſignat puncti O a diametro diſtantiam dextrorſum, dicatur $+a$; diſtantia huic æqualis ſiniſtrorſum, dicenda erit $-a$: atque harum cubi, $+a^3 = +a \times +a \times +a$, & $-a^3 = -a \times -a \times -a$. adeoque diametri AD, AD, quibus conveniunt hæ ordinatim applicatæ, erunt ut $+a^3$, $-a^3$, (quippe in ordinatim-applicatarum ratione triplicata,) hoc eſt, ut quantitas affirmativa, eique æqualis negativa, ſive ut AD deorſum, & huic æqualis AD ſurſum. Adeoque ſi curvæ punctum O dextrorſum, reſpondeat diametri puncto D deorſum; ejuſdem curvæ punctum O ſiniſtrorſum, reſpondebit diametri puncto D ſurſum. Unde ſequitur curvæ ſitus ille quem indicavimus α A a.

Quod autem in Parabola res ſecus habeat (quæ ſitum huic ſimilem non poſtulat) ratio eſt; quia parabolæ ordinatim-applicata DO dextrorſum $= +a$, & DO ſiniſtrorſum $= -a$, eandem plane diametri ſitum poſtulabunt; cum utriuſque tum $+a$, tum $-a$, quadratum ſit $+a^2$, (quippe $+a \times +a = +a^2 = -a \times -a$,) erunt diametri AD, AD, quibus hæ conveniunt ordinatim-applicatæ, ut $+a$, $+a$; adeoque tum magnitudine æquales, tum in eodem ſitu; adeoque idem utrobique punctum D: non autem, ut in Paraboloide cubicali, æquales magnitudine ſed contrario ſitu. (Quod autem de Parabola jam dictum eſt, pariter obtinet in Paraboloide Biquadraticali, aliiſque a poteſtate ſexta, octava, decima, &c. denominatis; nempe quando dimenſionum numerus eſt Par: ſicut &, ex adverſo, quod de Paraboloide Cubicali dictum eſt,

 perinde



perinde etiam obtinet in Paraboloide Surdeſolidali, aliiſque à poteſtate ſeptima, nona, &c. denominatis; nempe quando dimenſionum numerus eſt Impar; imo, inquam, eâdem de cauſa, etiam in linea recta, quæ haberi poterit linea Paraboloidis Lateralis

teralis, ab una dimenſione dicta; quippe & hæc ad verticem uſque ducta, ſi continuetur, continuabitur ſurſum. Quæ monuiſſe ſufficiat.)

Sin porro urgeas; Annon poſſit ea curva α A, ubi ad A perventum eſt, etiam deorſum flecti ad B, æquè ac ſurum ad a? Poteſt, inquam: ſicut &, ſi eſſet Parabola, poſſet non minus ſurſum flecti ad a, quam deorſum ad B; nam ut ejuſmodi duæ lineæ parabolicæ ſic componantur nihil impedit. An vero, dices? ſi id fiat, annon eſſet ea linea αAB, curva Paraboloideos cubicalis? Eſſet, inquam; eodem ſenſu quo linea Parabolica dici poſſit, quæ ad inſtar αAa recurvata ſit. Verum, accuratius loquendo, dicendæ videantur (ſaltem quod ad hoc negotium) tum hic duæ ſemiparabolæ, tum illic duæ ſemiparaboloideos curvæ. Quippe, cùm ſitus ille ſubcontrarius α A a (ob jam dicta) ſit non minus Paraboloideos Cubicalis curvæ genuinus, quam Parabolæ genuinus ſit ſitusſuus αAB ad ejuſdem rectæ AB partes oppoſitas: non minus judicandus eſſet αAB ſitus Paraboloideos cubicalis præternaturalis, quam eſſet ſitus αAa præternaturalis Parabolæ.

Verum, utut ſit, (ſive ſitu naturali, ſive præternaturali;) cum utcunque non incommode ſupponi poſſit hujuſmodi curva BAαω, eique inſcribi recta B ω, tangenti Fα parallela; annon æquatione aliquâ indagari poſſunt, diametri puncta, puta Δ, Δ, ad quæ pertingant ordinatim-applicatæ BΔ, ωΔ? Poſſunt inquam. Et quidem quod ad ωΔ, ea quam hactenus tractavimus æquatione inveſtigabitur, (uti mox videbitur,) quoad autem BΔ nonquàm hactenus verſavimus æquatione, ſed longe alia. Quippe ad æquationem illam ponendum eſt, non AP. AΔ :: Pωc. ΔBc (quod præſentis indaginis fundamentum eſt,) ſed AP. — AΔ :: Pωc. ΔBc. Verum cum illa indagatio a preſenti negotio ſit aliena; intermittendam illam hic loci ſentio, donec eam quam hactenus tractavimus æquationem penitius abſolvero.

Cum itaque hactenus æquationis $r^3 - 27d^2r = \pm 27d^2g \mp 54d^3$, adeoque $q^3 - 9dq^2 = \pm 27d^2g$. radices, unico ſaltem caſu determinavimus, ſcilicet, cum $g = 2d$, hoc eſt cum inſcripta per verticem tranſit: Supereſt, ut alios adhuc caſus perpendamus; nempe, cum $g < 2d$, (hoc eſt cum interſectionis punctum G eſt ſupra verticem;) &, cum $g > 2d$; a-

 deoque

deoque G infra verticem. Priori caſu, erit $+g - 2d$ quantitas negativa; poſteriori, quantitas affirmativa.

Ne autem æquationis geminę $r^3 - 27d^2 r = \pm 27d^2 g \mp 54d^3$, juncta conſideratio confuſionem pariat, ſeparare libet; eamque ſeorſim perpendere quę punctū D deorſum ſpectat $r^3 - 27d^2 r = +27d^2 g - 54d^3$, cujus propterea radices negativę interpretandę erunt in contrarias partes, hoc eſt ſurſum. (quæ autem de hâc dicentur omnia, eadem mutatis mutandis, de altera quæ D ſurſum ſpectat intelligantur; cum hoc ſolo diſcrimine, quòd quæ in una ſunt radices affirmativæ, eædem in altera ſunt negativæ, & contra.) Tum pro differentia duarum g, $2d$, ſubſtituo b; adeoque $g - 2d = \pm b$, nempe $+b = AG$ deorſum, hoc eſt, ſi $g > 2d$, hoc eſt, $FG > FA$, adeoque G infra verticem: & $-b = AG$ ſurſum, ſi ſit $g < 2d$, hoc eſt $FG < FA$, adeoque G ſupra verticem, (non modo ſi inter F & A, ubi ſaltem FG erit quantitas affirmativa, ſed multo magis ſi ſit ſupra F, ubi ipſa FG erit per ſe quantitas negativa, (ſupponitur enim G infra F) adeoque $g - 2d$ erit multo mágis negativa, nempe $-FG - FA$.) Denique, pono $d = 1$ (licet enim diametrum quocunque numero deſignare, adeoque reliquas quantitates ad hunc numerum comparare,) ut liceat, tum d, tum ipſius omnes poteſtates omittere. Adeoque æquatio punctum D deorſum ſpectans, erit $r^3 - 27r = \pm 27b$ (prout ſcilicet G contingat infra ſuprave verticem.)

His poſitis, ut æquationem expoſitam $r^3 - 27r = \pm 27b$, reſolvamus: Videndum primo num $b = 0$; quippe ſi hoc contingat, tum res jamjam abſoluta eſt; nempe evaneſcente $\pm 27b$, erit $r^3 - 27r = 0$, (adeoq; radicum altera $r = 0$) & $r^2 = 27$. (adeoque radices duæ reliquæ, $r = +\sqrt{27}$, $r = -\sqrt{27}$.) quippe caſus hic, ille eſt quem hactenus tractavimus; ubi nempe inſcripta per verticem tranſit.

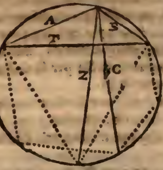
Sin illud non contingat, ſed b quantitatem habeat (ſive addendam ſive auferendam;) Videndum ſecundo; utrum quadratum ſemiſſis numeri $27b$; majus ſit, an minus, an æquale, Cubo Trientis numeri 27: Hoc eſt, utrum $\frac{729}{4}b^2$, plus ſit, an minus, quam 729, aut etiam æquale. Hoc eſt, utrum b^2 ſit majus, minus

	$2)\,27b$	$\times 9$
	$2)\,27b$	81
$4)\,729b^2\,($	$\frac{729}{4}b^2$	$\times 9$
		$729)$

minus, an æquale, 4 : Sive b majus, minus, an æquale 2.

Si quadratum minus ſit, exigenda eſt æquatio ad (ſupra memoratarum) Regulam Tertiam: Si majus, ad Primam; Sin æquale, ad utramvis; ſcilicet indifferenter vel ad Tertiam vel ad Primam.

Eſto itaque primo, hujuſmodi æquatio $r^3 - 27r = -26$. (Hoc eſt, fit $26 = 27b$, adeoque $\frac{26}{27} = b =$ AG, & quidem AG ſurſum, propter ſignum $-$: adeoque FG $= g = 2 - \frac{26}{27} = 1\frac{1}{27}$.) quæ reſpondet inſcriptæ $\phi G\omega\omega$. Hæc cum exigenda ſit ad Regulam tertiam (eſt enim $13 \times 13 = 169$, minus quam $9 \times 9 \times 9 = 729$,) Scribatur circulus cujus radius ſit 3 (radix quadratica trientis coefficientis 27) hoc eſt, ſcribatur circulus cujus radius æquetur rectæ PF $= 3d$. Huic circulo aptetur recta C $= \frac{26}{9} = 2\frac{8}{9}$ (quod emergit ex diviſione quantitatis abſolutæ per trientem coefficientis,) hoc eſt, ſit C $= \frac{26}{9}d$. Triſectis itaque duobus arcubus quibus ſubtenditur C, erunt trientum ſubtenſæ A, E, æquationis duæ radices affirmativæ; (nempe $G\gamma$, $G\gamma$, deorſum;) & $-Z = -A - E$, radix negativa, (hoc eſt $G\gamma$ ſurſum.) Et quidem A $= \frac{1}{2}\sqrt{105} - \frac{1}{2} = G\gamma$ infimæ, E $= 1 = G\gamma$ deorſum mediæ, $-Z = -\frac{1}{2}\sqrt{105} - \frac{1}{2} =$ $G\gamma$ ſurſum.



Et quidem idem omnino accideret ſi poſita eſſet æquatio $r^3 - 27r = +26$, (quod fieret ſi recta tranſiiſſet tanto infra verticem quanto illic ſupra, hoc eſt prope punctum P, cui inſcriptæ literas ſuas non appoſui ne nimia ſit confuſio,) niſi quod tunc radices quæ prius erunt affirmativæ jam eſſent negativæ, & contra; adeoque trium radicum, ſive rectarum $G\gamma$, $G\gamma$, $G\gamma$, maxima, & quidem ea ſola, deorſum tenderet, reliquæ duæ ſurſum.

Atque hoc quidem contingit, quoties b minus eſt quam $2d$; hoc eſt, quoties G incidit vel inter A F, vel inter, A ϕ. Poſito ſcilicet, Aϕ = AF $= 2d$.

Eſto tum æquatio hujuſmodi $r^3 - 27r = +154$ (hoc eſt $b = 5\frac{19}{27} =$ AG deorſum; puta Ag.) Exigenda eſt hæc æquatio

quatio ad regulam primam; (propter quadratum ſemiſſis termini abſoluti, majus Cubo coefficientis termini medii, nempe $72\times72=5184 > 729=9\times9\times9$..) Hujus autem æquationis, eſt radix unica poſſibilis affirmativa; nempe $7=g\Delta$ deorſum (ut ſupra oſtenſum eſt;) reliquæ duæ impoſſibiles. Quod argumento eſt rectam αB non niſi in uno puncto expoſitæ curvæ occurrere. Quamvis enim verum ſit quod recta αg occurrat etiam in B, curvæ AB; non tamen illud ad præſens negotium omnino ſpectat: quippe hæc æquatio non ſpectat curvam αAB, ſed curvam αAa, ut ſupra dictum eſt. Atque idem intelligendum erit de puncto h, iiſque omnibus quibus interſecatur BA etiam, ultra verticem ex altera parte ſurſum continuata.

Pari modo, ſi poſita eſſet æquatio $r^3 - 27r = +154$. niſi quod illic radix quæ unica eſt poſſibilis, eſſet negativa, adeoq; ſurſum ſumenda: & conveniret hæc æquatio rectæ per K ductæ; ſi nempe AK, ſive AG ſurſum, ponatur $5\frac{12}{27}$.

Atque hoc contingit quoties *b*, vel AG (ſive ſurſum ſive deorſum) major eſt quam $2 = AF$. Hoc eſt, quoties *g* vel eſt minus quam o, vel plus quam $4d$: Quippe ſi illud, erit G, ſupra F; ſi hoc, erit infra Φ.

Denique; ſi ponatur æquatio $r^3 - 27r = \pm 54$. (adeoq; $b = \pm 2$.) perinde eſt ad utramvis regulam exigatur; (quia quadratum ſemiſſis termini abſoluti, æquatur cubo trientis coefficientis, $27\times27 = 9\times9\times9 = 729$.) Si ad tertiam exigatur; ſcripto circulo cujus radius $3\ (=\sqrt{\frac{27}{3}}=\sqrt{9},)$ inſcribatur recta quæ ſit $6\ (=\frac{54}{9};)$ hæc autem (cum ſit diameter, quippe $6=3+3$) dirimet circulum in duos ſemicirculos; utriuſvis autem ſemiperipheriæ trienti ſubtendit recta radio æqualis; adeoque tum $A=3$, tum $E=3$; item $Z(=A+E)=6$. Hoc eſt, ſi $r^3-27r=+54$, (poſito G, in Φ,) radix affirmativa $+6$ deorſum ſumenda; & negativæ -3, -3, (ſumendæ ſurſum,) quæ propter æqualitatem ſuam coincidunt, adeoque pro duabus curvæ interſectionibus indicant unum contactum, nempe a. Si vero ſit $r^3-27r=-54$, (poſito nempe G in, F,) radicum maxima 6 erit negativa, ſurſum ſumenda; & duæ minores 3, 3, affirmativæ, ſumendæ deorſum, & (propter æqualitatem, adeoque coincidentiam), indicabunt punctum contactus, α.

(Inventis autem omnibus radicibus *r*; ſi illis ſigillatim auferatur

ſeratur (quippe jam in ea ſola verſamur æquatione quæ ſupponit D deorſum poni) $3d$, habentur totidem radices $q = r - 3d = pD$. puta, ſi ſint radices r, ut in exemplo primo, $+\frac{1}{2}d\sqrt{105} - \frac{1}{2}d$, $+1d$, $-\frac{1}{2}d\sqrt{105} - \frac{1}{2}d$: erunt totidem radices q, $+\frac{1}{2}d\sqrt{105} - 3\frac{1}{2}d$, $-2d$, $-\frac{1}{2}d\sqrt{105} - 3\frac{1}{2}d$. Et ſimiliter in reliquis. Ubi interim notandum eſt, quod hac ſubductione fieri poteſt, ut quæ fuerat radix affirmativa tranſeat in negativam. Puta, quoties punctum D, eſt infra G, ſed ſupra p.)

Adeoque hujuſce æquationis caſus omnes ſolvimus. Atque eâdem operâ, hujuſmodi curvæ ope, methodum oſtendimus æquationes cubicas, hujuſce formæ omnes $r^3 - mr = \pm n$, Geometricè ſolvendi. Nempe ſumpta diametro $d = AP = \sqrt{\frac{1}{12}m}$ (cui ordinatim-applicata ſit $P\alpha$; adeoque, ſumpta $PF = 3PA = \sqrt{\frac{3}{4}m}$, $F\alpha$ tangens,) & $AG = \frac{n}{m} = b$ (deorſum quidem ſi ſit $+n$, ſurſum vero ſi $-n$;) ducatur per G recta, tangenti $F\alpha$ parallela, occurrens curvæ in puncto (uno, aut pluribus, prout contigerit,) O; ducta ordinatim-applicata OD, determinabit æquationis radicem $GD = r$; & quidem, ſi occurſus puncta O plura ſint, totidem erunt & puncta D, adeoque Æquationis totidem radices poſſibiles; affirmativæ quæ deorſum, negativæ quæ ſurſum, tendunt.

Tandem, ut totum aliquando abſolvamus negotium; Quoniam jam facta eſt mentio puncti B, aliorumque ſimilium, in curva BA, etiam ſurſum continuanda; adeoque & punctorum diametri quæ his reſpondeant: Libet & eam rem aliquatenus intueri. Diximus jam ſupra; ſi $P\alpha$ dextrorſum ſit $+p$, ejuſmodi recta ſiniſtrorſum erit $-p$; adeoque ut illius cubus $+p^3$, ſic hujus $-p^3$; & propterea, ſi diametri ſitus deorſum, puta AP dicatur $+d$, ſurſum erit $-d$: adeoq; licet ſit $d.d :: p^3.p^3$. non tamen (ſumptis ordinatim applicatis in contrariam partem) $d.d :: +p^3.-p^3$. ſed $+d.-d :: +p^3.-p^3$. Hoc eſt, licet ſit (quoad Δ inferius) $AP.A\Delta :: P\alpha c.\Delta\omega c$, non tamen (quoad ſuperius) $AP.A\Delta :: P\alpha c.\Delta Bc$. ſed $AP.-A\Delta :: P\alpha c.\Delta Bc$.

His autem conſideratis; eadem methodo qua uſi ſumus (mutatis mutandis) ad prop. 47. Con. Sect. rem ad æquationem

perducemus. Nempe $AP = d$. $A\Delta = d + g - q$ (nam Δ ſuperius inquirimus;) adeoque $-A\Delta = -d - g + q$. $P\alpha c = p^3$. ergo, propter analogiam indicatam, $d . -d - g + q :: p^3 . \frac{-d - g + q}{d} p^3 = \Delta Bc$.

Sed eſt etiam $FP . P\alpha :: g\Delta . \Delta B$. hoc eſt, (ut ibidem oſtenditur,) $3d . p :: 3d - q . \frac{3d - q}{3d} p = \Delta B$. (ubi ΔB eſt quantitas negativa, ſicut ipſa $3d - q$, quippe q major eſt, hoc caſu, quam $3d$.) ejuſq; cubus $\frac{27d^3 - 27d^2 q + 9dq^2 - q^3}{27d^3}$ $p^3 = \Delta Bc = \frac{-d - g + q}{d} p^3$.

Adeoque (facta reductione) $27d^3 - 27d^2 q + 9dq^2 - q^3 = -27d^3 - 27d^2 g + 27d^2 q$. Hoc eſt, $q^3 - 9dq^2 + 54d^2 q = +27d^2 g + 54d^3$. Quæ, ſubſtituendo $r + 3d = q$: reducitur ad æquationem hanc $r^3 + 27d^2 r = 27d^2 g - 54d^3$. Nam

$$r^3 + 9dr^2 + 27d^2 r + 27d^3 = q^3.$$
$$-9dr^2 - 54d^2 r - 81d^3 = -9dq^2.$$
$$+54d^2 r + 162d^3 = +54d^2 q.$$
$$r^3 + 27d^2 r + 108d^3 = 27d^2 g + 54d^3.$$
Et $r^3 + 27d^2 r = 27d^2 g - 54d^3$:

Atque idem plane eveniet, ſi punctum B fuerit in curvæ A B continuatione ſurſum ultra verticem A, (nam, ut nunc ordinatim-applicata negativa, nempe ſiniſtrorſum, applicatur diametro affirmativæ, puta deorſum: ita, caſu iſto, ordinatim-applicata affirmativa, hoc eſt dextrorſum, applicabitur diametro negativæ, puta ſurſum, applicabitur enim ſupra verticem A: adeoque utrobique mutanda erunt diametri $A\Delta$ ſigna, ut analogia rite inſtituatur:) cum hoc unico diſcrimine, quod cum illic $b = g - 2d = AG$ ſit quantitas affirmativa (deorſum ſumenda:) adeoque æquationis quantitas abſoluta, affirmativa

firmativa; $+27d^2b$: hic erit negativa (ſurſum ſumenda) adeoque abſoluta quantitas $-27d^2b$ negativa: (illic enim g, major erit, hic minor quam, $2d$.) Et proinde quæ illic eſt radix affirmativa, g △ ſurſum, ſuppoſitioni conſona, (nam de △ ſurſum inſtituebatur hæc inquiſitio:) hic erit negativa, g △ deorſum, ſuppoſitioni contraria. Nempe illic △ altius erit quam g, hic inferius. Quæ omnia ſatis intelligentur, ſi ſupponatur curva B A continuari ultra verticem ſurſum, (eo modo quo α A continuatur ad a,) quam ego continuationem, in ſchemate, conſulto omiſi ne reliqua turbaret, ſed imaginatione facile ſupplebis. Ut enim curvam B A infra verticem ſecant rectæ ω g, H ϕ, in punctis B, h; quæ puncta ſpectat æquatio $r^3+27d^2r=+27d^2b$: ſic continuationem illam ſupra verticem ſecabunt in aliis punctis rectæ ω G, ν F; quæ puncta ſpectabit æquatio $r^3+27d^2r=-27d^2b$.

Hujus autem æquationis $r^3+27d^2r=\pm 27d^2b$, radix, (unica quidem; quippe reliquæ quas exſpectes duæ non ſunt, niſi imaginariæ; quod indicio eſt rectam quamlibet tangenti F α parallelam, non poſſe curvæ B A, ſutut ſicut dictum eſt ſurſum continuatam, niſi in unico ſolo puncto occurrere,) Arithmeticè inveſtigatur per regulam noſtram ſecundam, ſuperius allatam: Geometrice vero (ſi ſaltem permittas ut hanc curvam appellem Geometricam) hujus curvæ beneficio. Nempe, conſtructis reliquis ut prius, ſicut rectæ per G tranſeuntis puncta, curvæ α A a occurrentia (ſive plura ſint ſive unicum) deſignant radices æquationis hujus $r^3-27d^2r=\pm 27d^2b$ (ductis nẽpe a punctis illis ad diametrũ ordinatim applicatis;) ita ejuſdem rectæ occurſus curvæ BA (ſi opus, continuatæ,) deſignat æquationis $r^3+27d^2r=\pm 27d^2b$ radicem (poſſibilem unicam) nempe ducta inde ad diametrum ordinatim-applicata.

Inventa autem hac radice $r=$ g △, addendo $3d$ habebitur radix $q=r+3d=$ p △: ſi & hanc libeat inquirere.

Sin libeat adhuc conjuncta æquatione utrumque rectę B ω terminum indicare; (vel etiam Sectionum puncta B, O, omnia, ejuſdem rectæ occurſu facta:) id ſic faciendum erit $r^3\mp 27d^2r=+27d^2b$, ſi nempe punctum B ſit in curva AB infra verticem, (hoc eſt ſi punctum G ſit infra verticem A;) ſi autem in ejus continuatione ſupra verticem (hoc eſt, ſi

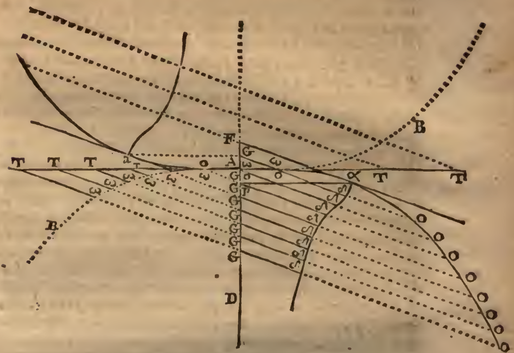
G ſupra A;) erit $r^3 \mp 27 d^2 r = -27 d^2 b$. Quippe æquatio $r^3 - 27 d^2 r = \pm 27 d^2 b$ reſpicit omnia puncta O; & reliqua $r^3 + 27 d^2 r = \pm 2 d^2 b$, puncta B.

Æquationes itaque omnes utriuſque formæ, (adeoq; æquationes cubicæ ad unam omnes, quippe ad harum alteram æquationes omnes cubicæ facile reducuntur.) $r^3 - 27 d^2 r = \pm 27 b$, & $r^3 + 27 d^2 r = \pm 27 d^2 b$; Unius hujus curvæ ope facile reſolvuntur. Quippe prioris radices omnes occurſu rectæ GO curvæq; α A a, indicantur; ut ſuperius oſtenſum eſt: Poſterioris, occurſu ejuſdem rectæ, curvæ q; BA (continuatæ) radix innoteſcit, uti jam oſtendimus. Et quanquam fatendum ſit, eaſdem omnes Coniſectionum ope ſolvi poſſe, cum interim ſit hæc noſtra curva uno adhuc gradu magis compoſita, (adeoque videamur ex problemate, ut loquuntur, Solido, feciſſe Lineare;) cum tamen hæc ipſa curva ſit ex ita compoſitis ſimpliciſſima, & quidem vix difficilior (ne dicam facilior) facta quam Coniſectionum aliquæ (puta Hyperbola', vel etiam Ellipſis;) eaque ſemel ducta, quodcunque habeat latus rectum (cujus hic nulla habetur ratio,) ad æquationes mille diverſiſſimas (ne dicam omnes) una inſerviat; nec aliud inſuper poſtulet ad totum negotium abſolvendum, quam parallelarum aliquot rectarum ductum: ſi non ſimplicior, ſaltem expeditior methodus videri poſſit, quam quæ per Sectiones Conicas adhibetur.

Eodem fere modo unius Parabolæ, ejuſque inverſionis, ope, ſolvi poſſent æquationes omnes quadraticæ. Et Paraboloidium ſuperioris ordinis ope, æquationes altiores, (ſi non omnes, multæ ſaltem,) ſolvi poterunt; verum hæc omnia proſequi, non eſt hujus loci.

Verum ſi libeat adhuc, menſuras in diametro jam inventas, ad ipſas inſcriptas transferre, adeoque rectarum GO,GO,GO, vel etiam GO, GB, (ſumpto ubivis in diametro, puncto G.) ipſis GD, GD, GD, vel etiam GD, GΔ, (fig. præced.) proportionalium, quantitates habere; Id facili negotio obtinebitur. Nempe ſumptis PF . Pα : : (AP . Tα : : GA . GT : :) $d.e :: b.k$ (adeoque) : : $r.b$: : GD . G O. Prodibunt pro æquationibus jam exhibitis $r^3 - 27 d^2 r = \mp 27 d^2 b$, & $r^3 + 27 d^2 r = \mp 27 d^2 b$, hæ omnino ſimiles

$b^3 - 27\,e^2\,b = \mp 27\,e^2\,k$, & $b^3 + 27\,e^2\,b = \mp 27\,e^2\,k$; quarũ prioris radices indicabunt inſcriptarum parallelarum ſegmenta puncto G & curva αAa intercepta; poſterioris vero earundem ſegmenta eodem puncto G & curva BA &c. intercepta.



Atque hinc quidem licebit ipſam, quam ſupra indicavimus, diametrum curvam (ſic enim libeat dicere) quæ rectas parallelas curvæ BAα inſcriptas biſecat (quæ toto huic negotio anſam porrexit) ulterius explicare, ejuſq; puncta ſingula per eorum a diametro A D diſtantiam G δ in ipſis G O parallelis menſurandam exhibere.

Siquidem inſcripta oO, vel ωO, (punctum inferius diſtinctionis gratia, dicimus O; ſuperius, ſi in curva Aα, o; ſi in AB, ω:) vel eſt G O — Go, vel GO + Gω. Adeoque, quoties G eſt ſupra A, eſt oO differentia duarum radicum affirmativarum æquationis hujus $b^3 - 27\,b = -27\,k$, puta b, b, (quas radices diſtinctionis item gratia dicemus B = GO, & b = Go:)

 Quoties

Quoties autem G eſt infra A, eſt ωO ſumma duarum radicum (affirmativarum) æquationum $b^3 \mp 27b = 27k$, (quarum alteram B, alteram β dicemus,) nempe, æquationis $b^3 - 27b = 27k$ radix (vel poſſibilis, vel ſaltem) affirmativa unica $B = GO$, & æquationis $b^3 + 27b = 27k$ radix unica poſſibilis $\beta = G\omega$. Et propterea ſemiſſis inſcriptæ $oO = GO - Go = B - b$, erit, $\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}b$; & inſcriptæ $\omega O = GO + G\omega = B + \beta$, ſemiſſis $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}\beta$. Adeoq, $G\delta$ diſtantia puncti G a puncto inſcriptæ medio, erit illic $\frac{1}{2}oO + oG = \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}b + b = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}b$; hic vero, $\frac{1}{2}\omega O - \omega G = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}\beta - \beta = \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}\beta$. Quod vel ex ipſo ſchematis inſpectu liquet.

Cognitis itaq; ex ſupra traditis, tum B, b, illic; tum B, β, hic; habetur diſtantia diametri curvæ, a diametro recta, in ipſis GO parallelis menſuranda; (quod pariter etiam obtinet in aliis cujuſcunq; gradus Paraboloidibus inventis, ſuo in ſingulis modo, B, b, β ut mox docebitur:) adeoq; verus iſtius curvæ ſitus, ſinuoſus quoad ipſius ſingula puncta. quæ quidē primo partem ſuam curvā (a puncto ω aliquouſq; deorſum) ad rectam AP diametrū obverſam habet; deinde vero, flexione in contrarias partes factâ, partem convexam: Et quidem hoceo pacto fit, ut non modo ad rectam eam non pertingat unquam; ſed & ita interim appropinquet, ut omni aſſignabili diſtantia propius accedat; adeoq; eam ſibi hbeat vere Aſymptoton. Quod ſic oſtenditur.

1. Cum ſit (quod modo dictum eſt) inſcripta $\omega O = \omega G + GO = \beta + B$; ſitq; (quod jam ſupra oſtenſum eſt) GO major ubiq; quam $G\omega$; manifeſtum eſt medium inſcriptæ, a puncto G, ad partes O ſemper vergere, nec ad punctum ipſum G aut rectam A G uſpiam accedere. (Quæ quidem intelligenda ſunt, ut & ſequentia, ubi G incidit infra punctum A: ubi enim ſupra illud punctum contingit, non eſt quod ſimus ſoliciti; quippe tum, non modo inſcriptæ oO punctum medium, ſed & ipſa tota ad eaſdem partes poſita eſt.)

2. Manifeſtum item eſt, diſtantiam puncti G, a puncto medio, æqualem eſſe ſemi-differentiæ rectarum G O, G ω; ſive B, β, (Quippe ſi linea ſecetur tum in partes duas æquales, tum in totidem inæquales, inter ſegmentum erit ſemi-differentia partium inæqualium: ut notum eſt.) Hoc eſt $G\delta = \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}\beta$ Adeoque decreſcente vel etiam evaneſcente illa differentia, decreſcet pariter, vel evaneſcet ea diſtantia.

3. Poſito autem $e = 1$ erit B æquationis hujus $b^3 - 27b = 27k$ radix affirmativa; ut oſtenſum eſt; adeoque per regulā noſtram

noſtram primã (ſaltem quoad parallelã Ga omneſq; ipſi inferiores ut dictũ eſt, de ſuperioribus autem non eſt cur dubitemus)

$$B = \sqrt{c}.\ \tfrac{27}{2}k + \sqrt{:}\ \tfrac{729}{4}k^2 - 729 : + \sqrt{c}.\ \tfrac{27}{2}k - \sqrt{:}\ \tfrac{729}{4}k^2 - 729.$$

hoc eſt $\sqrt{c}.\ \tfrac{27}{2}k + 27\sqrt{:}\ \tfrac{1}{4}k^2 - 1 : + \sqrt{c}.\ \tfrac{27}{2}k - 27\sqrt{:}\ \tfrac{1}{4}k^2 - 1.$

hoc eſt, $3\sqrt{c}.\ \tfrac{1}{2}k + \sqrt{:}\ \tfrac{1}{4}k^2 - 1 : + 3\sqrt{c}.\ \tfrac{1}{2}k - \sqrt{:}\ \tfrac{1}{4}k^2 - 1.$

Et ſimiliter cum ſit β æquationis hujus $b^3 + 27b = 27k$ radix poſſibilis unica, erit (per Regulam ſecundam ſuperius traditam,)

$$\beta = \sqrt{c}.\ + \tfrac{27}{2}k + \sqrt{:}\ \tfrac{729}{4}k^2 + 729 : - \sqrt{c}.\ - \tfrac{27}{2}k + \sqrt{:}\ \tfrac{729}{4}k^2 + 729.$$

hoc eſt $\sqrt{c}.\ + \tfrac{27}{2}k + 27\sqrt{:}\ \tfrac{1}{4}k^2 + 1 : - \sqrt{c}.\ - \tfrac{27}{2}k + 27\sqrt{:}\ \tfrac{1}{4}k^2 + 1.$

hoc eſt $3\sqrt{c}.\ \tfrac{1}{2}k + \sqrt{:}\ \tfrac{1}{4}k^2 + 1 : - 3\sqrt{c}.\ - \tfrac{1}{2}k + \sqrt{:}\ \tfrac{1}{4}k^2 + 1.$

4. Quò autem harum quantitatũ ab invicem differentiã, (adeoq; & ſemidifferentiã quæ eſt ipſa de qua agitur diſtantia,) tum ſenſim decreſcere, tum tandẽ ſi in infinitũ procedatur evaneſcere oſtendã; aſſumo (quod & notiſſimum eſt) Æqualẽ Quadratorũ differentiam (quod & de aliis poteſtatibus verum erit) in quadratis majoribus, minorem quam in minoribus, radicũ differentiam poſtulare. (puta $\sqrt{2} - \sqrt{1}$ majus quam $\sqrt{3} - \sqrt{2}$, &c. ut notum eſt:) & quidem eouſque augeri poſſe quadrata, ut data illorum differentia differentiam radicum poſtulet minorem quavis aſſignata (Quod & tum alibi, tum ubi de Hyperbolæ Aſymptotis agitur, Con. Sect. prop. 39. monuimus.)

5. Adeoque differentia duarum $\tfrac{1}{2}k$, $\sqrt{:}\ \tfrac{1}{4}k^2 \mp 1$, hoc eſt, $\sqrt{\tfrac{1}{4}k^2}$, $\sqrt{:}\ \tfrac{1}{4}k^2 \mp 1$, creſcente quantitate k, (adeoque creſcentibus quadratis, dum interim eadem manet quadratorum differentia 1,) tum perpetuo decreſcit, tum tandem aſſignata quavis minor evadit.

6. Et propterea, tum $\tfrac{1}{2}k - \sqrt{:}\ \tfrac{1}{4}k^2 - 1$; tum $-\tfrac{1}{2}k + \sqrt{:}\ \tfrac{1}{4}k^2 + 1$; creſcente ut dictum eſt k, decreſcunt ſenſim & evaneſcunt; adeoque & eorum latera cubica, & horum tripla; hoc eſt, quantitatum B, β membra poſteriora.

7. Sed &, iiſdem de cauſis, in ipſarum membris prioribus decreſcit pariter atque ſenſim evaneſcit, differentia duarum $\sqrt{:}\ \tfrac{1}{4}k^2 - 1$, & $\sqrt{:}\ \tfrac{1}{4}k^2 + 1$, (creſcentibus ſcilicet ut dictum eſt, quadratis, eadem interim manente quadratorum differentia 2.) eaque quæ hinc dependet membrorum item primorum differentia: Et propterea ipſarum item quantitatum B, β,

differentia;

differentia; adeoque & puncti G ab inſcriptæ medio diſtantia. quod erat oſtendendum.

Sed & eadem puncta omnia, tum O, o, ω, tum δ, δ, &c. non minus deſignari poſſunt per ſuam a recta T T diſtantiam, quam a GG; nempe addita, ablatave, prout res exigat, recta $GT = k$.

In reliquis autem cujuſcunque gradus Paraboloidibus, habentur tum B, b, (quando G ſupra A) tum B, β, (quando G infra A,) ordinando & reſolvendo has æquationes. Nempe

In Parab.	Quadrat.	Cubic.	Biquadr.	
b (pro B, b,) =	$2\sqrt{q} : b - k :$	$3\sqrt{c} : b - k :$	$4\sqrt{qq} : b \mp k :$	&c.
b (pro B, β,) =	$2\sqrt{q} : k \pm b :$	$3\sqrt{c} : k \mp b :$	$4\sqrt{qq} : k \pm b :$	

Quod probabitur eodem fere modo cum demonſtratione ti a ſecunda.

Atque hæ ſunt tandem, Illuſtriſſime Domine, per quas deduxit nos ambages Æquatio illa. Supereſt ut Honoratiſſimam Dominationem Veſtram patientiæ veſtræ jam nimium læſæ veniam exoremus: (in quam quidem eo peccavi audacius, non modo quod noverim quam tu ſis ad condonandum facilis, faciliſque petenti; verum eo maxime quod neque hæc tibi forſan ingrata fore autumaverim:) Atque ut me digneris ultro reputare,

Illuſtriſſime Domine,

Oxonii Dec. 5. 1656.

In D. V. obſequium

Paratiſſimum,

Joh. VVallis.

De Proportionibus, *Dialogi*;

A MARCO MEIBOMIO Conſcripti;

Refutatio.

Um, currente prelo, ad Operis Arithmetici Cap. XXXVII perveneram, incidi in *Marci Meibomii* De Proportionibus *Dialogum*, anno ſuperiori *Haſniæ* magnâ quidem cum pompâ ſed infeliciter editum: Cumque illius Refutationem aliquam illic haud incommode inſerendam putaveram, adeoque hanc quæ ſequitur meditatus eram; vidi molem eouſque excreviſſe ut vix opportune uno Capite coerceri poſſit; nec etiam, citra injuriam, Lectoris patientiam nimia digreſſione, detineri poſſe. Adeoque, levi illic commonefactione habita, integram ejuſdem Refutationem, in hunc locum, ſeorſum rejiciendam putavi.

Virum Equidem autumo haud indoctum; Adeoque num quæ illic edidit ſerio protulerit, an joco potius, & quaſi ludendo, dubitandum forſan erit. Novimus enim & magnos viros nonnunquam ludendo quaſi, & tanquam ironice, illud proferre, quod ne quidem ipſi per omnia verum putant. Ut, qui *Moriæ Encomium* ſcripſit, vir ipſe interim prudentiſſimus; Item, qui *de Umbra Aſini*; qui, *in laudem podagræ*; & quæ ſimilia. Quo referenda ſunt *Kepleri ſomnium*; aliuſque *de Novo Orbe*, (ſive Incolis Lunæ,) tractatus; & quæ ſunt hujuſmodi. Ubi ingenioſe multa dicta ſunt, & quidem non parum ſubeſt veri; at interim nemo ſobrius authores illos per omnia ſerio loquutos ſuſpicabitur, ſed ſaltem ſeria ludis immiſcuiſſe.

Et quidem ſi hoc pacto ſe intellectum velit Clariſſimus Vir; exiguum eſt admodum quod ego in contrarium dicendum habeo; Niſi quod nollem ſacratiſſimum Dei nomen, quod in

Præfatione ſua aliquoties uſurpatum video, ludendo uſurpari. Quippe ſacratius illud eſt quam ut jocis noſtris ironicè immiſceatur. Cætera quod ſpectat; poſſum quidem ego ſive ludos ſuos, ſive joco-ſeria, atque ingenioſe dicta in re ludicra, æquo animo ferre. Nec enim ego quicquam video, quidni & in Mathematica, utut ſevera diſciplina, etiam ludere quantiſper liceat; &, reliquorum aſperitatem, lepide, faceteque traditis, nonnunquam demulcere.

Verùm ſi omnino ſerio agat Vir clariſſimus, (quod nonnullos arbitrari video,) veroſque ſe de Pythagora, Eudoxo, Euclide, Ptolemæo, Archimede, Apollonio, Theone, Pappo, Eutocio, reliquiſque ex veteribus Choragis, (ne & recentiores nominem Mathematicos,) triumphos agere cenſeri velit: Duo omnino ſunt quæ me impediunt ne ſibi poſſim hac ex parte conſentire. Alterum, quod quicquid ipſe veri ſubſtratum habet minime novum ſit; ſed & veteribus olim cognitum, & recentioribus etiamnum Mathematicis probe perſpectum. Alterum, quod, quæ ipſe in Matheſin videtur introducturus nova; ea plane falſa ſint, & res nihili.

Non interim ignoro, quam de hoc invento ſuo altum ſentire videatur. Quod vel in limine cuivis obvium eſt. Tum ex eis quæ ad Regem habet, Epiſt. pag. 5. *In traditis autem illis* (de Rationum doctrina) *Elementis quamquam Divini viri, Pythagoras, Eudoxus, Euclides, & quotquot unquam Pythagorici floruere, deſudarunt; primus omnium eruditam vetuſtatem, quantum ex ſcriptis illius ſcitur, ingenti molimine, quod præfiſcini dixerim, ſuperavi.* Tum ex ipſius ad Lectorem Præfatione, quam (quaſi univerſus orbis ipſi gratulari debeat) his verbis orditur; *Quod Orbis literatus gaudeat! Poſteritas gratâ memoria recordetur! Primi novas Geometricarum rationum leges in natura deteximus; & falſas propoſitiones in eo libro invenimus, quem ultimæ antiquitatis Divini viri, Pythagoras, Eudoxus, Euclides, ex Ægyptiorum & Patriarcharum inventis condiderunt, omnium autem ſeculorum præcipui Philoſophi & ſapientes legendo examinarunt.* (Quod quidem quot paraſanguis inventum Columbi, novum orbem indicantis, antecellat; deinceps multis exponit.) Egregium equidem facinus! & Viro dignum! Cui, ſi libet, Prologum faciamus, *Magna petis Phaëton.* ——— Metuo enim ne & congruum ſortietur Epilogum.

——— *Magnis tamen excidit auſis.*

Quid autem tanti moliminis opus ſuſcepturo animos fecerit, ſi dubitemus; exponit ipſe, pagina ſequente; nempe quod nihil ſibi arduum fore aut inacceſſum, experimento jam ſæpius edoctus fuerit. Quippe huc ſpectare videntur quæ illic habet; nempe, Jam *Illo tempore tot locorum in deſperatis auctoribus reſtitutione, quaſi perpetuis victoriis, animatus, nihil tam arduum, nihil ita intricatum in ſcientiis, quæ quidem ratione aliqua conſtitutæ eſſent, inveniri arbitrabar, ut, ſi ingenii nervos contendere vellem, explicatum illud dare diffiderem.* Virum itaque jam videtis facinori parem.

Hoc animo fretus, (quod præfat. pag. 3 indicat,) *Principia quædam Geometrica convellere ſuſcepit.* Et quidem, *ut ſciolorum vulgus, etiam intelligendi difficultate, ab his arceret; breviter & preſſe omnia primum conceperat.* Et quanquam, *mutata deinde ſententia, interpolata multa fuerint & late explicata, quæ ad intelligendam doctrinam ipſam pertinere viderentur: Ut tamen ſciolos* adhuc *torqueret, multa concinne admodum & jucunde excogitata*, etiamnum *omiſit.*

Nequis autem, *audaciores* jam *fieri homines, non ſapientiores*, cauſetur, qui veterum tradita, *adamantinis fundamentis* ſuffulta, auſint ſollicitare; ipſumque, *nugis ſuis animatum, Siſyphi ſaxo majus volvere*, ſuſpicetur; adeoque vel *Joſephi Scaligeri* infortunio monitum, qui *impotenti animo divini Archimedis nomini inſultarat*, ab his inceptis deterreri poſſe, vel etiam debere: Ille potius, *immortalitatem ex novis ſuis in hoc pulvere inventis conſequi anhelans, omnem ſibi poſteritatem demereri poſſe* confidit; Neque tantum Euclidis *præcipua quædam Geometriæ Elementa* convulſum iri; ſed & ſimul *Archimedis*; veterumque *omnium, famam, & doctrinæ ſoliditatem, ineluctabili quodam fato, hoc tempore ruituram.* Nempe huc ſpectant, libri ſui paginæ primores ſeptem.

Quum itaque non modo, *Pythagoras, Eudoxus, &c. ad rei veritatem non omnino penetrarunt*, ſed & *quædam, quæ veteres recte docuerant, ſiniſtra recentiorum interpretatione ſunt depravata*: Utrique malo ſuccurrendum ſtatuit, pag. 9 *Itaque & recentiores omnes* inquit, *reprehendam, qui antiquos non intellexerunt; & antiquos corrigam, qui male quædam prodiderunt; utroſq; inſuper nova docebus.* Atq; hæc quidem eſt ſuſcepti ratio.

Quanta vero hoc curâ præſtitum fuerit: ſucceſſu quanto; non item gravabitur indicare. Quamvis enim, pro eo quo erat acumine, & ſagacitate, *duarum horarum ſpacio illius doctrinæ fundamenta excogitaverit*, quam tum Veteres tum Recentiores omnes

 haste-

haƈtenus ignorarunt: attamen, ne, nimis feſtinans, aut cæcos parturiret catulos, aut informes; lambendo, & relambendo, ſatis proſpexit: quippe *in quibus deinde examinandis integro quinquennio fuit occupatus.* Præfat. p.2. quod & ſubinde ibidem monet pag. ſeq. Succeſſu autem eo factum eſt, ut & *Deo opt. max. humillimas*, inquit, *gratias agere deberem, qui, ad inveniendum, ingenium ſuffecit; & diſciplinis Mathematicis gratulari, quod certiora in poſterum tradere poſſint*: Idque eo magis, quo *majus eſt falſum inveniſſe, quod omnes ſapientes verum credebant; quam novi aliquid in eo reperiſſe, de quo multi ante dubitarant.* quod monet præf. p.1. Et propterea, non tantum *Eutocium, Theonem, totamq; antiquitatem*, nedum *juniores omnes*, craſſiſſimæ incuſat ignorantiæ, pag. 88, 89, 99, 100, 101, 127, 161, 165, 166, 167, 169, 173. Verum &, *ut Euclides*, tanquam *in hac cauſa victus, circinum & regulam* ſibi *tradat*, modeſtus petit. pag. 148. Atque, ſe judice, *immortalem ſibi inventionis gloriam comparavit.* pag. ult.

Quoniam autem, utut *ſciolum vulgus arceat*, quid tamen *lector candidus & eruditus judicaverit*, audire non refugiat; præf. pag. 3. ſatis forſan ſecurus, ſe album inde calculum reportaturum; nec adverſam metuens ſententiam, *quod*, inquit, *judicium contra quinquennale examen magno molimine intercedet*: Non abs re fore judicavi, hanc novam ipſius doctrinam ad examen vocare; ne ſibi opus ſit, quod facturus videtur, *Elementorum librum quintum, editione ſua*, commaculare. Quippe ego me *Lectorem candidum* ſpondere auſim, quam interim *eruditus*, penes alios eſto judicium.

Et quoniam, *Harmonicorum ignoratione, recentiorum errores ſuccreviſſe* (ibidem) ſuſpicatur. Quod & ſubinde aliquoties repetit: præſertim pag. 196, nempe *Juniores, quod rerum naturam in Canonicis nunquam conſideraſſent, adeoque, quid ratio eſſet, ignorarent, monſtroſam, & contra naturæ decreta natam, rationis compoſitionem*, excogitaſſe: Et pag. 101. *Illos*, inquit, *errores, ob neglectum Muſices ſtudium, Mathematicis Deus immiſit; uti olim Deliis Apollo peſtem, quod Geometriæ nullam illi operam darent.* Et quæ ſequuntur. (Quaſi quidem ex Harmonice ſtatuminanda eſſet Geometria, potius quam, ex hac, illa.) Et proinde (ut ait, præf. pag 3) *Hoc maxime optaret, tam ſua quam Lectoris gratia, qui ad hæc legenda & examinanda accedit, ut antequam cenſoria virgula quidquã damnare ſuſcipiat, exempla hujus novæ doctrinæ, quæ in Harmonicis natura monſtra-*

vit

vit, probe perpendat. &c. Sciat, velim, etiam hac ex parte optioni ſuæ ſatisfactum iri. Neque me ab Harmonicis euſque abhorrere, quin quæ inde protulerit probe intellexerim, & quantum ſatis eſt perpenderim. Utut ego interim nihil ex Harmonicis productum video, quod vel profundæ admodum ſit ſpeculationis, vel ſenſis ſuis impenſe faveat.

Priuſquam autem novæ hujus doctrinæ medullam attingam, occurrit in limine, quod monet, præf. p. 6. de *Authorum locis* aliquot, quæ *Græce & Latine edenda cenſuit. Quantum,* inquit, *in vertendis illis & emaculandis* (utinam non & commaculandis aliquoties) *præſtiterim, illi demum cognoſcent, qui aliorum verſiones in ſpexerint. Nam &* (quod quidem verum eſt, nec vel ipſe hac ex parte excuſandus eſt) *doctiſſimi quidem viri, in his interdum hallucinati ſunt.*

Quam enim, inquit, *turpe eſt, quod Joſ. Scaliger, vir in Græcis & Latinis literis ſummus,* ὀρθογώνιον ὑπὸ Α Β, Β Γ, *interpretatus ſit, Clavium alioſq; , etiam doctos viros, ſequendo,* [Rectangulum ſub A B, B C,] *cum vertendum eſſet* [Rectangulum ab A B, B C,] *nempe* contentum, περιεχόμενον. Quod quidem, utut cenſuram forte aliquam mereri poſſit, (nam revera, τὸ ὑπὸ Α Β, Β Γ, vel ut brevius dici non raro ſolet, τὸ ὑπὸ Α Β Γ, latinius dicendum eſſet, *quod rectis* A B, B C, vel ſimpliciter, *quod ab A B C, continetur rectangulum;*) tamen nec adeo *turpe* eſt hoc Sphalma, (cum ſenſum haud omnino immutaverit,) nec etiam ab ipſo primo detectum. Id enim jam olim, ante annos plus triginta notaverat Honoratiſſimus D. *Henricus Savilius,* (a me non ſine honore nominandus,) in ſuis ad Euclidem prælectionibus.

Verùm id omnino turpius eſt, quod ab hoc authore ſæpiſſimè peccatur; dum nempe, (illud Scaligeri mendum vitare volens,) τὸ ὑπὸ, & τὸ ἀπὸ, (quæ apud Euclidem, reliquoſque, accuratiſſime diſtinguenda ſunt, quippe diverſi admodum ſignificatûs,) ille plane confundit; utramq; exponens per Latinorum *a,* vel *ab.* Exemplum eſto, pag. 48. l. 17. φημὶ δὴ, ὅτι ἄρα τὸ ἀπὸ Α Θ ἐπὶ τὴν Θ Η, πρὸς τὸ ἀπὸ Γ Θ ἐπὶ τὴν Θ Ζ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ Α Θ πρὸς τὸ ὑπὸ Β Θ Γ· τουτέστι, τὸ ὑπὸ Α Θ ἐπὶ τὴν Θ Η, πρὸς τὸ ὑπὸ Β Θ Γ, ἐπὶ τὴν Θ Η. Ubi ni accuratiſſime diſtinguantur τὸ ἀπὸ, & τὸ ὑπὸ, (quorum illud Quadratum innuit, hoc Rectangulum,) nihil inde ſenſus elici-

etur, ſed confundentur omnia. At horum ille utrumque per *a*, vel *ab* indiſcriminatim reddit; Et, niſi ex abundanti ſuppleviſſet voces *Quadratum* & *Rectangulum*, quæ in Græco textu non habentur, confudiſſet omnia. Sic enim reddit (neglecta plane præpoſitionum vi,) *Atq; hinc quoque dico*, quadratum *ab A H in H G*, ad quadratum *a C H in H F*, *majorem rationem habere*, *quam* quadratum *ab A H ad* rectangulum *a B H C*: hoc eſt, quadratum *ab A H in H G*, *ad* Rectangulum *a B H C in HG*: (Et ſic multoties tum illic, tum alibi paſſim.) At omnino potius eſſet (quod fecerunt quos ille culpat) ut ὑπὸ *ſub*, & ἀπὸ *ab*, reddatur, (utut minus Latine forſan, at magis diſtincte, quod quidem hic ſpectandum erat,) quam ut utrumq; per *ab* efferatur. Vel ſaltem, ſi (ut genuina vis præpoſitionis ὑπὸ retineatur) τὸ ὑπὸ Β Θ Γ, hoc eſt, τὸ ὑπὸ τῶν Β Θ, Β Γ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, reddatur *quod (rectis, vel) a rectis B H, H C, continetur Rectangulum*, (nam ὑπὸ, cum Genitivo conſtructum, agentem ut plurimum indicat, ſicut apud Latinos *ab.*) tum nullo modo commodum eſt, ut & ἀπὸ ſic reddatur; puta, τὸ ἀπὸ Α Θ, hoc eſt τὸ ἀπὸ τῆς Α Θ γραφόμενον τετράγωνον, reddatur *quod a recta A H deſcribitur quadratum*. At inquiet, Annon ἀπὸ ſignificat *ab?* Omnino, inquam, (ſicut & ὑπὸ ſignificat *ſub.*) At non, ſicut *quod rectis B H H C continetur rectangulum*, illæ rectæ continent; ſic *quod recta A H deſcribitur quadratum*, illa deſcribit recta; ſed potius Geometra *ad* illam rectam, vel *ſuper* eam. Vertendum igitur eſſet τὸ ἀπὸ Α Θ, *quod ad*, vel *ſuper*, A H *deſcribitur*, aut fit, quadratum: vel etiam per *ex*, ut τὸ ἀπὸ ξύλου (γενόμενον) Latine dicitur, *quod ex ligno fit*: vel denique, citra præpoſitionem, quadratum rectæ *A H*: Non autem, quod hic author ubique facit, quadratum *ab A H*, ob cauſam jam ſupra dictam. Atque hoc quidem ad ipſius Criticiſmum critice reponendum duxi.

At interim non nego quin hac ex parte laudandam nonnunquam præſtiterit operam. Sed & non raro, quæ vel maxime erant emendanda, ille minime animadvertit. Non raro etiam, quæ prius erant ſat recte conſtituta, reddidit depravata.

Ejuſmodi quidē ego ipſius παρόραμα reputo, quod, dum in rationis definitione, 3 d 5. Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις. magna diſquiſitione inquirit, quid ſit illud ἡ κατὰ πηλικότητα: (de pro poſt videbitur.) quid interim

illud

illud *ποιὰ σχέσις* ſignificet, neutiquam eſt ſolicitus. Sed (alios, fateor ſequutus) exponit *quædam relatio p.9. l.24.* vel, ad ſummum, *certa quædam relatio*, *p.10.l.* 27. Et alibi (ut & ſimilem Ariſtoxeni definitionem *pag.*83. *l.*20.) quaſi quidem *ποιὰ* tantundem ſignificet atque *τὶς quædam*, vel *certa quædam*. Cum certum ſit ex perpetuo iſtius vocis uſu, *ποιὸν*, qualitatem reſpicere: neque tam indefinite *aliquam*, quam *aliqualem*, ſeu potius *qualitativam* habitudinem hic innuat; quæ nempe prædicamenti Qualitatis ſpectet. Et quidem in accurate deficiente, nullo modo ferendum videtur, ut ratio definiatur indefinite *ratio quædam*, ſed determinandum erat; *quænam* relatio. Cum enim ut eſt notiſſimum varia ſint admodum relationum ſive habitudinum genera, determinandum erat (ſiquid definite proferre velit) quod genus relationis hic ſpectetur.

Nec quidem ſufficit, quod dixerit Euclides *ἡ κατὰ πηλικότητα* *ſecundum quantitatem*; nam vel *τῶν κατὰ πηλικότητα σχέσεων* ſunt etiam varia genera. Atque hoc quidem potuiſſet ille (ni maluiſſet depravare) ex ſcholiaſte didiciſſe, quem citat *pag.* 11. *l.* 25. *λέγεται δὲ καὶ ἄλλη σχέσις, κατὰ τὸ ἔχειν* (lege *ὑπερέχειν*) *καὶ ἐλλείπειν: Eſt autem & alia* (inquit) *quæ dicitur relatio, ſecundum exceſſum & defectum.* Nempe, præter eam, de qua illic agitur, relationem, quæ *Ratio* appellatur, eſt & alia inquit, Relatio ſive habitudo, quæ *Differentiam* ſpectat, ſive exceſſum & defectum: quæ & ipſa quidem eſt *ἡ κατὰ πηλικότητα σχέσις*, ſed nòn *ποιὰ σχέσις*: quippe illic ſolummodo exceſſûs, quantitas ſpectatur, non qualitas; ſive, *quanto* ſit hoc illo majus, non *quantuplo*. Dum autem hic Author, pro *ἄλλη* legendum vult *ἄλλως*, prorſus hallucinatur. Non enim (quod ille putat) de qua agitur relatio, quæ *Ratio* dici ſolet, eadem & alio nomine dicitur. *Relatio ſecundum exceſſum & defectum*; ſed plane alia. Eſtque hoc ſuorum *παραδιορθωμάτων* unum.

Sin quæratur, Ecquid hic Qualitatum ſit, in Ratione ſive Proportione? Notiſſimum certe eſt, ut figurarum magnitudinem ad Quantitatem ſpectare, ita & figurarum ſpeciem ad Prædicamentum Qualitatis, nempe ipſius (ut loquuntur) ſpeciem quartam. Conſtat autem Figuratio, ſive ſpecierum figuræ determinatio, duabus potiſſimum partium ad invicem habitudinibus; puta Ratione, & Inclinatione. Quarum itaque utraque eſt *ποιὰ σχέσις*, ut quæ Quantitatem, puta Figuram determi-

determinant. Illa quidem κατὰ πηλικότητα, hæc autem κατὰ τὸ κεῖσθαι· quippe ex comparatorum Quantitate dependet illa, hæc ex Situ. Atque hæc quidem ſi probe intellexiſſet hic Author, non tantum ſibi faceſſere negotium opus haberet, ut, quid ſit ἡ κατὰ πηλικότητα ποιὰ σχέσις, magno molimine exponat.

Alterum ejuſdem παραδιόρθωμα, (quo *pag.* 13. *l.* 2. & 9. pro ἀριθμοῖς perperam ſubſtituiſſet λόγοις,) cum ipſe in erratorum catalogo revocaverit, ego pro reſtituto habeo, adeoque prætereo.

Dum vero *pag.* 10. & 11. (& alibi paſſim.) pro *Quanto* ſubſtituit *Quotum*; & pro *Quantitate*, *Quotitatem*; id admodum abſurde factum videtur. Ecquis enim mortalium τὸ ποσὸν p. 10. *l.* 17. (quod in συνεχὲς & διῃρημένον mox eſt diſtribuendum) interpretatus eſſet *Quotum?* Et quis, quæſo, non plane mirabitur, dum hæc verba, (*lin.* 23.) πηλικότης τὸ πέρας ἐστὶ τοῦ συνεχοῦς ποσοῦ· καὶ ποσότης τοῦ διῃρημένου· exponi videat, *Quantitas eſt terminus continui quoti, & quotitas diſcreti?* Cui & ſimile mox occurrit, (*pag.* 11. *l.* 3.) *Differunt* τὸ πηλίκον *&* τὸ ποσόν. *quod* τὸ πηλίκον, *ad quotitatem continuam referatur,* τὸ ποσὸν *ad diſcretam.* Dic, o bone, quis unquam ita *continuum quotum*, dixerit, aut *quotitatem continuam?* Solemus quidem non raro *Quantitatem*, tum de continuo, tum de diſcreto dicere; de magnitudine, inquam, perinde atque de multitudine. At qui ita *Quotitatem* dixerit, tu certe primus es mortalium. *Quantus numerus*, interrogabit quilibet; at *quot magnitudo*, quærit nemo; ſed *quantum magnitudinis.*

At, inquit, ποσὸν *verti* quotum *potius quam* quantum, *ne cum* πηλίκον *id confunderem. Differunt enim mathematicis* τὸ πηλίκον *&* τὸ ποσὸν, *quod* τὸ πηλίκον, *ad quantitatem, ſeu potius quotitatem, continuam referatur;* τὸ ποσὸν, *ad diſcretam: quomodo & in hoc Scholio accipiuntur* πηλικότης *&* ποσότης; *adeoq; hoc ultimum novo vocabulo, neceſſitate adductus, verti* Quotitas.

Miror equidem, quam hæc parum criticè, a viro Critico, ſint prolata! De *quotitate continua*, modo dictum eſt. Si enim, quod ille vult, *quotitas* ad diſcretam tantummodo ſpectet quantitatem, qui poterit ille ſine abſurdo dicere *quotitatem Continuam?* Deinde, dum innuit, τὸ ποσὸν *ad diſcretam quantitatem referendum*, non item ad continuam; iterum hallucinatur.

Non

Non enim τὸ ποσὸν (*quantum*,) ſed τὰ πόσα (*quot*,) de quantitate diſcreta ſpeciatim dicitur. Ποσὸν autem, vel de quantitate in genere, prout vtrique ſpeciei (continuæ & diſcretæ) indifferenter ſe habet vel etiam ſpeciatim de continua dici ſolet. Et ποσότης in ſcholio (prout πηλικότητι opponitur, & ad diſcretam quantitatem reſtringitur) ſat quidem recte *quotitas* vertitur; non autem tam a ποσὸν, quam a πόσα, dici intelligendum eſt. Quod autem ille inter τὸ πηλίκον & τὸ ποσὸν diſcrimen aſſignat, omnino ſuum eſt, non Mathematicorum. Sunt enim vel plane idem, (quoties nempe τὸ ποσὸν de continuo ſpeciatim dicitur;) vel ſaltem τὸ ποσὸν tanquam genus tum de continuo tum diſcreto indifferenter dicitur; τὸ πηλίκον, ſpeciatim de continuo. Dum vero ſe ποσὸν, *quotum* vertiſſe dicit, ne cum πηλίκον id confunderet; admodum & hoc imprudenter factum eſt; vertiſſet ſiquidem ποσὸν *quantum*, & πηλίκον *quam magnum*, (ut genuina utriuſque vocis vis conſervaretur;) & πόσα denique *quam multa*. Quippe τοῦ ποσοῦ *quanti*, duæ ſunt ſpecies, πηλίκον *quam magnum*, & πόσα *quam multa*. Vel, ſi abſtractis potius uti placeat, *Quantitatis* duæ ſunt ſpecies *Magnitudo* & *Multitudo*. Sin metuat, nec hinc πηλικότης & μέγεθος confundantur; Dico, primo, non magnum illud eſſe incommodum, ſi (quod contendit hic author, *p.* 86 *l.* 9. & alibi) tantundem ſignificent. Deinde, ut accuratius reſpondeamus, dico vocem μέγεθος, nonnunquam ſenſu concreto ſignificare *rem magnam*, nonnunquam ſenſu abſtracto *rei magnitudinem*, ſeu grandoris menſuram; priori ſenſu, per *magnum* exponi poterit; poſteriori, plane idem eſſe atque πηλικότητα ſeu πηλίκον, *magnitudinem*, ſive *quam magnum*. Denique, ſin adhuc duabus vocibus Græcis, utut ſynonimis, duas Latinas aptare volet, poterit alteram, *magnitudinem* appellare; alteram, *grandorem*. Ut nullo modo opus ſit *quoti* aut *quotitatis* vocem, pro *quanto* aut *quantitate*, præter omne exſemplum, ſuſtituere, ubi vel de *quantitate* continua, vel etiam quantitate in genere, verba fiant. Ubi vero, quod non raro fit, τὸ ποσὸν, generis appellatio, attribuitur quantitati diſcretæ, (quo ſenſu *Equus* dicitur *animal*, aut etiam *ſentiens*, ferri quidem poteſt, ut *quoti* voce vertatur: Nec tamen interim neceſſario ſit; nam & *quantus numerus*, & *quanta multitudo*, ſine ſolœciſmo dici conſuevit; & forſan melius quam *quotus numerus*, *quota multitudo*;

B

titudo; quippe *quotus*, potius ad numeros (ut loquuntur) Ordinales quam Cardinales reſpicit; & quærenti *quotus*? reſpondendum potius *primus*, *ſecundus*, *tertius*, *&c.* quam *unus*, *duo*, *tres*, *&c.* Et quidem vel magnitudinum voces omnes, etiam Multitudini non raro attribuuntur; puta dum numerus aliùs alio *major* dicitur, aut *minor*; item *maximus*, & *minimus*; ſed & *magnus*, *parvus*, *&c.* ut nullo modo mirandum ſit, numerum dici, ποσὸν *quantum*; nec opus ſit ut *quotum* ſubſtituamus.

Ejuſdem commatis eſt, quod *pag.* 87. *l.* 9. Ἐπειδὴ τοῦ ποσοῦ, τὸ μὲν ἐστιν ἐν τοῖς συνεχέσι σώμασιν, ὃ δὴ μέγεθος καλεῖται, περὶ ὃ ἐστι μάλιστα ἡ γεωμετρία· τὸ δὲ ἐν διεστῶσιν, ὅπερ ἀριθμὸς καθέστηκε, περὶ ὃν ἡ ἀριθμητικὴ καταγίνεται exponit, *Quoniam Quoti aliud eſt in corporibus continuis, quod magnitudo vocatur, circa quam imprimis verſatur Geometria; aliud in diſcretis, quod Numerus exiſtit, circa quem Arithmetica occupatur.* Quaſi quidem *quotum* genus eſſet ad *quam magnum*, & *quam multa*. Neque hilo melior eſt, quam ſubjungit, correctio, *lin.* 17. *Rectius forte* τὸ ποσὸν *verteretur* Aliquotum, *quia* πόσον *eſt Quotum*. Imo, inquam, rectius verteretur *Aliquantum*, quia non *quotitas*, ſed *quantitas*, genus eſt ad magnitudinem & multitudinem.

Sed nimius eſſem ſi ipſius omnia vel παροράματα vel παραδιορθώματα, quæ paſſim admiſit, notare vellem. Utut enim Criticus admodum videre velit, aut etiam Hypercriticus, (aliiſque *ignorantiam* & *neglectam Græcæ literaturæ culturam*, quaſi ipſe ſolus intelligat, multoties exprobret;) quin quotius Παρακριτικὸς non raro habendus ſit, ego nullus dubito; nec, credo, dubitabunt alii, ſi vel cenſuras ejus critice expendant. Ego, omiſſis aliis, eorum unum aut alterum, quæ ad præſens ſpectent negotium, adhuc expendam.

Horum alterum, Archimedis *prop.* 8. *lib.* 2. de ſphæra & cylindro, ſpectat, cum Eutocii in illam commentariis, p 41. & ſeqq. Cum enim ſe alibi, in librariorum mendis expurgandis, diligentiſſimum oſtendit; & laudandam aliquando operam impendit: hic, vel data opera, negligens videtur. Nam p. 41. *l.* 27 pro διπλάσιον (quod librariorum incuria irrepſerat) reſtituendum erat διπλασίονα. Quod quidem liberarii mendum eſſe, vel hinc patet, quod in hujus propoſitionis, cum ἐκθέσει p. 42. *l.* 4. tum συμπεράσματι p. 45. *l.* 16. (ubi ipſa propoſitionis verba erant recitanda,) legitur διπλασίονα, non διπλάσιον. quod indicio eſt, ita in ipſa propoſitione lectum

ctum fuiſſe. Sed & ſic legitur ſæpius in demonſtrationis curriculo, *p.* 44. *l.* 6, 9, 11. & in commentariis Eutocii, *p.* 49 *l.* 29. & *p.* 55. *l.* 22 & *p* 60. *l.* 18. 29. & *p.* 62. *l.* 15. 23. & τετραπλασίονα *p* 55. *l.* 19. Similiter *p* 43. *l.* 9. ubi item mendoſe legitur διπλάσιον. reſtituendum erat διπλασίονα. Quod quin librarii mendum ſit, minime dubitandum eſt; quoniam ubi hic ipſe textus ab Eutocio recitatur *p.* 49. *l.* 29. recte legitur διπλασίονα. Atque eadem etiam adhibenda erat correctio, *p.* 43. *l.* 3. & *p.* 45. *l.* 29. & *p.* 60. *l.* 13. Similiter ubi in editione Baſileenſi mendoſe legeretur λόγος διπλάσιον, ille non minus mendoſe ſubſtituit, λόγος διπλάσιος, *p.* 55. *l.* 6. cum omnino ſuſtituendum eſſet λόγος διπλασίων, quod quidem vel ex *l.* 9. ſatis eſt manifeſtum ubi διπλασίων legitur, ut & *p.* 64 *l.* 4. Eodem modo ubi alibi in eadem editione Baſileenſi, corrupte legitur διπλάσιον, ſubſtituit ille διπλασίω, *p.* 47. *l.* 14. cum potius ſuſtituendũ eſſet διπλασίονος. Sed & alibi pro διπλάσιος, ſubſtituendũ διπλασίων. *p.* 60. *l.* 32. & *p.* 92. *l.* 11. & *p.* 63. *l.* 7. Et pro τριπλάσιος, τριπλασίων, *p.* 63. *l.* 10. & *p* 64. *l.* 9 & pro διπλάσια, διπλασίονα, *p.* 54. *l.* 15. Quanquam enim, huic quidẽ authori, perinde forſan ſint λόγος διπλάσιος & λόγος διπλασίων· non tamen veteribus Geometris perinde ſonant: quod ſive ille neget, ſive ignoret, probe nôrunt alii.

Parem emendationem deſidero, Scholii *pag.* 30. Nempe *l.* 32. pro διπλάσιος; ſubſtituendum διπλασίων· & *pag.* 31. *l.* 35. pro τριπλάσιον, τριπλάσιονα· & contra *l.* 16. pro τριπλασίονα, ſubſtituendum τριπλάσιον. Sed & ibidem ὁ λόγος ὁ ἐκ τῶν δύο, expoſuiſſet potius *rationem ex binis compoſitam*, quam *rationis ex binis conſtantem.* Adeoque ſenſus, qui jam plane turbidus eſt, perſpicuus eſſet; Οὐ λέγει, ὅτι δύο λόγοι τοῦ ἑνὸς διπλάσιοι εἰσί· καὶ τοῦτο μὲν γάρ. ἀλλ' ὅτι ὁ λόγος, ὁ ἐκ τῶν δύο, διπλασίων ἐστίν. Hoc eſt, *Non dicit* Euclides (10 d 5) *duas rationes unius eſſe duplas*, (puta $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 2 = \frac{2}{2}$,) *quod etiam verum: ſed rationem, ex binis compoſitam eſſe duplicatam*; puta $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ eſſe duplicatam rationis $\frac{1}{2}$. quo quid eſſe poteſt magis perſpicuum? Hoc autem, dum ille ſic exponit, *Non dicit, duas rationes unius eſſe duplas; quod etiam verum: ſed rationem ex binis conſtantem eſſe duplam*; ecquis inde ſenſum ullum commmodum eliciet? (quam frigide autem hoc interpretetur Meibomius *pag.* 171. *l.* 10. qui volet, videat.) Sed & ſequente *pag.* *l.* 35. pro τρι-

τριπλάσιον, legendum τριπλασίονα, & contra *l.* 15. pro τριπλασίονα, legendum τριπλάσιον.

Supereſt adhuc aliud, quod & omnium turpiſſimum eſt, παραδιόρθωμα· quo perpetuo peccat; & quidem data opera: Nempe, cum apud Euclidem, reliquoſque, λόγος διπλάσιος, τριπλάσιος, τετραπλάσιος, &c. atque λόγος διπλασίων, τριπλασίων, τετραπλασίων, &c. immane quantum diſcrepent; Ille hæc ubique, vertendo, confundit; nec aliter hæc quam illa exponit. Neq; ſolum ipſe negligit, ſed nec ab aliis obſervari diſcrimen patietur. Adeoque cum interpretes Latinos videat, *Campanum*, *Clavium*, &c (quo diſcrepantiam illam utcumque retineant) illic rationem *duplam*, *triplam*, &c. dixiſſe; hic *duplicatam*, *triplicatam*, *quadruplicatam*, &c. *quam deinde* (ut ait pag. 173.) *loquendi formulam omnes Mathematici uſurparunt*: exclamat ille, (quaſi horrendum aliquod facinus accidiſſet,) *O ſtupendam Græcæ Linguæ ignorantiam!* (quod nempe neſciverint homines τὸ ἀπὸ; & τὸ ὑπὸ, iiſdem vocibus Latinis efferre: neq; λόγον διπλάσιον, & λόγον διπλασίονα confundere:) *atq; erroris fæditatem!* (quod nempe malint diſtinctius loqui:) *qua non vulgus Mathematicorum, ſed Duces atque Principes inclaruerunt!* Nempe non modo Interpretes Latini, ſed & ipſi Græci, Euclides, Theon, Eutocius, &c. quibus diverſa ſonant διπλάσιος & διπλασίων· quippe neſciebant pariter, tum hi, Græce loqui; tum illi, intelligere: utpote ab *Euthymio*, *Hermotimo*ſque, (quæ ſibi fecit nomina *Meibomius*) nondum edocti.

Dicet fortaſſe; διπλάσιος & διπλασίων, ſi Etymon ſpectemus, perinde ſignificare; nec eſſe cur hæc vox magis quam illa reddatur *duplicatus*. Fortaſſe quidem. Sed nec, inquam, ſi derivationem ſpectemus, differre videbuntur *duplus* & *duplicatus*, (atque alibi forſan, extra hunc caſum, promiſcue uſurpantur,) at ſaltem uſu differunt, tum λόγος διπλάσιος & διπλασίων, tum *ratio dupla* & *duplicata*.

Dicet porro, Lexicographos, & nominatim Stephanum, pro Synonymis habere. Nec mirum, inquam, Lexicographos, (utut viros doctos, & Græcæ Linguæ peritos, ſi non & peritos mathematicos,) haud ſemper Lynceos eſſe in vocabulis Mathematicis interpretandis: (præſertim dum quid ex uſu Mathematicis peculiari, magis quam ex vocis Etymo, dependeat:) Neq; enim tam a Lexicographorum interpretationibus, quam a Mathematicorum

thematicorum definitionibus, petendæ ſunt ejuſmodi vocum interpretationes. Et quidem, iiſdem Lexicographis, ἐπιμόριος & ἐπιμερὴς tantundem ſignificant: Nec tamen interim volet, credo, Meibomius, ut λόγος ἐπιμόριος, & λόγος ἐπιμερὴς, apud Mathematicos, promiſcue uſurpentur.

Miſſis autem his criticiſmis, (qui ad Grammaticam magis pertineant, quam Geometriam,) ipſius de Rationibus & Proportionibus novam doctrinam perpendamus.

Ratio, inquit, *quæ Græcis* λόγος *dicitur, ſecundum quam hoc ad illud rationem habere adfirmamus*, *Duorum ejuſdem generis terminorum inter ſe certa relatio*, *definitur.* pag. 9. At, inquam, mutila eſt hæc definitio? Annon enim Pater & Filius, ſunt *termini ejuſdem generis?* Annon eorum inter ſe relatio, puta Paternitas & Filiatio, eſt *certa relatio?* At ea certe *Ratio* non eſt, de qua jam agitur. Claudicat itaque hæc definitio. Sed vel *Magnitudinum* ad invicem *relatio*, aut etiam *certa relatio*, non omnis, eſt *Ratio*: nam λέγεται καὶ ἄλλη σχέσις, κατὰ τὸ ὑπερέχειν καὶ ἐλλείπειν, ut ex Scholiaſte modo audivimus; quæ & ipſa non minus eſt *certa relatio*, quam quæ *Ratio* dicitur.

Deinde, Rationem deſtribuens, pag. 13. &c. aliam vult eſſe *Rationem Æqualem*; aliam *Inæqualem*; & quidem vel *Majorem*, vel *Minorem*. Cum dixiſſet potius, *Rationem æqualitatis*, *inæqualitatis*, *majoritatis*, *minoritatis*; vel etiam *Rationem æqualium*, *inæqualium*, *majoris*, *minoris*. Nempe hoc vellet, loquitur tamen minus accurate. Quippe Rationum nulla non eſt tum æqualis, tum inæqualis, & quidem tum major, tum minor, prout illa cum aliis aliiſque comparatur. Puta ratio 3 ad 2, æqualis eſt rationi 6 ad 4, major autem ratione 6 ad 5, minor tamen quam 6 ad 3. Rationem autem *majorem* (intellige, rationem majoritatis,) ſubdividit in *multiplicem*, *ſuperparticularem*; (ſuperpertientem, ſive, ut ille loqui malit,) *ſuperpertem*, *multiplicem-ſuperparticularem*, (multiplicem ſuperpartientem, ſive) *multiplicem-ſuperpertem*; recepto more. Et rationem *minorem* (ſeu potius, minoritatis) ſimiliter in *ſubmultiplicem*, *ſubſuperparticularem &c.* eodem modo quo alii. Quibus dum ille *certiora tradi poſſe* inſinuat; metuo ne quæ ille pro certioribus habet, pro magis incertis ſint habenda quod ſuo forſan loco, cum ipſa protulerit, videbitur.

Dum autem huic diſtributioni hoc ſubjungit (p. 15.) *Porro &*

hoc monendum, numeri ad numerum rationē dici, quando major ad minorem in nulla fuerit prædictarum rationum: cujus rationis eſt limma in Harmonicis, contentum his minimis numeris, 256 ad 243. Omnino ſomniâſſe videtur. Nam neq; id verum eſt; nec quam adfert inſtantia hujuſmodi quicquam ſuadet. Eſt enim ratio 256 ad 243, ſuperpartiens 13. nempe ſupertredecupartiens ducenteſimas quadrageſimas tertias: ut dividendo patet. Nempe 243) 256 (1 $\frac{13}{243}$. Verum quidem eſt; in quantitatibus *Irrationalibus* (& loquuntur) Rationes eſſe innumeras quæ ad hæc genera non reducuntur. At in numeris, (ſive integris, ſive etiam fractis,) qui quidem ſunt rationales inter ſe omnes, nulla eſt quæ ad illorum generum aliquod non reducatur.

Sed, his miſſis, ad ea quæ ſibi potiſſimum tradenda ſuſcepit properabimus. Sunt autem ea ſaltem hæc quatuor. 1. Eutocium, cæteroſque, non intellexiſſe quid ſit πηλικότης: & *rationum* πηλικότητας male per diviſionum quotientes æſtimaſſe. Adeoque quid ſit *rationum compoſitio* parum intellexiſſe. 2. Non aliam eſſe rationis *duplationem, triplationem*, &c. quam quæ definitur *duplicatio, triplicatio*, &c. 10 d 5. Adeoque perperam locutum Theonem, alioſque, qui *ſextuplum* eſſe volunt *tripli duplum*. Et non niſi ob ſtupendam Græcæ Linguæ ignorantiam, alio ſenſu uſurpari rationem *duplicatam, triplicatam*, &c. atque *duplam, triplam*, &c. quo nempe διπλασίων, τριπλασίων, &c. & διπλάσιος, τριπλάσιος, &c. diſtinguantur. 3. Non eam ſemper rationem majorem dicendam eſſe, quæ majorem quantitatem innuit, (puta $\frac{1}{2}$ quam $\frac{1}{4}$,) ſed eam quæ ab æqualitate magis recedit, ſeu cujus termini magis inter ſe diſtant, (puta rationem $\frac{1}{4}$ majorem eſſe quam $\frac{1}{2}$,) & propterea, quæ æqualiter ab æqualitate recedunt (puta $\frac{1}{2}$ & $\frac{2}{1}$) invicem æquales eſſe. 4. Et propterea, dum Euclides, reliquique ad unum omnes Geometræ, rationem, verbi gratia, $\frac{1}{4}$ minorem habent quam $\frac{1}{2}$, tum Euclidis aliorumque nonnullas, tum Gregorii a Sancto Vincentio, *plus centum & triginta propoſitiones* hoc nomine *falſas* eſſe clamitat.

His ut viam ſternat, continuis 55 paginis (nempe a pag. 16, ad p 70. incluſive) Ex Eutocio, Euclide, Archimede &c. loca quædam Græce & Latine recitat, quæ ſecuturæ tractationi materiam adminiſtrent.

Tum pag. 70. 71. rationem $\frac{81}{80}$, *quam*, inquit, *Commatis rationem*

tionem recentiores faciunt, ille centies & duodecies componit; hoc eſt, $\frac{11}{10}$ toties poſitam continue multiplicat; ſive, quod tantundem eſt, radicis $\frac{11}{10}$, tot continue ſequentes poteſtates inveſtigat. Cui bono, ipſe viderit.

Deinde, totis continuis quatuor paginis, docet, in Minutiis, $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}=\frac{9}{12}+\frac{8}{12}=\frac{17}{12}=1\frac{5}{12}$. (quod quis neſcit?) Item $\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+\frac{13}{12}=\frac{3}{12}+\frac{8}{12}+\frac{13}{12}=\frac{24}{12}=2$. Sed & $\frac{9}{12}-\frac{8}{12}=\frac{1}{12}$. Et $\frac{4}{3}+\frac{3}{2}=\frac{8}{6}+\frac{9}{6}=\frac{17}{6}=2\frac{5}{6}$. Quæ ſiquis antea neſciverit, ab Euthymio, per me licet, diſcat.

Verum (inquit p. 66.) *ſi Rationum magnitudo ſit exploranda, illa major eſt, cujus termini longius inter ſe diſtant.* Pulchra quidem definitio! atque Euthymio digna!

At interim longe aliud eſt ſua *major ratio*, quam Euclidis & cæterorum omnium. Quippe illi, per *rationem majorem*, eam intelligunt, *quæ expoſitæ quantitatis plus indicat*. (prout ex perpetuo iſtius appellationis uſu, ſatis abunde conſtat.) Adeoque triplum duplo majus eſſe volunt, non quod 3, 1, magis diſtant quam 2, 1; (quanquam & illud verum ſit;) ſed quia 3A plus indicat quam 2A. Et pari de cauſa ſemiſſem quadrante majorem eſſe volunt, (hoc eſt, ſubduplum ſubquadruplo,) non quod 1, 2, plus diſtent, quam 1, 4, (quod falſum eſt,) ſed quia $\frac{1}{2}$A plus deſignat quam $\frac{1}{4}$A. Et quidem, ſicut integrum eſt ſemiſſis duplum, ſic & ſemis eſt duplum quadrantis; quod quidem (ante Meibomium) omnes ſani ſenſerunt.

Ideoque Meibomius vel perperam novâ ſua definitione explicat quod illi *Majoris rationis* nomine voluere, quippe definitio definito non congruet; vel, ſi ipſe iiſdem vocibus aliud quid intellectum velit quam quod illi innuebant, non loquitur ad idem; adeoque abſurde admodum eorum propoſitiones falſitatis incuſat, quod novæ ſuæ nomenclaturæ non conveniant, (de qua nemo ſobrius antehac cogitaverit,) ſi interim veræ ſint (quod vel ipſe nulla fronte negabit) eo ſenſu quo tum ipſos loquutos eſſe conſtat, tum ſani omnes illos intelligebant. Loquebantur ſiquidem eo ſenſu quem voces illæ tunc temporis obtinebant, & quidem per omnia retro ſeculo hucuſque obtinuerunt, nec alio ſenſu intelligebantur, aut etiamnum a ſobriis intelliguntur: quo ſenſu ſi vera ſint quæ protulerunt, falſitatis

minime

minime ſunt accuſanda; quis enim illud juſte poſtulet, ut Euclides, ante bis mille forſan annos, conjiciat, quo novo ſenſu has voces uſurpaturus eſſet Meibomius, eique ſua dicta accommodet.

Quo autem ſenſu loquutus ſit Euclides, (reliquique,) nequis dubitet; illud 7ª definitione Vⁱ, (quam ipſe refert Meibomius p. 30. l. 4.) determinatur. Ea ſiquidem definitio, utut aliis verbis, eodem tamen quoad rem ſenſu quo nos jam diximus, quæ ratio ſit apud illos habenda major, oſtendit.

Quod autem ille pag. 126. l. 11. *falſam eſſe* contendat illam libri quinti definitionem *ſeptimam*; omnino ridiculum eſt. Definitionibus enim ſuis Mathematici hoc tantum volunt, ut ſciat Lector quo ſenſu hæc aut illa nomina apud ſe intelligenda velint. Definitionem itaque illam falſam dicere, perinde eſt atque dicere, Euclidem nolle ut eo ſenſu vox illa intelligatur, quo intelligendam ſe velle dicit. Quod ne quidem *Meibomius* dicere ſuſtinebit. Sed neque dicere poteſt, verbis ita intellectis, ut ea intelligenda ſe velle dicit Euclides, Propoſitiones ſequentes falſas eſſe. Hoc tantum ait; *majoris rationis* appellatione ſe quidem aliud quid intelligere quam quod intellexerat Euclides, (aut etiam alius quiſpiam ſive Veterum ſive Recentiorum,) qui nec Euclidis definitioni, nec propoſitionibus huic definitioni conſentaneis congruit; & propterea cum Euclidis definitio & propoſitiones utut inter ſe ſatis conſentaneæ, ipſique (eo ſenſu) veritati, non tamen conſentiant novæ Meibomii nomenclaturæ (de qua quidem illi ne per ſomnium cogitarunt, aut cogitaſſe debuerunt,) falſæ omnino (per logicam Meibomii) ſunt dicendæ. Nempe ſicut (quantum ad rationes minoris, ut loquuntur, inæqualitatis) per *rationem majorem* id ille intelligit, quod alii per *minorem*; ſic & fortaſſis per *propoſitionem falſam*, id ipſe intelligit, quod per *veram* alii.

Sed exſempla videamus quibus hanc ſuam doctrinam exponit. *Quomodo* (inquit, *p. 76. l. 3.*) *ratio* $\frac{3}{2}$ *major eſt ratione* $\frac{4}{3}$; (Recte.) *quia nempe inter 9 & 6 majus eſt ſpatium, nempe ternarii; quam inter 8 & 6, nimirum binarii*, Non, inquam, ideo. Sed potius quia illic antecedens ſuperat conſequentem majore ſui parte, puta ſemiſſe; hic autem minore, nempe triente. Saltem

ſi per Meibomium liceat, Semiſſem majorem dicere quam Trientem.) Non enim exceſſus ternarii, determinat rationem 9 ad 6; aut binarii, rationem 8 & 6, (Nam in 10 ad 5, & 11 ad 9, comparatis, id ipſum cernitur;) ſed ille exceſſus ſemiſſis; hic, trientis. Porro, 8 & 6, longius invicem abſint, quam 2 & 1; at non item ratio $\frac{8}{6}$ major eſt ratione $\frac{2}{1}$.

Dicit; intelligendum illud de rationibus tantum ad communem conſequentem reductis: vel ſaltem ad communem antecedentem. Puta $\frac{8}{6}$ & $\frac{12}{6}$. Vel $\frac{8}{6}$ & $\frac{8}{4}$, non autem $\frac{8}{6}$ & $\frac{2}{1}$. Eſto.

At, inquam, 1° Cur non igitur hujus conditionis facta eſt mentio in definitione? Nempe nihil illic dictum de communi vel antecedente vel conſequente. 2°. Etiam ante illam reductionem, non minus ſunt illæ rationes, æquales aut inæquales, quam ubi ad eundem terminum conſequentem reducuntur. 3°. Fieri etiam omnino poteſt ad communem nunc vel conſequentem vel antecedentem minime reduci poſſint rationes comparandæ; puta, quando termini rationis unius ad rationis alterius terminos ſunt heterogenei. Verbi gratia; ſi ratio ponderis ad pondus, comparetur ad rationem lineæ ad lineam: poſſunt quidem rationes illæ,(ne refragante, credo, Meibomio,) vel æquales eſſe, vel inæquales; & quidem vel hæc vel illa major: quî autem poſſint ad eundem conſequentem reduci, nondum oſtendit doctiſſimus vir: neque facile eſt oſtenſurus. Si enim volet vel alterius vel utriuſque terminos commutandos in alios alius generis; exempli gratia ut ratio ponderis ad pondus, puta quadripondii ad bipondium, numeris exprimatur, ut 4 ad 2; & ratio item lineæ ad lineam, puta tripedalis ad bipedalem, ut 3 ad 2, atque has demum rationes comparandas, ut conſtet utra major: Hoc, inquam, eſt petere principium; nam etiamnum interrogabitur, quo criterio juxta hanc doctrinam innoteſcet rationem 4 ad 2 eandem eſſe vel æqualem rationi quadripondii ad bipondium, an majorem, minoremve. Nam, propter numeros & pondera invicem heterogenea, comparatio ad eundem terminum conſequentem non poterit inſtitui, quod ſolum eſt (juxta Meibomii definitionem) rationis æqualis, majoris, minorisve criterium. 4°. Sunt, credo, Semiſſis, Triens, Quadrans, &c. Sive ſubduplum, ſubtriplum, ſubquadruplum, &c. non minus

Rationum nomina quam duplum, triplum, quadruplum, &c. Semiſſem vero Quadrante majorem eſſe, nemo ſobrius negare debet, quippe qui duobus quadrantibus æquatur; *Omnes autem homines totum quovis ſua parte majus eſſe, communi ratione percipiunt*, (vel Meibomio judice *pag.* 141. *l* 15.) adeoque ſemiſſem Quadrante, utpote ſui parte. At vero, per hanc Meibomii definitionem, ſubquadruplum $\frac{1}{4}$, ſubduplo $\frac{1}{2}$ vel $\frac{2}{4}$, (hoc eſt, quadrans ſemiſſe,) majus eſſet, cum 1 & 4 plus diſtent quam 1 & 2, vel 2 & 4. Quod quidem utut Meibomio haud abſurdum videatur; vix tamen alii, credo, dictu commodum judicabunt. Sed progrediamur.

Differentia autem, inquit, *illarum* ($\frac{2}{6}$, $\frac{1}{6}$.) *eſt ratio* $\frac{2}{1}$ *quæ in utriuſque rationis antecedentibus ſpectatur.* Nempe quia $\frac{1}{6}$) $\frac{2}{6}$ ($\frac{2}{1}$, quod ſano ſenſu admitti poteſt: ſcilicet, ſi de Differentia diviſionali, ſeu Quoto, intelligatur. At interim non minus ſane, alio ſenſu, dicetur differentiam eſſe $\frac{1}{6}$ quia nempe $\frac{2}{6}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$. Sin de hoc dubitet; velim ut exponat mihi hos Horatii verſiculos. *de Art. Poet.*

Romani pueri longis rationibus aſſem
Diſcunt in partes centum diducere. dicat
Filius Albani, Si de quincunce remota eſt
Uncia, quid ſuperat? poteras dixiſſe, triens: Eu,
Rem poteris ſervare tuam. redit uncia: quid fit?
Semis. ——————————

Quod, ſiquid ego intelligo, hoc eſt $\frac{5}{12}-\frac{1}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$. Et $\frac{5}{12}+\frac{1}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$ At *Semiſſem, Trientem, Unciam, Quincuncem &c.* non magis negabit, credo, Rationum eſſe nomina, quam *Duplum, Triplum, Duodecuplum,* Duplum *ſuperbipartiens quintas &c.* nempe illorum correlata.

Eadem *pag.* 76. *l. penult. Menſura rationibus applicanda, nonniſi ratio eſſe poteſt,* (Recte.) *Uti enim longitudines menſuramus longitudinibus, ſuperficies, ſuperficiebus; corpora, corporibus, &c.* (Recte. Sed & Rationibus.) Puta, linea tripedalis pedalem ſuperat, linea quidem bipedali, ſed in ratione tripla. *Sic rationes rationibus.* Omnino. Puta ratio ſextupla $\frac{6}{1}$, ſuperat triplam $\frac{3}{1}$, ratione tripla $\frac{3}{1}$, (quia $\frac{6}{1}-\frac{3}{1}=\frac{3}{1}$;) ſed in ratione dupla; quia $\frac{3}{1}$) $\frac{6}{1}$ (2. Eodem plane modo quo linea ſex pedum 6P, ſuperat lineam trium pedum, 3P, lineâ trium pedum 3P, ſed quia

6P

6P − 3P = 3P;) ſed in ratione dupla, quia nempe 3P) 6P (2 vel $\frac{2}{1}$.

Similiter, quod *pag.* 77. 78. colligit. *Dicitur, rationem* $\frac{9}{8}$, *in qua tonus major ſpectatur, minorem eſſe decem commatis; majorem commatis novem*: ſuo ſenſu verum eſt, (ſumpta commatis quantitate $\frac{81}{80}$;) quia nempe novem commata, hoc eſt ratio $\frac{81}{80}$ novies compoſita, (multiplicando;) ſive radicis $\frac{81}{80}$ poteſtas nona, (λόγος ἐννεαπλασίων,) $\frac{150094}{134217}$, minor eſt quam $\frac{9}{8}$; at ejuſdem poteſtas decima, $\frac{121577}{107374}$ major quam $\frac{9}{8}$. Sive in continua progreſſione Geometrica, $\frac{81}{80} \cdot \frac{81}{80} \times \frac{81}{80}$. &c ∴ terminus nonus ($\frac{150094}{134217}$) minor eſt quam $\frac{9}{8}$, decimus autem ($\frac{121577}{107374}$) major. Si quid autem aliud hic velit Meibomius; fruſtra eſt.

His præmiſſis (inquit *pag* 78.) *ad Rationum compoſitionem accedimus*. Et longa diſquiſitione, per multas deinceps paginas, inquirit, quid πηλικότητος voce intelligendum ſit. Et quidem *quid πηλικότης eſſet, ex interpretibus nullum percepiſſe*, contendit *p.* 87. *l.* 20. (*Nimirum ex Græcæ literaturæ, in Græcis diſciplinis cognoſcendis, neglecta cultura, quid non ubique*, inquit, *errorum eſt enatum?* *p.* 89. *l.* 5.) Imo ne quidem *Eutocium & Theonem*, (utut Græci fuerint) *p.* 89. *l.* 12. Imo, inquit *p.* 169. *l.* 24. *perſpicuum eſt, non tantum ignoraſſe illos authores, quid ſit rationum compoſitio; ſed &, quid ſit ratio.*

Adeoque multis oſtendit, *p.* 79, 80, 81, 82, 83. πηλίκον & πηλικότης de quantitate continua, ſive magnitudine dici, (quod nemo neſcit.) ποσὸν autem & ποσότης, de multitudine, ſive quantitate diſcreta.

Dicimus nos, verum quidem eſſe, quod ſoleant πηλίκον & πηλικότης, proprie & prima ſignificatione, reſpicere quantitatem continuam, & quidem localiter extenſam; puta quoad longitudinem, latitudinem, profunditatem; quæ eſt proprie dicta magnitudo. Vel ſaltem, id quod ad inſtar magnitudinis conſideratur, utut revera (proprie loquendo) magnitudo non ſit; ubi nempe quæritur *Quantum*; non *Quot*. Quo enim ſenſu, non modo proprie dicta *magnitudo*, hoc eſt, quantitas localiter extenſa, ſed & *tempus, pondus*. & ipſe *numerus &c* dici ſolent *magnum, parvum, majus, minus, &c* Eodem etiam de horum quolibet, πηλίκον, *quantum* ſeu *quam magnum*, dici poterit. Sed & ſimiliter haud inconcinne dicitur *quanta eruditio, quantus calor, quanta ætate,*

ætate, quanto honore, quanta authoritate vir, quanta multitudo &c. nihilominus quàm *eruditio magna, parva, major, maxima &c.* item *multitudo magna, magnus numerus, &c.* Sed & *Ratio major, minor,* adeoque & *quanta ratio.* Et quidem univerſim, quicquid tanquam menſuræ capax proponitur, de illo haud incommode interrogamus non modo πόσον, *quantum ſit*, ſed & πηλίκον, *quam magnum.* Quod confirmabunt, ſiquis dubitet, tum authores Græci paſſim, tum Lexicographi; in vocibus ἡλίκος, πηλίκος, πηλίκος, τηλικοῦτος &c. Sed nec ipſe, credo, refragabitur Meibomius, quippe qui de φθόγγοις, ſonis, πηλικότητα *ſignificanter admodum dici*, affirmat p. 83 l. 16, 20. Ubi autem non menſuranda, ſed numeranda proponuntur aliqua; non quidem πηλίκον, *quam magnum* quærimus; neque πόσον, *quantum*; ſed πόσα, *quot.*

Et quidem numerus utrovis modo conſiderari poteſt. Ubi enim, verbi gratia dicitur, *Numerum ternarium, majorem eſſe binario*; atque *Tria, plura eſſe quam Duo*; tantundem utrobique, quoad rem, dicitur: At illic, conſideratur utervis numerus ut Unum quid; & dicitur, Quantum illud; ad inſtar quantitatis continuæ: Hic vero, ut plura; & dicitur Quot ſunt; ad inſtar Quantitatis diſcretæ.

Quod autem ille, ποσὸν ad quantitatem diſcretam, ſeu numerum reſtringere velit; quod facere videtur, *pag.* 11. *l.* 5. *pag.* 83 *l.* 2. *pag.* 8[illegible] *l.* 23 item *p.* 86 *l.* 27. & *p.* 87. *l.* 4. & alibi: Admodum inepte factum eſt, cum certum ſit, ποσὸν, non minus de continuo dici. Teſtor enim quos ipſe citat authores paſſim. Imo ſeipſum teſtor, qui *p.* 87. *l.* 5. id ipſum diſertis verbis fatetur, Nempe, *generale eſſe vocabulum* τὸ ποσὸν, *quod & magnitudinem, & multitudinem comprehendat.* Cur igitur, ejuſdem paginæ *l.* 4. & præcedentis lin. penult. contendat τὸ ποσὸν dici *non poſſe ubi ratio eſt ineffabilis, ſeu numero inexplicabilis*; Item, *Quantum non niſi cum rationis magnitudines ſunt commenſurabiles*; ego ſane non intelligo; præſertim cum proximis verbis *lin.* 5 agnoſcat, τὸ ποσὸν utrique quantitati commune eſſe; & *lin.* 12. τοῦ ποσοῦ, *Quantitatis alium eſſe in interpretibus communis, quod magnitudo vocatur,* ——— *alium in diſcretis.* Quicquid enim de *Quoto* ſit, (quæ ſua vox eſt,) certe ποσὸν, *quantum*, de quantitate continua dici, perinde atque diſcreta, nemo ſobrius negabit. Et ipſe quidem omnium minime negare debet, qui *continui quoti* & *quantitatis continuæ*, (pro *continua quantitate*,) ſat ſæpe meminit; & quidem primus.

Sed, ne difficiles ſimus; Ego quidem concedo, quod ille (ni fallor) hic contendit, (quod ſaltem contendere debet) nempe, πηλίκον, & πηλικότητα, vel de quantitate continua dici, vel ſaltem de eo quod ad inſtar continuæ quantitatis conſideratur: ſcilicet, ubi quid conſideratur ut *Quantum*, non ut *Quot*. (Sed & μέγεθος eadem, credo, latitudine ſumendũ erit: Nam quæ de magnitudinibus hic habet Euclides Propoſitiones, non ſolis proprie dictis magnitudinibus, ſed etiam aliis non raro *Quantis* applicantur.) At quid porro?

Jam, inquit pag. 83. *videamus quomodo in rationis definitione hoc vocabuli locum habet*. nempe λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις.

Quod nobis hac in re videatur, ſuperius dictum eſt: nempe eam hic innui habitudinem qualitativam, quæ ſit ex quantitate oriunda; ſive quæ magnitudinibus competit non tam ſecundum quod *multa* ſunt, vel etiam ſimpliciter *magna* &c. quam ſecundum quod *Quanta*, ſive *Quam magna*, ſint. Videamus quid alii.

Scholiaſtes (inquit p. 84.) hac voce, *infinitas magnitudines excluſas eſſe*, putat. Fortaſſe quidem. Neque male. Nam πηλίκον, *quam magnum*, non ſimpliciter *magnum* dicit, ſed magni *determinatam magnitudinem*, ſive *magnitudinis menſuram*; quippe de infinitis non dici poteſt πηλίκα, quam magna ſint: adeoque nec illis attribuenda σχέσις, ἡ κατὰ πηλικότητα, quæ ipſis ſecundum πηλικότητα conveniat. (Scholiaſtis verba habentur pag. 10. l 21. τὸ δὲ, κατὰ πηλικότητα, inquit, in Rationis definitione additur, ἵνα χωρίσῃ τῶν ἀπείρων μεγεθῶν) quem autem hic exercet Meibomius, criticiſmus, p 84. l. 27. *in eo graviter peccaſſe Scholiaſten, quod has voces, κατὰ πηλικότητα, cum magnitudinum notione conjungendas putat, cum Euclides ipſe relationis notioni illas adjunxerat; quod articulus ἡ in Græca Editione indicat*: mihi quidem nullius momenti videtur. Neq enim Scholiaſtes ita ſeparat, quin articulus ἡ reſpiciat vocem σχέσις: (nempe ea relatio quæ eſt ſecundum quantitatem;) neque Euclides ita conjungit cum notione relationis, quin vox πηλικότητα magnitudines reſpiciat Non enim intelligendum eſt, ἡ κατὰ τὸ σχέσεως πηλικότητα, quod videtur velle Meibomius. (quaſi dixiſſet Euclides, *Magnitudinum relatio ea quæ relationis quantitatem ſpectat.*) ecquis enim hic ſenſus eſſet? ſed ἡ κατὰ τῶν αὐτῶν μεγεθῶν πηλικότητα; nempe, *ea magnitudinum*

num inter ſe relatio, quæ ipſarum (non, *ipſius*,) *quantitatem ſpectat*. Et propterea etiam, quod obiter moneo, quum dixiſſet ipſe Meibomius p. 80. l. 1. *magnitudinum ejuſdem generis, ſecundum quantitatem ſpectatarum relatio*; ſat illud commode dictum fuerat nec opus erat, ut, in emendandorum catalogo, pro *ſpectatarum*, ſubſtitueret *ſpectata*; utrumvis enim dicatur perinde eſt.

Tum p. 87. l. 23. hanc Commandini explicationem taxat, *Vide ne hoc potius dictum ſit, ut intelligatur proportio, quæ in quantitate, non item quæ in æſtimatione conſiſtit.* Cui anſam fecit Scholiaſtis illud lin. penult. διπλὸς γὰρ ὁ λόγος· ὁ μὲν ἐν ἀξίᾳ, ὁ δὲ ἐν ποσῷ· *duplex ſiquidem eſt ratio; altera quoad æſtimationem*, ſive valorem; *altera quoad quantitatem*. Puta, Vini congius, congium Aquæ, ratione dignitatis ſive æſtimationis, multo ſuperat; non autem, ratione quantitatis. Vult itaque Commandinus, & recte, vocibus, ἡ κατὰ πηλικότητα, excludi hic magnitudinum quoad dignitatem, aliamve ejuſmodi, conſiderationem; eamque indicari, quæ eſt quoad quantitatem. Quippe non hic conſideratur, num, comparatarum magnitudinum, hæc illa melior ſit, vel rectior, aut regulatior, &c. (quæ & ipſæ ſunt magnitudinum ποιαὶ σχέσεις) Sed, num major, &c. Et quidem quantuplo major minorve; quæ ſola eſt, ἡ κατὰ πηλικότητα ποιὰ σχέσις.

Hunc (inquit p. 88.) *ſecutus Clavius*, [ſecundum quantitatem] *explicat, ſecundum quod una major eſt quam altera, vel minor, vel æqualis*. Recte quidem, & quidni? At, inquit, *hic æque verum eſſet, ſi pro* κατὰ πηλικότητα, *Euclides dixiſſet*, κατὰ ποσότητα? Fortaſſe quidem, (nempe ſi intelligatur ποσότης, tanquam a πόσον, non tanquam a ποσὸν, dici:) & quid ſi? *Quinimo*, inquit, *ſi plane hæc verba omiſiſſet, nihilominus hæc conſideratio locum habuiſſet*. Fortaſſe quidem; ſi nempe ita omiſiſſet ut interim ſubintelligenda velit: At ſi plane abeſſe velit, ne quidem ſubintellecta, ea conſideratio locum non haberet; quippe reliqua definitionis etiam alibi locum habent. Si enim dicitur, *Diametrum periphæriâ minus curvam eſſe*; aut *Æquicrurum Scaleno regulatius*; erit utrobique δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις, *duarum magnitudinum ad invicem relatio qualitativa*: at interim Ratio non erit, quia non ἡ κατὰ πηλικότητα σχέσις. Diſſimilitudinem quippe illa dicunt; *Rationem* non dicunt, nedum *Inæqualitatem*.

Cum autem horum nihil Meibomio placeat; ſed, *ex interpretibus nullum, quid* πηλικότης *eſſet, percepiſſe*, contendat p. 88. l. 4. atque

atque *omnes inde hallucinatos, quod vim vocabuli πηλικότης ignorarent*: videamus quid ipſe velit, his vocibus κατὰ πηλικότητα, inſinuari. Nempe, in hunc finem addita vult, p. 83. l. 27. *ut relationem illam duarum magnitudinum ſpectandam innueret in quantitate & magnitudine; non autem in quotitate & multitudine.* Omnino quidem. Quippe, qui *lineam bipedalem pedalis duplam eſſe* aſſerit; non dicit *Quot* ſit illa, ſed *Quanta* ſit: non enim *duas* eſſe dicit, ſed *duplam*. An vero hoc illud eſt, quod nemo Interpretum percepit unquam? Sed ignorarunt omnes? Haud equidem crediderim. Quis enim illud neſcit?

Verum hoc forſan addendum velit; nempe, non omnem rationem numero denominari poſſe; puta integro, (ut Dupla, Tripla, aliaque Multipla,) vel etiam fracto, (ut ſeſquialtera, ſequitertia, ſuperbipartiens tertias, &c.) ſed eas eſſe poſſe magnitudinis ad magnitudinem rationes, quæ numeris explicabiles non ſunt; ut (in Quadrato) Diametri ad Latus; aliæque ejuſmodi irrationales: quibus igitur non tam *Quotuplum*, (quod, ſtricte loquendo, vix de aliis quam Multiplis dicitur) quam *Quantuplum* ſit hoc illius oſtenditur. (Quod etiam nemo neſcit.) Atque huc, credo, ſpectant quæ habet p. 84. l. 22. *Vocabulum πηλικότης hoc fine adhibuit, ne ſcilicet ſiniſtrè in numero illa relatio ſpectaretur. Univerſalior enim eſt ratio in quantitate ſpectata, eâ quæ ſpectatur in numero: quod non omnis ratio in quantitate ſpectata, numeris explicari poſſit.* Hoc autem quamvis ita verum ſit, ut nihil verius: tamen, quid contineat novi, ego plane non video, quippe quod tritiſſimum eſt, & nemini ignotum. Sed & perinde verum eſt, neque jam primitus cognitum, hac ipſâ (inter alias) ratione, tum Quid ſit Ratio, tum Quid ſit eadem ratio, univerſalius de magnitudinibus univerſim, 3 & 5 dd 5. quam ſpeciatim de numeris, 20 d 6. definiri. Multæ ſiquidem Magnitudinibus conveniunt Rationes, quæ numeris non conveniunt.

Dum vero addit, p. 85. l. 19. *Et hac de cauſa tertiæ definitioni ſtatim quartam ſubjungit, quæ hoc melius explicaret; nempe, omnes ejuſdem generis magnitudines, rationem inter ſe habere, quæ, ſi multiplicentur, ſe invicem ſuperare poſſunt*: Minime aſſequitur in ea re Euclidis mentem: Atque illud, *ejuſdem generis*, perperam inſerit in Euclidis definitionem. Non enim id illic agit Euclides, ut

oſtendat,

oſtendat, quænam homogeneæ quantitates, habeant ad invicem rationes; (quaſi quidem, ex homogeneis, aliæ habeant, aliæ non habeant:) ſed, cum def. præced. homogeneas quantitates habere ad invicem rationem oſtenderat; docet hac def. quænam quantitates dicendæ erunt invicem homogeneæ, adeoque rationem habere: nempe, illæ quæ, multiplicatæ, ſe mutuo poſſint ſuperare: contra vero; quibus illud non contingit, haud erunt pro homogeneis habendæ. Verbi gratia, linea & ſuperficies, heterogeneæ ſunt, quia linea, utcunque multiplicata, nunquam æquabit ſuperficiem, nedum ſuperabit: Curvum autem, & rectum; puta diametrum, & perimetrum circuli; homogeneas quidem eſſe, (adeoque ad invicem rationem habere,) utut diſſimiles; quia tum perimeter diametrum ſemel ſumptam ſuperat, tum diameter quater ſumpta ſuperat perimetrum.

Nec melioris commatis eſt quod ſtatim ſubjungit, lin 23. *Si rationem in Arithmetica definire voluiſſet Euclides, ne quidem additurus eſſet κατὰ ποσότητα,* (credo equidem; ſed potius & illic, κατὰ πηλικότητα, nam & hæc ipſa definitio numeris etiam convenit; qui quidem eodem ſenſu dici poſſunt μεγέθη, quo vocantur *magni.* Sed interim quidni additurus eſſet?) Non, inquit, additurus eſſet κατὰ ποσότητα, *Secundum quantitatem, duorum numerorum, aut etiam, numeratarum rerum, inter ſe relationem ſpectari: quod numerus cum numero comparari nequeat, niſi ſecundum numerum, quo major ſuperat minorem,* &c. (Imo, inquam, & ſecundum Rationem qua major ſuperat minorem;) *vel contra, minor a majore ſuperatur; vel etiam, alter alteri eſt æqualis.* Nempe Senarius binarium ſuperat, numero quidem quaternario; ſed ratione dupla. Nec quidem, numeri ad numerum ratio, magis eſt numerus, quam, lineæ ad lineam ratio, eſt linea. Sin horum utrumq; dicendum velit Meibomius (nempe alteram Numerum eſſe, alteram lineam;) velim ut ulterius dicat, qui poſſit ratio lineæ bipedalis ad pedalem, atque numeri binarii ad unitatem, eadem eſſe vel æqualis ratio; cum altera numerus ſit, altera linea, hoc eſt, quantitates invicem heterogeneæ. Revera, neque ratio eſt illic numerus, neque hic linea, ſed utrobique tertium quid, nempe *multiplicatio in numerum*, vel ſaltem in aliquid generis numero, numero homogeneum. Quippe Duplum (ſive in numeris, ſive in lineis &c.) eſt, non jam 2, quam 2, ſive $\frac{2}{1}$.

Sed, his miſſis, concedimus in magnitudinibus ſecundum rationem

tionem comparandis, ſpectandum eſſe non tam Numerum, ſeu quotitatem, quam quantitatem; nempe, non quæritur *Quot*, ſed *Quantum* hoc ſit ad illud; hoc eſt *Quotuplum*, vel ſaltem *Quantuplum*. Concedimus etiam, Rationem hanc non ſemper veris numeris explicabilem eſſe; ſed nonnunquam ἄῤῥητον & ineffabilem. Sed negamus, hoc omnibus interpretibus fuiſſe ignoratum.

Atque hactenus de duarum priori definitione, 3 *d* 5, quæ dixerat Meibomius perpendimus; &, quam nulla de cauſa ignorantiæ omnes incuſaverit, vidimus. Videamus quid de altera ſentiat, nempe 5 d 6. ubi definitur quid ſit, Rationem ex rationibus componi.

Atqui, *Majori*, inquit, *cum admiratione me de altera definitione differentem audies, Nam & clari Mathematici, & Græci reprehenſionem incurrent; Eutocius ſc. & Theo. p.* 89. *l.* 8. Mirum hoc fateor. quippe cum & *clari* ſint *Mathematici*, & *Græci*, dici, credo, vix poteſt, hoc *ex Græcæ literaturæ neglecta cultura enatum eſſe*, nec, *quod vim vocabuli* πηλικότης *ignorarent*, unde tamen eas *omnes hallucinationes pullulaſſe* modo dixerat *p.*88 *l.*26 & *p.*89 *l.*6. Verum hinc anſam captat utrique inſultandi, dum Euclidem inducit quaſi de Eutocio loquentem *p.*89. *l.* 22 *Hoc equidem mihi perſuadere nequeo, adeo inconſideratum fuiſſe noſtrum Eutocium, virum eximium, quem omnes ex editis in libros divini noſtri Archimedis commentariis* μαθηματικώτατον *judicant.* Et de Theone *p.* 99. *l.*28. *Hac narratione percellor, nec, quid dicam, habeo. An Theo, noſter Theo, dixit rationem ſextuplam eſſe duplam rationis triplæ? adeone rationem jam illo tempore ſine ratione Mathematici conſiderarunt? nec Græca verbatum homines intellexerunt? &c.* Videamus itaque, quid ſit, de quo hic triumphus agitur.

Definitionem illam; 5 *d* 6. ex editione Græca recenſet *p.*78. *l.* 18. λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες πολλαπλασιασθεῖσαι, ποιῶσι τινάς· ubi pro τινάς, *legendum cenſet* τινά, *nempe* λόγον. *Neque enim*, inquit, πηλικότητας *quantitates, facile ſupplebis* &c.

Mihi quidem, (utut τινά potiorem lectionem putem, quam & ſequutos video interpretes,) perinde fere videtur utrumvis dicatur. Si legatur τινάς, interpretandæ erunt πηλικότητες, ipſæ quantitates comparatæ, ſive rationum termini, qui propterea erunt invicem ducendi, ut faciant τινάς (πηλικότη-

Rationum nomina quam duplum, triplum, quadruplum, &c. Semiſſem vero Quadrante majorem eſſe, nemo ſobrius negare debet, quippe qui duobus quadrantibus æquatur; *Omnes autem homines totum quavis ſua parte majus eſſe, communi ratione percipiunt*, (vel Meibomio judice *pag.* 141. *l.* 16.) adeoque ſemiſſem Quadrante, utpote ſui parte. At vero, per hanc Meibomii definitionem, ſubquadruplum $\frac{1}{4}$, ſubduplo $\frac{1}{2}$ vel $\frac{2}{4}$, (hoc eſt, quadrans ſemiſſe,) majus eſſet, cum 1 & 4 plus diſtent quam 1 & 2, vel 2 & 4. Quod quidem utut Meibomio haud abſurdum videatur; vix tamen alii, credo, dictu commodum judicabunt. Sed progrediamur.

Differentia autem, inquit, *illarum* ($\frac{2}{6}$, $\frac{8}{6}$,) *eſt ratio* $\frac{8}{2}$ *quæ in utriuſque rationis antecedentibus ſpectatur.* Nempe quia $\frac{8}{6}$) $\frac{2}{6}$ ($\frac{8}{2}$, quod ſano ſenſu admitti poteſt: ſcilicet, ſi de Differentia diviſionali, ſeu quoto, intelligatur. At interim non minus ſane, alio ſenſu, dicetur differentiam eſſe $\frac{6}{6}$ quia nempe $\frac{8}{6} - \frac{2}{6} = \frac{6}{6}$. Sin de hoc dubitet; velim ut exponat mihi hos Horatii verſiculos. *de Art. Poet.*

Romani pueri longis rationibus aſſem
Diſcunt in partes centum diducere. dicat
Filius Albani, Si de quincunce remota eſt
Uncia, quid ſuperat? poteras dixiſſe, triens: Eu,
Rem poteris ſervare tuam. redit uncia: quid fit?
Semis. ——————

Quod, ſiquid ego intelligo, hoc eſt $\frac{5}{12} - \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. Et $\frac{5}{12} + \frac{1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ At *Semiſſem, Trientem, Unciam, Quincuncem &c.* non magis negabit, credo, Rationum eſſe nomina, quam *Duplum, Triplum, Duodecuplum, Duplum ſuperbipartiens quintas &c.* nempe illorum correlata.

Eadem *pag.* 76. *l. penult. Menſura rationibus applicanda, non niſi ratio eſſe poteſt*, (Recte.) *Uti enim longitudines menſuramus longitudinibus; ſuperficies, ſuperficiebus; corpora, corporibus, &c.* (Recte. Sed & Rationibus.) Puta, linea tripedalis pedalem ſuperat, linea quidem bipedali, ſed in ratione tripla. *Sic rationes rationibus.* Omnino. Puta ratio ſextupla $\frac{6}{1}$, ſuperat triplam $\frac{3}{1}$, ratione tripla $\frac{3}{1}$, (quia $\frac{6}{1} - \frac{3}{1} = \frac{3}{1}$;) ſed in ratione dupla; quia $\frac{3}{1}$) $\frac{6}{1}$ (2. Eodem plane modo quo linea ſex pedum 6P, ſuperat lineam trium pedum, 3P, lineâ trium pedum 3P, ſed quia

6P

6 P — 3P = 3 P;) ſed in ratione dupla, quia nempe 3P)6P (2 vel $\frac{2}{1}$.

Similiter, quod *pag.* 77:78. colligit. *Dico igitur, rationem* $\frac{9}{8}$, *in qua tonus major ſpectatur, minorem eſſe decem commatis; majorem commatis novem*: ſuo ſenſu verum eſt, (ſumpta commatis quantitate $\frac{81}{80}$;) quia nempe novem commata, hoc eſt ratio $\frac{81}{80}$ novies compoſita, (multiplicando;) ſive radicis $\frac{81}{80}$ poteſtas nona, (λόγ☉ ἐννεαπλαϛίων,) $\frac{150094}{134217}$, minor eſt quam $\frac{9}{8}$; at ejuſdem poteſtas decima, [illegible] major quam $\frac{9}{8}$. Sive in continua progreſſione Geometrica, $\frac{81}{80}$. $\frac{81}{80}\times\frac{81}{80}$. &c ∺ terminus nonus ($\frac{150094}{134217}$) minor eſt quam $\frac{9}{8}$, decimus autem ([illegible]) major. Si quid autem aliud hic velit Meibomius; fruſtra eſt.

His præmiſſis (inquit *pag* 78.) *ad Rationum compoſitionem accedimus*. Et longa diſquiſitione, per multas deinceps paginas, inquirit, quid πηλικότητ☉ voce intelligendum ſit. Et quidem *quid πηλικότης eſſet, ex interpretibus nullum percepiſſe*, contendit *p.* 87. *l.* 20. (*Nimirum ex Græcæ literaturæ, in Græcis diſciplinis cognoſcendis, neglecta cultura, quid non ubique*, inquit, *errorum eſt enatum? p.* 89. *l.* 5.) Imo ne quidem *Eutocium & Theonem*, (utut Græci fuerint) *p.* 89. *l.* 12. Imo, inquit *p.* 169. *l.* 24. *perſpicuum eſt, non tantum ignoraſſe illos authores, quid ſit rationum compoſitio; ſed &, quid ſit ratio.*

Adeoque multis oſtendit, *p.* 79, 80, 81, 82, 83. πηλίκον & πηλικότης de quantitate continua, ſive magnitudine dici, (quod nemo neſcit.) ποσὸν autem & ποσότης, de multitudine, ſive quantitate diſcreta.

Dicimus nos, verum quidem eſſe, quod ſoleant πηλίκον & πηλικότης, proprie & prima ſignificatione, reſpicere quantitatem continuam, & quidem localiter extenſam; puta quoad longitudinem, latitudinem, profunditatem; quæ eſt proprie dicta magnitudo: Vel ſaltem, id quod ad inſtar magnitudinis conſideratur, utut revera (proprie loquendo) magnitudo non ſit; ubi nempe quæritur *Quantum*; non *Quot*. Quo enim ſenſu, non modo proprie dicta *magnitudo*, hoc eſt, quantitas localiter extenſa, ſed & *tempus, pondus*. & ipſe *numerus &c* dici ſolent *magnum, parvum, majus, minus, &c* Eodem etiam de horum quolibet, πηλίκον, *quantum* ſeu *quam magnum*, dici poterit. Sed & ſimiliter haud inconcinne dicitur *quanta eruditio, quantus calor, quanta*

ætate, quanto honore, quanta authoritate vir, quanta multitudo &c. nō minus quā *eruditio magna, parva, major, maxima &c.* item *multitudo magna, magnus numerus, &c.* Sed & *Ratio major, minor*, adeoque & *quantitatis*. Et quidem univerſum, quicquid tanquam menſuræ capax proponitur, de illo haud incommode interrogamus non modo πόσον, *quantum ſit*, ſed & πηλίκον, *quam magnum*. Quod confirmabunt, ſiquis dubitet, cum authores Græci paſſim, tum Lexicographi; in vocibus ἡλίκος, πηλίκος, τηλίκος, τηλικοῦτος &c. Sed nec ipſe, credo, reſragabitur Meibomius, quippe qui de φθόγγοις, ſonis, πηλικότητα *ſignificanter admodum dici*, affirmat p. 83. l. 16, 20. Ubi autem non menſuranda, ſed numeranda proponuntur aliqua; non quidem πηλίκον, *quam magnum* quærimus; neque πόσον, *quantum*; ſed πόσα, *quot*.

Et quidem numerus utrovis modo conſiderari poteſt. Ubi enim, verbi gratia dicitur, *Numerum ternarium, majorem eſſe binario*; atque *Tria, plura eſſe quam Duo*; tantundem utrobique, quoad rem, dicitur: At illic, conſideratur utervis numerus ut Unum quid; & dicitur, Quantum illud; ad inſtar quantitatis continuæ: Hic vero, ut plura; & dicitur Quot ſunt; ad inſtar Quantitatis diſcretæ.

Quod autem ille, ποσὸν ad quantitatem diſcretam, ſeu numerum reſtringere velit; quod facere videtur, *pag.* 11. *l.* 5. *pag.* 83. *l.* 2. *pag.* 85. *l.* 13. item p. 85. *l.* 27. & *p.* 87. *l.* 4. & alibi: Ad nomen in [illegible] factum eſt, cum certum ſit, ποσὸν, non minus de continuo dici. Teſtor enim quos ipſe citat authores paſſim. Imo ſeipſum teſtor, qui p. 87. l. 5. id ipſum diſertis verbis fatetur, Nempe, *generale eſſe vocabulum τὸ ποσὸν, quod & magnitudinem, & multitudinem comprehendat.* Cur igitur, ejuſdem paginæ l. 4. & præcedentis lin. penult. contendat τὸ ποσὸν dici *non poſſe ubi ratio eſt ineffabilis, ſeu numero inexplicabilis*; Item, *Quantum, non niſi cum rationis magnitudines ſunt commenſurabiles*; ego ſane non intelligo: præſertim cum proximis verbis *lin.* 5 agnoſcat, τὸ ποσὸν utrique quantitati commune eſſe; & *lin.* 12 τοῦ ποσοῦ, *Quanti, aliud ipſe in corporibus continuis, quod magnitudo vocatur,* —— *aliud in diſcretis*. Quicquid enim de *Quoto* ſit, (quæ ſua vox eſt;) certe ποσὸν, *quantum*, de quantitate continua dici, perinde atque diſcreta, nemo ſobrius negabit. Et ipſe quidem [illegible] negare debet, qui *continui quoti* & *quotitatis continuæ*, (pro *continua quantitate*,) ſat ſæpe meminit; & quidem primus.

Sed

Sed, ne difficiles ſimus; Ego quidem concedo, quod ille (ni fallor) hic contendit, (quod ſaltem contendere debet) nempe, πηλίκον, & πηλικότητα, vel de quantitate continua dici, vel ſaltem de eo quod ad inſtar continuæ quantitatis conſideratur: ſcilicet, ubi quid conſideratur ut *Quantum*, non ut *Quot*. (Sed & μέγεθος eadem, credo, latitudine ſumendū erit: Nam quæ de magnitudinibus hic habet Euclides Propoſitiones, non ſolis proprie dictis magnitudinibus, ſed etiam aliis non raro *Quantis* applicantur.) At quid porro?

Jam, inquit pag. 83. *videamus quomodo in rationis definitione hoc vocabuli locum habet*: nempe λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις.

Quod nobis hac in re videatur, ſuperius dictum eſt; nempe eam hic innui habitudinem qualitativam, quæ fit ex quantitate orienda; ſive quæ magnitudinibus competit non tam ſecundum quod *multa* ſunt, vel etiam ſimpliciter *magna* &c. quam ſecundum quod *Quanta*, ſive *Quam magna*, ſint. Videamus quid alii.

Scholiaſtes (inquit p. 84.) hac voce, *infinitas magnitudines excluſas eſſe*, putat. Fortaſſe quidem. Neque male. Nam πηλίκον, *quam magnum*, non ſimpliciter *magnum* dicit, ſed magni *determinatam magnitudinem*, ſive *magnitudinis menſuram*; quippe de infinitis non dici poteſt πηλίκα, quam magna ſint: adeoque nec illis attribuenda σχέσις, ἡ κατὰ πηλικότητα, quæ ipſis ſecundum πηλικότητα conveniat. (Scholiaſtis verba habentur pag. 10. l 21. τὸ, κατὰ πηλικότητα, inquit, in Rationis definitione additur, ἵνα ἐξείργῃ τὰ τῶν ἀπείρων μεγεθῶν) quem autem hic exercet Meibomius, criticiſmus, p 84. l. 27. *in eo graviter peccaſſe Scholiaſten, quod has voces*, κατὰ πηλικότητα, *cum magnitudinum notione conjungendas putat, cum Euclides ipſe relationis notioni illas adjunxerat; quod articulus ἡ in Græca Editione indicat*: mihi quidem nullius momenti videtur. Neq enim Scholiaſtes ita ſeparat, quin articulus ἡ reſpiciat vocem σχέσις: (nempe ea relatio quæ eſt ſecundum quantitatem;) neque Euclides ita conjungit cum notione relationis, quin vox πηλικότητα magnitudines reſpiciat. Non enim intelligendum eſt, ἡ κατὰ τὸ σχέσεως πηλικότητα, quod videtur velle Meibomius. (quaſi dixiſſet Euclides, *Magnitudinum relatio ea quæ relationis quantitatem ſpectat.*) ecquis enim hic ſenſus eſſet? ſed ἡ κατὰ τὴν αὐτῶν μεγεθῶν πηλικότητα; nempe, *ea magnitudinum*

rum inter ſe relatio, quæ ipſarum (non, *ipſius*,) *quantitatem ſpectat.* Et propterea etiam, quod obiter moneo, quum dixiſſet ipſe Meibomius p. 80. l. 1. *magnitudinum ejuſdem generis, ſecundum quantitatem ſpectatarum relatio*; ſat illud commode dictum fuerat nec opus erat, ut, in emendandorum catalogo, pro *ſpectatarum*, ſubſtitueret *ſpectata*: utrumvis enim dicatur perinde eſt.

Tum p. 87. l. 23. hanc Commandini explicationem taxat, *Vide ne hoc potius dictum ſit, ut intelligatur proportio, quæ in quantitate, non item quæ in æſtimatione conſiſtit.* Cui anſam fecit Scholiaſtis illud lin. penult. διττὸς γὰρ ὁ λόγος· ὁ μὲν ἐν ἀξίᾳ, ὁ δὲ ἐν ποσῷ· *duplex ſiquidem eſt ratio; altera quoad æſtimationem*, ſive valorem; *altera quoad quantitatem.* Puta, Vini congius, congium Aquæ, ratione dignitatis ſive æſtimationis, multo ſuperat; non autem, ratione quantitatis. Vult itaque Commandinus, & recte, vocibus, ἡ κατὰ πηλικότητα, excludi hic magnitudinum quoad dignitatem, aliamve ejuſmodi, conſiderationem; eamque indicari, quæ eſt quoad quantitatem. Quippe non hic conſideratur, num, comparatarum magnitudinum, hæc illa melior ſit, vel rectior, aut regulatior, &c. (quæ & ipſæ ſunt magnitudinum ποιαὶ σχέσεις;) Sed, num major, &c. Et quidem quantuplo major minorve; quæ ſola eſt, ἡ κατὰ πηλικότητα ποιὰ σχέσις.

Hunc (inquit p. 88.) *ſecutus Clavius*, [ſecundum quantitatem] *explicat, ſecundum quod una major eſt quam altera, vel minor, vel æqualis.* Recte quidem, & quidni? At, inquit, *hoc æque verum eſſet, ſi pro* κατὰ πηλικότητα, *Euclides dixiſſet*, κατὰ ποσότητα. Fortaſſe quidem, (nempe ſi intelligatur ποσότης, tanquam a πόσον, non tanquam a πόσα, dici) & quid ſi? *Quinimo*, inquit, *ſi plane hæc verba omiſiſſet, nihilominus hæc conſideratio locum habuiſſet.* Fortaſſe quidem; ſi nempe ita omiſiſſet ut interim ſubintelligenda velit: At ſi plane abeſſe velit, ne quidem ſubintellecta, ea conſideratio locum non haberet; quippe reliqua definitionis etiam alibi locum habent. Si enim dicitur, *Diam trum periphæriâ minus curvam eſſe*; aut *Æquicrurum Scaleno regulatius*; erit utrobique δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις, *duarum magnitudinum ad invicem relatio qualitativa*: at inte im *Ratio* non erit, quia non ἡ κατὰ πηλικότητα σχέσις. Diſſimilitudinem quippe illa dicunt, *Rationem* non dicunt, nedum *Inæqualitatem.*

Cum autem horum nihil Meibomio placeat; ſed, *ex inæqualibus nullam, quid* πηλικότης *eſſet, perc piſſe*, contendat p. 87. l. 2. atque

atque *omnes inde hallucinatos, quod vim vocabuli πηλικότης ignorarent* : videamus quid ipſe velit, his vocibus κατὰ πηλικότητα, inſinuari. Nempe, in hunc ſinem addita vult, p 83. l. 27. *ut relationem illam duarum magnitudinum ſpectandam innueret in quantitate & magnitudine; non autem in quotitate & multitudine.* Omnino quidem. Quippe, qui *lineam bipedalem pedalis duplam eſſe* aſſerit ; non dicit *Quot* ſit illa, ſed *Quanta* ſit : non enim *duas* eſſe dicit, ſed *duplam*. An vero hoc illud eſt, quod nemo Interpretum percepit unquam ? Sed ignorarunt omnes ? Haud equidem crediderim. Quis enim illud neſcit ?

Verum hoc forſan addendum velit ; nempe, non omnem rationem numero denominari poſſe ; puta integro, (ut Dupla, Tripla, aliaque Multipla,) vel etiam fracto, (ut ſeſquialtera, ſequitertia, ſuperbipartiens tertias, &c.) ſed eas eſſe poſſe magnitudinis ad magnitudinem rationes, quæ numeris explicabiles non ſunt ; ut (in Quadrato) Diametri ad Latus ; aliæque ejuſmodi irrationales : quibus igitur non tam *Quotuplum*, (quod, ſtricte loquendo, vix de aliis quam Multiplis dicitur) quam *Quantuplum* ſit hoc illius oſtenditur. (Quod etiam nemo neſcit.) Atque huc, credo, ſpectant quæ habet p. 84. l. 22. *Vocabulum* πηλικότης *hoc fine adhibuit, ne ſcilicet ſiniſtrè in numero illa relatio ſpectaretur. Univerſalior enim eſt ratio in quantitate ſpectata, eâ quæ ſpectatur in numero : quod non omnis ratio in quantitate ſpectata, numeris explicari poſſit.* Hoc autem quamvis ita verum ſit, ut nihil verius : tamen, quid contineat novi, ego plane non video, quippe quod tritiſſimum eſt, & nemini ignotum. Sed & perinde verum eſt, neque jam primitus cognitum, hac ipſâ (inter alias) ratione, tum *Quid* ſit Ratio, tum *Quid* ſit eadem ratio, univerſalius de magnitudinibus univerſim, 3 & 5 dd 5. quam ſpeciatim de numeris, 20 d 6. definiri. Multæ ſiquidem Magnitudinibus conveniunt Rationes, quæ numeris non conveniunt.

Dum vero addit, p. 85. l. 19. *Et hac de cauſa tertiæ definitioni ſtatim quartam ſubjungit, quæ hoc melius explicaret ; nempe, omnes ejuſdem generis magnitudines, rationem inter ſe habere, quæ, ſi multiplicentur, ſe invicem ſuperare poſſunt* : Minime aſſequitur in ea re Euclidis mentem : Atque illud, *ejuſdem generis*, perperam inſerit in Euclidis definitionem. Non enim id illic agit Euclides, ut oſtendat,

oſtendat, quænam homogeneæ quantitates, habeant ad invicem rationes; (quaſi quidem, ex homogeneis, aliæ habeant, aliæ non habeant:) ſed, cum def. præced. homogeneas quantitates habere ad invicem rationem oſtenderat; docet hac def. quænam quantitates dicendæ erunt invicem homogeneæ, adeoque rationem habere: nempe, illæ quæ, multiplicatæ, ſe mutuo poſſint ſuperare: contra vero; quibus illud non contingit, haud erunt pro homogeneis habendæ. Verbi gratia, linea & ſuperficies, heterogeneæ ſunt, quia linea, utcunque multiplicata, nunquam æquabit ſuperficiem, nedum ſuperabit: Curvum autem, & rectum; puta diametrum, & perimetrum circuli; homogeneas quidem eſſe, (adeoque ad invicem rationem habere,) quæ diſſimiles; quia tum perimeter diametrum ſemel ſumptam ſuperat, tum diameter quater ſumpta ſuperat perimetrum.

Nec melioris commatis eſt quod ſtatim ſubjungit, lin 23. *Si rationem in Arithmetica definire voluiſſet Euclides, ne quidem additurus eſſet* κατὰ ποσότητα, (credo equidem; ſed potius & illic, κατὰ πηλικότητα, nam & hæc ipſa definitio numeris etiam convenit; qui quidem eodem ſenſu dici poſſunt μεγέθη, quo vocantur *magni*. Sed interim quidni additurus eſſet?) Non, inquit, additurus eſſet κατὰ ποσότητα, *Secundum quantitatem, duorum numerorum, aut etiam, numeratarum rerum, inter ſe relationem ſpectari: quod numerus cum numero comparari nequeat, niſi ſecundum numerum, quo major ſuperat minorem*, &c. (Imo, inquam, & ſecundum Rationem qua major ſuperat minorem;) *vel contra, minor a majore ſuperatur; vel etiam, alter alteri eſt æqualis.* Nempe Senarius binarium ſuperat, numero quidem quaternario; ſed ratione dupla. Nec quidem, numeri ad numerum ratio, magis eſt numerus, quam, lineæ ad lineam ratio, eſt linea: Sin horum utrumq; dicendum velit Meibomius (nempe alteram Numerum eſſe, alteram lineam;) velim ut ulterius dicat, quî poſſit ratio lineæ bipedalis ad pedalem, atque numeri binarii ad unitatem, eadem eſſe vel æqualis ratio; cum altera numerus ſit, altera linea, hoc eſt, quantitates invicem heterogeneæ. Revera, neque ratio eſt illic numerus, neque hic linea, ſed utrobique tertium quid, nempe *multiplicabile in numerum*, vel ſaltem in aliquid generis numeroſi, numeris homogeneum. Quippe *Duplum* (ſive in numeris, ſive in lineis &c.) eſt, non tam 2, quam 2, ſive $\frac{2}{1}$.

Sed, his miſſis, concedimus in magnitudinibus ſecundum rationem

tionem comparandis, ſpectandum eſſe non tam Numerum, ſeu quotitatem, quam quantitatem; nempe, non quaritur *Quot*, ſed *Quantum* hoc ſit ad illud; hoc eſt *Quotuplum*, vel ſaltem *Quantuplum*. Concedimus etiam, Rationem hanc non ſemper veris numeris explicabilem eſſe; ſed nonnunquam ἄῤῥητον & ineffabilem. Sed negamus, hoc omnibus interpretibus fuiſſe ignoratum.

Atque hactenus de duarum priori definitione, 3 *d* 5, quæ dixerat Meibomius perpendimus; &, quam nulla de cauſa ignorantiæ omnes incuſaverit, vidimus. Videamus quid de altera ſentiat, nempe 5 *d* 6. ubi definitur quid ſit, Rationem ex rationibus componi.

Atqui, *Majori*, inquit, *cum admiratione me de altera definitione diſſerentem audies, Nam & clari Mathematici, & Græci reprehenſionem incurrent; Eutocius ſc. & Theo. p.* 89. *l.* 8. Mirum hoc fateor. quippe cum & *clari* ſint *Mathematici*, & *Græci*, dici, credo, vix poteſt, hoc *ex Græcæ literaturæ neglecta cultura ortum eſſe*, nec, *quod vim vocabuli πηλικότης ignorarent*, unde tamen eas *omnes hallucinationes pullulaſſe* modo dixerat *p.*88 *l.*26 & *p.*89 *l.*6. Verum hinc anſam captat utrique inſultandi, dum Euclidem inducit quaſi de Eutocio loquentem *p.*89. *l.* 22. *Hoc equidem mihi perſuadere nequeo, adeo inconſideratum fuiſſe noſtrum Eutocium, virum eximium, quem omnes ex editis in libros divini noſtri Archimedis commentariis μαθηματικώτατον judicant.* Et de Theone *p.* 99. *l.*28. *Hac narratione percellor, nec, quid dicam, habeo. An Theo, noſter Theo, dixit rationem ſextuplam eſſe duplam rationis triplæ? adeone rationem jam illo tempore ſine ratione Mathematici conſiderarunt? nec Græca verbatum homines intellexerunt? &c.* Videamus itaque, quid ſit, de quo hic triumphus agitur.

Definitionem illam; 5 *d* 6. ex editione Græca recenſet *p.*78. *l.* 18. λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες πολλαπλασιασθεῖσαι, ποιῶσι τινάς· ubi pro τινάς, *legendum cenſet* τινὰ, *nempe* λόγον. *Neque enim*, inquit, πηλικότητας *quantitates, facile ſupplebis* &c.

Mihi quidem, (utut τινὰ potiorem lectionem putem, quam & ſequutos video interpretes,) perinde fere videtur utrumvis dicatur. Si legatur τινάς, interpretandæ erunt πηλικότητες, ipſæ quantitates comparatæ, ſive rationum termini, qui propterea erunt invicem ducendi, ut faciant τινάς (πηλικότητας,

cet atque × 2 vel × $\frac{2}{1}$: Signum multiplicationis × indicat, *Rationem eſſe*; & adjunctus Denominator 2 vel $\frac{2}{1}$, *Quanta* ſit illa ratio. Sive, quod tantundem valet, ſignum × indicat *Multiplum* (intellige ſenſu laxiori) vel, ſi libet, *Aliquantuplum* & 2 vel $\frac{2}{1}$ *Quam* multiplum, ſive *Quantuplum*. Et ſimiliter intelligendum erit, quantacunque ſit ratio, puta × $\frac{a}{b}$ ſive rationalis ſive irrationalis; nam utcunque $\frac{a}{b}$ indicabit quotientem qui oritur ex quantitate *a* per quantitatem *b* diviſa, adeoque denominabit rationem quam habet *a* quantitas ad quantitatem *b*. Quum enim ait ille, p.91. l.28. *non vidiſſe illos, vocabulum* πηλικότης *reſpexiſſe numeris ineffabiles rationes*; omnino ſecus eſt. Nã non minus quãtitas rationis $\sqrt{2}$ ad 1, (hoc eſt, Diagonii ad Latus quadrati, Diviſionis quotiente $\frac{\sqrt{2}}{1}$ vel $\sqrt{2}$, indicatur: quam rationis, 2 ad 1, quantitas indicatur quotiente $\frac{2}{1}$ vel 2. Nec quidem hoc negatur. Eutocii verbis p. 91. l. 25. citatis, (quod tamen inſinuat Meibomius *lin.* 18.) id tantum negatur, Quotientem illum vere Numerum eſſe. Non negat rationis quantitatem hujuſmodi ſive diviſione ſive applicatione indicari: Et multominus quidẽ negat, *rationes magnitudinum numeris ineffabiles, ſic componi poſſe*. Eſto enim verbi gratia, tum Quadrati tum Cubi latus *a*, Quadrati Diagonium *b*, Diagonium Cubi *c*, quæ quidem ſunt quantitates invicem ἄῤῥητοι: nempe ut 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$. Rationis *c* ad *b*, quantitas eſt $\frac{c}{b} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$; rationis *b* ad *a*, quantitas eſt $\frac{b}{a} \times \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$; ex his invicem ductis, emerget $\frac{c}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{cb}{ba} = \frac{c}{a}$, hoc eſt $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$, quantitas rationis *c* ad *a*, compoſitæ ex *c* ad *b*, & *b* ad *a*.

$$1)\ \sqrt{2}\ (\ \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$1)\ 2\ (\ \frac{2}{1} = 2$$

Meibomium interim id forſan in toto hoc negotio decepit, quod putaverit eandem in utraque definitione (3 d 5 & 5 d 6) σύ-

πηλικότητα deſignari; cum hæc ab illa admodum ſit diverſa. Nempe in altera (5 *b* 6) πηλικότητες τῶν λόγων; in altera (3 d 5) πηλικότης τῶν μεγεθῶν innuitur. Definitur enim λόγος, (3 d 5) δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα (nempe τῶν αὐτῶν, non τῆς σχέσεως, nedum τοῦ λόγου) πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις. In altera vero def. (5 d 6) diſerte dicitur αἱ τῶν λόγων πηλικότητες. Illic, *quanta magnitudo* deſignatur: hic, *quanta ratio*.

At inquit, *pag. 91 lin.4 Inſulſa illa eſſet rationum compoſitio &c.* quod πηλικότητας *quantitates, velit eſſe* ποσότητας *quotitates; atqui* πηλικότητας, *quantitates rationum inter ſe multiplicandas dicit* Euclides; *non* ποσότητας, *numeros hujuſmodi, quibus rationum effabilium antecedentes, ad unitatem, tanquam communem conſequentem, relatæ explicentur: quod hoc modo rationes numero ineffabiles componi nequeant* p.89.l.12. *Diſerte,* inquit, *uterque* (Eutocius & Theo.) *per rationis* πηλικότητα *quantitatem, intelligi dicit* ποσότητα *quotitatem, ſeu, ut ipſi loquuntur, numerum denominatorem a quo ratio denominatur.*

D: rationibus, numero ineffabilibus componendis; modo dictum eſt. Per *quantitates* autem Eutocium & Theonem dicere, intelligendas eſſe *quotitates*; neutiquam concedendum eſt. Qui enim *quotuplum* dicit, non dicit *Quot*, ſed *Quantum*. Nec, quia, verbi gratia, Ratio *Dupla*, a binario denominationem ſumit, ideo, qui *Duplum* dicit, *multitudinem* dicit, ſed potius *magnitudinem*, ſeu πηλικότητα. Qui enim lineam bipedalem pedalis duplam dicit, non illam duas eſſe dicit, ſed numero unicam, magnitudine vero tantam quanta eſſent pedales duæ. Nempe *Duplum*, non *Duo* dicit, ſed *tantundem atque duo*. Et quidem ipſe Meibomius ni fallor, p.83 *l.2.* δύω πάχεις, utut a numero denominatos, pro magnitudine habet, & ſimiliter alibi.

At inquit, *p.96.l.9. hac multiplicatione quantitatum, tantum unam quantitatem nanciſcamur;* (recte quidem; nempe quantitatem rationis compoſitæ, quæ quæritur:) *adeoque non rationem, quod erat propoſitam.* Imo, inquam & Rationem; nempe, cujus hæc eſt quantitas: ſicut & *magnitudinem* exhiberi dicimus, quando exhibetur, *Quanta* ſit illa magnitudo. *Hinc tamen ſententiam inſigni quadam interpretatione ſe juvare poſſe dicit* (quaſi quis antea hoc neſciverit;) *nempe, ut dicamus conſequentem rationis terminum ubiq; eſſe unitatem;* (ſi nempe rationis denominator habeatur pro termino antecedente,) At quis quæſo neſcit, tantundem

eſſe

eſſe rationem *duplam* dicere, atque rationem 2 ad 1? &, *triplam*, atque 3 ad 1? At, ait p. 97. l. 13. cum Eutocius, *de conſequente rationis termino, ſeu unitate, mentionem non injecerit; ita denominatores ſuos conſiderat, acſi uno illo antecedente termino, rationis quantitas eſſentialis exprimatur; quod plane eſt impoſſibile.* Imo vero, ut qui *duo* dicit, *duas unitates* dicere ſatis intelligitur; ita & qui *duplum* dicit (ſive, *rationem a 2 denominatam*,) dicere *ſimpli duplum* ſatis intelligitur; etſi nec illic *unitatis*, nec hic, *ſimpli*, mentionem faciat.

Non itaque eſt, quantum ego quidem adhuc video, ex hactenus dictis quidquam, cur (quod vult Meibomius, p. 93. l. 5.) *Exploſa ſit Eutocii, & reliquorum ſententia, de quantitate rationis numero* (aut ſaltem, qui numeri inſtar eſt, diviſionis Quotiente) *exhibenda.* Interea tamen, dum hanc quantitatis rationum æſtimationem, ex diviſionis quotiente faciendam, repudiat; nullam nobis aliam iſtius loco tradit, qua conſtet *quanta* quævis ratio dicenda ſit. Si itaque non hoc, dicat velim, quo alio criterio erit æſtimanda?

Hæc autem, ait, *omnia, quæ de rationum compoſitione, & verbis quibus illa tradita eſt, narrat, nunquam ſe moturum fuiſſe, niſi falſiſſimum dogma, & quod maximam errandi anſam aliis præbuit, inde fuiſſet fabricatum.* p. 99. l. 13. Videamus, quæſo, quid ſit. *Hac enim*, inquit, *denominatorum inter ſe multiplicatione fultus, Theo Alexandrinus, geometra alioqui eximius, quod ex Commentariis in Ptolemæi Magnam Conſtructionem videre eſt, adſeruit*, (horrendum dictu!) *triplæ rationis duplam eſſe ſextuplam.* ſeu (quod ipſius verba magis ſonant) *tripli duplum eſſe ſextuplum*, Atque (quod certe videtur dolendum) *hunc ſecuti recentiores, volumina ſua his paralogiſmis impleverunt*: Idque adeo ut (ſi Meibomio credamus) *hac narratione perculſus Euclides, quid dicat, non habeat.* &c. Et quidem (p. 100. l. 12.) eouſque *hunc errorem ampliavit Gregorius a Sancto Vincentio*, ut (numerante Meibomio) *in ſolo octavo libro, centum ſeptendecim falſæ propoſitiones* contineantur.

Gravis equidem hæc, inquam, eſt accuſatio; & non paucos tangit. At, interim, quidni ſic, uti loquutus eſt Theon, loqui liceat? Si autem ſic loqui liceat, tota hæc vel ſua ſponte ruit accuſatio. Nempe ſic locuti ſunt, vel Meibomio fatente, tum Veteres, tum Recentiores, ſi non omnes, plerique ſaltem; certe nemo omnium hactenus eam loquendi formam repudia-

 vit,

ex hypotheſi: Ergo, per Axioma citatum, Duplum τοῦ C, æquatur duplo τοῦ tripli A. At Duplum τοῦ C, (vel fatente, credo, Meibomio,) eſt Sextuplum τοῦ A: ergo &, Duplum tripli A, eſt ſextuplum τοῦ A. Si autem nec dum ſit ſatis perſpicuum; id ipſum ſic quartò aggrediamur. *Duplum, communi ſententia, omnes homines judicant, quod bis habet ſimplum; triplum, quod tria ſimpla æquat; centuplum, quod centum;* (&, ni fallor, ſextuplum, quod ſex:) aſſerente Meibomio p. 170. l. 13. Ergo cum C ſit, ex hypotheſi, triplum A; erit C æquale τῷ A ter poſito; hoc eſt, C = 3 A = A + A + A. Item, cum F ſit, ex hypotheſi, duplum τοῦ C, erit F æquale τῷ C bis poſito, adeoque & 3 A bis poſito, hoc eſt, ipſis A + A + A bis poſitis, hoc eſt, A + A + A plus A + A + A, hoc eſt A + A + A + A + A + A, hoc eſt, τῷ A ſexies poſito, hoc eſt, ſextuplo τοῦ A. Quod erat demonſtrandum. Verum itaq; eſt quod affirmat Theon, ἐὰν τριπλάσιόν τινος διπλασιάσωμεν, γίνεται αὐτοῦ ἑξαπλάσιον, *ſi triplum alicujus duplaverimus, fiet ipſius ſextuplum.* ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Verum quidem eſt, nec nos inficias imus, quod longe alio ſenſu dicatur, *rationis triplæ ratio duplicata* (διπλασίων) *eſt noncupla*; quia nempe $\frac{3}{1} \times \frac{3}{1} = \frac{9}{1}$: ob continuam multiplicationem. At interim non minus verum eſt, & *tripli duplum eſſe ſextuplum*; quia nempe $\frac{3}{1} \times 2 = \frac{6}{1}$: quod affirmat Theon, & cum illo, excepto Meibomio, alii omnes.

Atque eadem ratione, tripli ſemiſſem, ſive ſemiſſis triplum, dicimus ſeſquialterum, (quod affirmat Theon p. 28. l. 18.) quia $\frac{3}{1} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$. Sic ſemiſſis, ſive ſubdupli, duplum, dicimus integrum, quia $\frac{1}{2} \times 2 = \frac{2}{2} = 1$. quanquam verum etiam ſit, rationis ſubduplæ rationem (non duplam διπλάσιον, ſed) duplicatam, διπλασίονα, eſſe ſubquadruplam, quia $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$.

Quæ omnia cum ita clara ſint ut nihil magis, non eſt cur aut *explodat* ea Meibomius, aut, ſi explodat vel maxime, nos illud moveat. Et quidem, ſi (quod ait Meibomius p. 99. l. 26.) *Elementa quoq; Euclidis, ad quæ fuſe hæc tradidit Clavius, hanc explicationem ferre ſint coacta*: non eſt tamen, cur id, vel nos, vel ipſum Euclidem, male habeat; quippe cui Euclides nuſpiam refragatur.

Quod autem Archimedes (ut p. 101. l. 5.) *rationem* $\frac{27}{8}$ *dixerit* ἡμιόλιον *ſeſquialteram* [intellige, *triplicatæ ſubduplicatam*] *rationis*

tionis $\frac{27}{8}$ *ſeu* $\frac{9}{4}$, *& rationem* $\frac{9}{4}$ *eſſe* *διπλασίονα duplam* [ſeu potius *duplicatam*, ſic enim rectius vertenda eſſet ea vox] *rationis* $\frac{3}{6}$ *ſeu* $\frac{1}{2}$: nos nihil movet, quippe & nos idem dicimus. Eſt ſiquidem $\frac{9}{4} = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2}$, (adeoque $\frac{3}{2} = \sqrt{\frac{9}{4}}$;) & $\frac{27}{8} = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \sqrt{:}\ \frac{9}{4} \times \frac{9}{4} \times \frac{9}{4}$. Hoc eſt, quantitas $\frac{9}{4}$ eſt quadratum, (ſive poteſtas ſecunda, ſive ratio duplicata,) quantitatis $\frac{3}{2}$: Et quantitas $\frac{27}{8}$, eſt Cubus (ſive poteſtas tertia, ſive ratio triplicata,) quantitatis $\frac{3}{2}$, quæ eſt radix quadratica (ſive poteſtas ſubſecunda, ſive ratio ſubduplicata,) quantitatis $\frac{9}{4}$. Quod autem *nec Theo hoc intellexerit, nec ex poſterioribus Mathematicis, ad noſtra uſque tempora, ullus*; miror equidem, quâ fronte Meibomius affirmare ſuſtinet. Nam, quis non ?

Tota controverſiæ cardo in hoc verſatur, quod Meibomius vel neſciat, vel nolit, diſtinguere, inter rationis *duplationem, triplationem, quadruplationem*, &c, hoc eſt, multiplicationem in 2, 3, 4, &c : unde oritur λόγος διπλάσιος, τριπλάσιος, τετραπλάσιος, &c. atque eam rationis *duplicationem, triplicationem, quadruplicationem*, &c. quæ fit continuo ductu quantitatis in eundem multiplicatorem bis, ter, quater, &c. poſitum; unde oritur λόγος διπλασίων, τριπλασίων, τετραπλασίων, &c. Quæ quidem inter ſe plane diverſa eſſe, etiamſi Meibomius millies neget, non tamen eapropter eſt minus verum. Quippe aliud omnino eſt quantitatem A, bis multiplicare in numerum 3, unde proveniunt duo tripla, hoc eſt, duplum tripli, nempe 3 A + 3 A vel 3 A × 2, nempe 6 A : aliud vero, quantitatem A in 3, bis continue multiplicare, hoc eſt, in 3 × 3, (non, ut prius, in 3+3,) unde oritur tripli triplum, ſive A × 3 × 3 = A × 9. vel 9 A.

Dicet fortaſſe, eodem ſenſu, in Archim 8. l. 2. de ſph. & Cylind. atque Eutocii in eam commentariis; de eadem dici λόγον διπλάσιον, & λόγον διπλασίονα. Fateor equidem id fieri. Sed, librariorum id incuriâ fieri non dubito (ut ſuperius dictum eſt,) qui cum Matheſeos fortaſſe minus fuerint gnari, neque λόγου διπλασίου & διπλασίονος diſcrimen ſatis accurate intellexerint, errorem illum, vel etiam eo majores, facile admiſerint. Sed etſi demus, eâdem voce (ſive διπλάσιος ea ſit, ſive διπλασίων,) utrumq; innui (quod, de voce ἡμιόλιος, fatendum videtur, ob vocum penuriam, admiſſum eſſe;) Non tamen inde ſequitur, res eſſe confundendas; ſed eo accuratius proſpiciendum, utro ſenſu vox ambigua uſurpetur; ne ſecus error obrepat.

Nam

Nam & vocabula Geometrica, non ſemper eodem ſenſu uſurpantur. Quippe nemo dubitat, quin alio ſenſu occurrat vox *μέρος* 9 *ax* 1. alio vero, 1 *d* 5. nempe illic, partem quan cunq; innuit; hic, nonniſi partem aliquotam. Item *περιέχειν*, 10 *ax* 1, & 1 *d* 2. Illic, duabus rectis contineri ſpacium negatur; hic, duabus rectis contineri dicitur rectangulum. Et ſimiliter alibi.

Sed videamus quæ ſint hic Meibomii nova tradita.

Poſito quod Septimius & Octavius eadem celeritate incedant; *Septimii*, inquit, *celeritas ad celeritatem Octavii eſt in ratione nulla*, (p. 102. l. penult.) Imo vero, inquam, in ratione Simpla, ſive Æqualitatis, nempe, ut 1 ad 1, ut fatetur ipſe p. 103. l. 2. At ille, inquit, *æqualem rationem, nihili ſeu nullam vocat.* (p. 103. l. 7.) At, inquam, quo Magiſtro? qua vel ratione vel authoritate fretus? quæ illum vel Grammatica, vel Mathematica, ſic loqui docuit? Si Matheſin ſpectemus: Eſt quidem Æqualium inter ſe nulla Inæqualitas, nullus Exceſſus, nullus Defectus; at, nullam eſſe rationem, nemo prudens dixerit Mathematicus. Si Grammaticam ſpectemus: quod bis tantundem atque alterum continet, duplum dicitur; quod ter, triplum; quod quater, quadruplum; &c. adeoque, quod ſemel, ſimplum; & non niſi quod nullies continet (adeoque nihil eſt) in nulla ratione dici poteſt conſtitutum. Jam vero, quod æquale eſt, continet ſaltem ſemel tantundem; adeoque Simplum eſt; hoc eſt, in ratione Simpla conſtitutum: non, nullecuplum, ſive in nulla ratione. Nulla itaque ratione aſſerit, æqualium rationem nullam eſſe. Sed videamus utcunque quid obtendat.

Omnes (inquit p. 113. l. 9.) *nihili rationes* (intelligit, rationes ſimplas ſive æquales) *uti ſunt* $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, *ſunt inter ſe æquales*: (omnino. Addo, item omnes duplæ, uti $\frac{2}{1}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{6}{3}$; Vel etiam omnes triplæ, uti, $\frac{3}{1}$, $\frac{6}{2}$, $\frac{9}{3}$.) *Quemadmodum in Logiſtica notæ nullæ*, 0, 0, 0, *inter ſe, tanquam nihili res, æquales exſiſtunt.* (Addo; vel etiam omnes notæ unitatis, 1, 1, 1; vel etiam binarii, 2, 2, 2. &c.) At, inquam, nullo modo hinc ſequitur, Rationes Simplas eſſe rationes nihili, magis quam, Rationes duplas, triplas, aliaſve, rationes nihili eſſe. Sed procedamus. Quid porro?

Porro, inquit p. 104. l. 20. *ratio dupla* $\frac{2}{1}$, *a ratione nihili* (ſimplam, intelligit) $\frac{1}{1}$, *tanto abeſt, quanto ab eadem ratione nihili in*

alteram partem eſt ratio ſubdupla $\frac{1}{2}$. Recte quidem: quippe ea duplo major eſt, hæc duplo minor, quam ratio ſimpla. *Itaque*, inquit, *ratio* $\frac{1}{2}$ *æqualis eſt rationi* $\frac{2}{1}$. Nullo modo. Non enim quæ ab eodem æqualiter in oppoſitas partes differunt ſunt ideo protinus æqualia. Non utique, inquam, ſequitur; quod, ſi numerus octonarius, ſit, quam quaternarius, duplo major; & binarius, eodem, duplo minor; propterea binarius æquabitur octonario. Et quidem, cur hoc minime admittendum ſit, ab eodem ipſo mox audiemus argumenta. At, inquit, *ideo autem ratio* $\frac{1}{2}$, *æqualis eſt rationi* $\frac{2}{1}$, *quod inter illius terminos,* 1 *&* 2, *tantum intervallum ſit, quantum inter hujus terminos,* 2 *&* 1. Verùm, inquam, neque hoc ſequitur. Non enim ex terminorum inverſe ſumptorum æquali intervallo, ſed ab eorum directe ſumptorum æquali Quotiente, colligitur æqualis Ratio. At verò, ſi 1 per 2 dividamus, & 2 itidem per 1, eundem utrobique quotientem provenire, nos negamus; nec ipſe, credo, affirmabit. Sed pergat.

Intervallum autem, inquit p. 105. l. 2. *ſeu diſtantia inter duas has rationes* $\frac{2}{1}$, $\frac{1}{2}$, *eſt ratio bis dupla, ſeu* $\frac{4}{1}$. Egregie quidem, atque μαθηματικωτάτως, Nempe, duorum invicem æqualium; alterum alterius eſt bis duplum. Siquidem hæc cum præcedentibus cohærent optime. Sed videamus, qui probet.

Quoniam enim, inquit, *ratio* $\frac{1}{1}$, *ſuperat rationem* $\frac{1}{2}$, *ratione* $\frac{2}{1}$; *ſed rationem* $\frac{1}{1}$, *ſuperat ratio* $\frac{2}{1}$, *ratione* $\frac{2}{1}$; *Ergo ratio dupla* $\frac{2}{1}$, *ſuperat rationem ſubduplam* $\frac{1}{2}$, *ratione bis dupla, id eſt, quadrupla.* Omnino recte. Verum hinc ego ſic diſputo. Quorum alterum alterius quadruplum eſt, ea non ſunt inter ſe æqualia: ſed, rationum $\frac{2}{1}$, & $\frac{1}{2}$, altera alterius quadrupla eſt: Æquales itaque non ſunt. Vel, ſi illa loquendi formula diſpliceat, ſic accipiat; Quorum hoc illud ratione quadrupla ſuperat, ea non ſunt inter ſe æqualia: Sed ratio $\frac{2}{1}$, rationem $\frac{1}{2}$, ratione quadrupla ſuperat. Æquales itaque non ſunt. Sed pergit.

Quod etiam ex additione (ſeu compoſitione) *planum fit. Si enim, rationi ſubduplæ, addatur ratio quadrupla, inde fit ſeu componitur ratio dupla.* Atque hoc etiam recte. quippe $\frac{1}{2} \times \frac{4}{1} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1}$. Argumentamur itaque ut prius; Rationes $\frac{1}{2}$ & $\frac{2}{1}$, non eſſe æquales; cum hæc illam ſuperet ratione quadrupla.

Atque his habet ſimilia, de rationibus ſeſquialtera & ſubſeſquialtera, p. 106. l. 19. &c. Nempe *Ratio ſeſquialtera* $\frac{3}{2}$, *&*

ſubſeſ-

ſubſeſquialtera $\frac{4}{6}$*, quamvis non eædem ſint, ſunt inter ſe æquales:* At interim, *inter ſe diſtant ratione bis-ſeſquialtera, ſeu dupla ſuperquarta.* Quæ quam bene inter ſe cohæreant, ipſe viderit.

Multa habet his intermiſta exſempla; a motu in contrarias partes deſumpta: quæ nec præſenti ſuo negotio admodum favent, & ſunt aliis nominibus vitioſa: ſed quæ non tanti ſunt ut ea curioſius expendam. Hoc autem pede fere claudicant omnia: Nempe, quod, cum duplum acceſſum ſic deſignaverit $\frac{2}{1}$, duplum receſſum deſignandum putet $\frac{1}{2}$; (ut p. 104. l. 19. & alibi paſſim:) quaſi quidem, inverſio rationis, indicaret motum contrarium. At, inquam, contrarietas motûs, indicanda erat, non inverſione rationis, (nam ſi $\frac{2}{1}$ acceſſum indicet, etiam $\frac{1}{2}$ indicabit item acceſſum, utut minorem:) ſed, mutatione ſignorum $+$ $-$: Puta ſi $+\frac{2}{1}$ duplum acceſſum indicet, duplum receſſum indicabit $-\frac{2}{1}$, non autem $+\frac{1}{2}$. Hoc autem cum ille non ſatis intellexerit, ſibi fraudi fuit. Quamvis enim verum omnino ſit, quod exſemplo ſuo ibidem it probatum; nempe, receſſum partium duarum, non minus duplum eſſe receſſûs partis unius, quam eſt duarum partium acceſſus, duplus acceſſus partis unius; adeoque eandem ſive æqualem rationem: Cum tamen hinc infert; propterea, rationem $\frac{1}{2}$, æqualem eſſe rationi $\frac{2}{1}$; omnino hallucinatur. Inferendum enim erat; $-\frac{2}{1}$ ad $-\frac{1}{1}$, eandem vel æqualem eſſe rationem, atq; $+\frac{2}{1}$ ad $+\frac{1}{1}$. Quod quidem verum eſt; ſed, a ſuis ſenſis ſatis remotum.

Eâdem fere ſemper oberrat chordâ, in exſemplis ſive inſtantiis ſuis paſſim allatis: quod cum ei fraudi fuerit non ſemel, nobis ſaltem ſemel indicaſſe ſufficiat; nec opus ſit ſæpius repetere, cum quilibet, paulo attentior, facile deprehendat.

Potuiſſet quidem Meibomius, hujus erroris ſatis moneri, cum viderit Lucium & Titium, tum, ex hypotheſi, eadem celeritate moveri; tum, juxta ſuum ipſius calculum, alterum milliaria 81 eodem confeciſſe tempore quo alter non niſi 16 confecerit. Unde dum ſe extricare conatur, p. 107. l. 24. omnino nihil agit.

Quæ, de Divitiis & Paupertate comparandis, habet, p. 110. item de Miſtorum viribus, p. 111. &c. neque admodum perſpicue tradita ſunt, & parum accurate: Sed quæ tuto omitti poſſunt, cum nihil inde magni colligere poſſit quo ſententiam

 ſuam

ſuam ſtabiliet; nec ad ſingulas minutias, lectorem detinendum putem. Quod vero, ut ait p. 183. l. 25. *mirari ſoleat, antiquorum nullum ad utiliſſimam hanc, de miſtorum viribus in data ratione augendis, aut minuendis, contemplationem acceſſiſſe, ut quouſque in his progredi poſſimus, determinaret:* Si vel Pharmacopæos conſuluiſſet, vel Aurifabros, mirari forſan deſiiſſet: quippe in componendis medicamentis, illi; metallis, hi; non ſuis illos artibus carere deprehendat, quibus de miſtorum viribus augendis, minuendis, æſtimandis judicent. Et quidem eo ſpectat totum illud, de *Regula* quæ dicitur *Alligationis*, apud Arithmeticos, negotium.

Quæ de Rationum Compoſitione &c. habentur p. 98. &c. iterumq; p. 114. &c. ſatis tum prolixe tum perplexe (*qua quidem*, inquit, *rationes componendi methodo, rerum natura nullam breviorē admittit, nullam concinniorem* p. 115. *l.* 23.) cui illa bono inſerviant, ego plane non video. Cum enim per 5 *d* 6, ratio ex rationibus $\frac{a}{b}$, $\frac{\alpha}{\beta}$, compoſita, ſit $\frac{a}{b} \times \frac{\alpha}{\beta}$. quid longa narratione opus ſit, ut intelligamus rationi $\frac{a}{b}$, rationem $\frac{\alpha}{\beta}$ componendā, ducendo $\frac{a}{b}$ in $\frac{\alpha}{\beta}$; adeoque diuiſione, adimendam. Ut nempe illic prodeat $\frac{a\alpha}{b\beta}$, quia $\frac{a}{b} \times \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a\alpha}{bc}$; hic vero, $\frac{a\beta}{b\alpha}$, quia $\frac{\alpha}{\beta}) \frac{a}{b} (\frac{a\beta}{b\alpha}$. Cujus item effectionem Geometricam nemo neſcit. Annon autem hæc multo brevior & concinna magis fuerit operatio, quam quâ ille nullam aut breviorem aut concinniorem in rerum natura admitti poſſe judicat; penes lectores ſit judicium.

Cum vero, tum p. 94. l. 4. tum p. 117. l. 25. non niſi minorem rationem majori auferendam putet: non ſatis videtur rationum diminutionem intelligere; quæ non tam ſubductionis, quam diviſionis, opus eſt: poſſe autem fractionem minorem per majorem dividi; nemo neſcit. Cum enim, (ut loquitur p. 116. l. 7.) *rationes* $\frac{2}{1}$ *&* $\frac{3}{4}$ *additæ, faciant rationem* $\frac{6}{4}$; quidni pariter ex compoſita $\frac{6}{4}$, dempta $\frac{2}{1}$ ſupereſſe dicamus $\frac{3}{4}$; atq;

ex-

ex eadem $\frac{6}{4}$, dempta $\frac{3}{6}$, ſupereſſe $\frac{2}{4}$? (utut $\frac{2}{1}$, hoc eſt, $\frac{8}{4}$, majorem eſſe quam $\frac{6}{4}$, ne quidem Meibomius negaverit) quippe, duarum componentium, utravis dempta, ſupereſt reliqua.

Sed videamus quæ ſequuntur. Quippe, cum hactenus, nonniſi *quaſi per nebulam veritatis aliquod lumen conſpeximus*; jam deinceps, *clariſſimum & nulla obſcuritatis nebula interceptum veritatis ſolem viſuros*, pollicetur. p. 118. l. 7. &c.

Rationis, inquit, (p. 118. l. 13.) *natura & eſſentia conſiſtit in duabus ejuſdem generis rebus, ſecundum certam magnitudinem* (addo, diviſione, non ſubductione, æſtimandam) *inter ſe comparatis*; ſeu potius, in earum comparatione. *Quæ diſtantia cum infinitæ ſit aut parvitatis, aut magnitudinis; hinc*, inquit, *colligimus, quavis ratione infinite minorem, aut majorem, ſaltem potentia, dari poſſe*. Et recte quidem hoc colligitur. *Quod fieri poſſe, multi*, inquit, (p. 119. l. 6.) *qui hæc penitus perſpecta non habent, negarint*. At, quæſo, quinam illi? quippe ego illud nulli (niſi qui plane ſit ἀμάθητος) dubium eſſe poſſe putaveram.

Porro, inquit, (p. 118. l. 23.) *rationem quæ in æqualibus magnitudinibus ſpectatur, rationem quidem eſſe ſtatuimus*, (& Recte quidem.) *ſed nullius quantitatis*; (at hoc perperam:) *quod nihili diſtantia magnitudines illius, antecedens & conſequens, inter ſe diſtant*. Imo, inquam, *diſtntia Unitatis*. Uti enim in rationibus $\frac{4}{2}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{8}{4}$, aliiſque duplis antecedentium & conſequentium diſtantia (diviſione quærenda) binario æſtimatur, (quantacunque interim ſit earum differentia, ſubductione quærenda, quæ quidem non omnino attenditur,) unde & denominationem obtinet: ita in rationibus $\frac{2}{2}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{4}{4}$, aliiſque ſimplis, terminorum diſtantia, diviſione patefacta, unitate menſuratur. Quippe, ut illic quotiens eſt 2, ſic hic, 1. (utut differentia, ſubductione quæſita, cujus hic nulla habetur ratio, ſit 0.)

Quæcunque autem alia, magna, parva, (qui ni item & ipſa,) *unitatis loco accipi poteſt*. p. 119. l. 29. Hoc eſt, (quamvis ille videatur hoc neſcire) *Radix* dici poterit, vel *Poteſtas prima*, aut etiam *Ratio expoſita*; quæ aliquoties continuata, hoc, eſt in ſe ducta, ejuſdem *Quadratum*, *Cubum*, *Biquadratum*, &c. exhibebit; vel *Poteſtatem ſecundam, tertiam, quartam, &c.* vel etiam (nam et hoc tantundem valet) *Rationem duplicatem, triplicatem, quadruplicatam, &c.* διπλασίονα, τριπλασίονα, τετραπλασίονα, &c.

E 3 Nempe

Nempe hoc ſuadent quæ poſt occurrunt, *p.* 120. *l.* 4. *Cæterum cum omnis ratio unitatis loco conſiderari poſſit* (nempe ut poteſtas prima, ſeu Radix, puta $\frac{a}{b}$) *ex ea bis compoſita dupla efficitur primæ ſeu ſimplæ*, (duplicatam, intelligit, aut poteſtatem ſecundam, ſeu quadratum, $\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$) *ex ter compoſita, ſimplæ tripla*, (ſeu potius triplicata τριπλασίαν, poteſtas tertia, cubus, nempe $\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3}$:) *ex vicies compoſita, ſimplæ vigecupla*, (hoc eſt poteſtas viceſima $\frac{a^{20}}{b^{20}}$.) *Ter autem compoſita, ſeu tripla*, (triplicatam intelligit, $\frac{a^3}{b^3}$,) *ſeſquialtera eſt bis compoſitæ, ſeu duplæ*, (vel potius duplicatæ $\frac{a^2}{b^2}$: Nam $\frac{a^3}{b^3} = \frac{a^2}{b^2} \times \sqrt{\frac{a^2}{b^2}}$) *quater compoſita, ſupertertia eſt triplæ*; (nempe $\frac{a^4}{b^4} = \frac{a^3}{b^3} \times \sqrt[3]{\frac{a^3}{b^3}}$)

Manifeſtum itaque eſt per rationis expoſitæ duplam, triplam &c. eum hic intelligere, duplicatam, triplicatam &c. διπλασίονα, τριπλασίονα, &c. quas definit Euclides 1 0 *d* 5. hoc eſt, expoſitæ rationis poteſtatem ſecundam, tertiam &c.

Atque harum reſpectu verum eſt $\frac{1}{1}$ vel etiam 1, quæcunque fuerit expoſita ratio, loco nihili habendam, hoc eſt, illius poteſtatem nullam eſſe. (Saltem niſi ipſa ratio expoſita ſit, etiam $\frac{1}{1}$, quo caſu ipſius etiam quotacunque poteſtas eſt $\frac{1}{1}$.) Quippe notum eſt, 1 . ℞ . ʓ . ℭ . ʓʓ . &c. ∺ ſive 1 . a . a^2 . a^3 . a^4 . &c. ∺ hoc eſt, *unitatem, radicem, quadratum, cubum, biquadratum*, &c. eſſe continue proportionalia: & quotacunque expoſitæ radicis poteſtas ſit eorum quodlibet, toties ſupponitur 1 in radicem illā continue multiplicari. puta $1 \times a$ eſt prima poteſtas radicis a, & $1 \times a \times a$ ejuſdem poteſtas ſecunda; $1 \times a \times a \times a$, tertia &c. adeoque 1 ſimpliciter poſita, ejuſdem radicis a poteſtas nulla, quippe in quam nullies ducitur: At $\frac{1}{a}$ poteſtas prima privativa, ſeu inverſa, denominanda

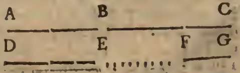
puta

puta ab — 1: Item $\sqrt{a}$, poteſtas dimidiata; quippe media proportionalis inter nullam & primam; & $\sqrt{a}^3$ vel $a\sqrt{a}$, poteſtas dimidiata tertiæ, ſeu quæ dimidiata poteſtate ſuperat primam; puta a $\frac{3}{2}$ vel $1\frac{1}{2}$ denominanda. Et ſic ubivis. Quod autem de radice *a* dictum eſt, puta, dum ponitur $a = \mathfrak{z}$; perinde intelligendum erit de radice quavis alia, puta ſi ponatur $\frac{a}{b} = \mathfrak{z}$: quippe rem hoc ne hilum variabit.

Sed & hinc etiam manifeſte ſequitur, (quod & norunt omnes,) quod, quoties radix ponitur major quam 1; ſingulæ poteſtates continue augentur, (puta ſi $\mathfrak{z} = 2$, erit $\mathfrak{zz} = 4$, $\mathfrak{C} = 8$, &c.) ubi enim in continua multiplicatione, multiplicator (quæ radix eſt) eſt unitate major, multiplicandus pluſquam ſemel ponitur, ut habeatur productum: Quoties autem radix, (hoc eſt, continuus multiplicator) eſt minor quam 1; poteſtates continue decreſcunt (puta ſi $\mathfrak{z} = \frac{1}{2}$, erit $\mathfrak{zz} = \frac{1}{4}$, $\mathfrak{C} = \frac{1}{8}$, &c.) quia tum multiplicandus ponitur minus quam ſemel; nempe ipſius aliquanta pars; & propterea ſequens poteſtas præcedente ſemper minor erit: Si autem radix ſit 1; aut etiam $\frac{1}{1}$; poteſtates omnes nec auctæ erunt nec diminutæ; ſed & ipſæ, 1: (nam ſi $\mathfrak{z} = 1$, erit $\mathfrak{zz} = 1 \times 1 = 1$, & $\mathfrak{C} = 1 \times 1 \times 1 = 1$. &c.) quia cum multiplicator eſt 1, mulitiplicandus præciſe ſemel ponitur.

Quod autem hic de poteſtatibus univerſim ex quacunque radice dictum eſt; id & ſpeciatim in rationibus valet: puta, ſi expoſita ratio, ſeu radix, ſit major quam $\frac{1}{1}$; ratio duplicata, triplicata, &c. hoc eſt, poteſtas ſecunda, tertia, &c. continue creſcunt: ſin minor; decreſcunt: ſi denique æqualis, æquales. Quod quidem ſi advertiſſet Meibomius, non fuiſſet miratus, (p. 171. l. 22, & p. 173. l. 19. & alibi,) rationem minorem, majoris duplicatam, aut triplicatam, &c. dici poſſe. Hujus quidem rei ignorationem, errorum ſuorum prope omnium originem & fontem judicamus.

Cum autem ait, p. 121. l. *penult. In diagrammate*, A B, *ut ita dicam, nulla eſt ipſius C B: at C B ſeu D E dupla eſt ipſius F G.* Mirum eſt quam ſe, ambigua, vocis *dupla*, ſignificatione inopi-



nato

ſum, 4 *ad* 5 *majorem rationem habere, quam* 4 *ad* 7; aut etiam (ut p. 127. l. 4.) 16 *ad* 24, *minorem habere rationem quam* 21 *ad* 31; *Cum contra ſtatuendum ſit,* 16 *ad* 24, hoc eſt 21 *ad* 31 $\frac{1}{2}$, *majorem habere rationem quam habeat* 21 *ad* 31; *quoniam major eſt diſtantia inter* 21 *&* 31 $\frac{1}{2}$, *quam inter* 21 *&* 31. *Falſa igitur* (inquit) *eſt octava propoſitio libri quinti Elementorum Euclidis* &c. p. 126. l. 8. Eſtque hæc argumentationis ſuæ ſumma, fideliter (quod nec ipſe, credo, diffitebitur) collecta, ſuiſque ipſius verbis expreſſa.

Nolo ego ad hæc reponere, quod ipſe Euclidem reponentem introducit. p. 129. l. 18, *Sique unquam ineptiæ, & olim, cum inter mortales degerem, & ex quo hac beata quiete mihi frui licuit, ſando ad aures meas pervenere, inter illas certe has primo loco cenſere poſſum.* Sed, quæ ad argumentationis vires dicenda ſunt, reponam: quippe & multa perperam ſupponit, & juſta deeſt multoties conſequentia.

Dicimus itaque 1°. *Arithmeticam*, ut loquitur, *rationem*, in terminorum ab invicem diſtantia, ſive differentia, fundatam, Subductionis ope colligenda. Sic tripondii & bipondii, aut etiam quadripondii & tripondii, differentia, eſt, unum pondo; lineæ tripedalis & bipedalis differentia, eſt, linea pedalis: numeri quinarii & ternarii, vel etiam denarii & octonarii, differentia, eſt binarius.

2° Differentiam illam dicimus, non quidem Arithmeticam rationem eſſe, (proprie loquendo,) aut etiam ipſius rationis eſſentiam; ſed fundamentum iſtius relationis, quæ dicitur ratio arithmetica; quæ tamen alia atque alia eſt, prout ad hunc aut illum terminum refertur. Sic numerus binarius non eſt relatio, nedum ratio vel arithmetica vel geometrica, quam habet vel quinarius ad ternarium, vel hic ad illum: ſed quinarii ad ternarium ratio, eſt *exceſſus binarii*; ſeu binario major eſſe; ternarii ad quinarium ratio eſt, *defectus binarii*, ſive binario minor eſſe. Quæ quidem rationes ſive relationes, utut eodem fundamento abſoluto nixæ, non eadem ſunt relatio, nec quidem æquales; ſed et ſatis diverſæ, atque hac illa major: Sicut & Patris ad Filium, & Filii ad Patrem, eadem relatio non eſt, (nec quidem æqualis, ſed hac illa ſuperior) utut utriuſque fundamentum ſit eadem generandi actio.

3° Omnino igitur inconſulte dictum eſt, & admodum in-

concinne, $+1$ & -1, *æquales eſſe:* & quod nemo ſobrius dixerit. Quippe ille huic æqualis non eſt numerus; ſed integro binario major. (Eſt enim $+1 = -1+2$.) Neque enim, quod 1 & 1 tantundem ſint, ideo & æquari dicendum erit $+1$ & -1; niſi inſuper, tantundem eſſe, dicamus, *excedere* & *deficere*. Nec quidem meliori ratione dicet $0+1$ & $0-1$ tantundem eſſe, quia utrobique æqualiter ab 0 receditur; quam tantundem eſſe $4+1$ & $4-1$, quia utrobique æqualiter receditur a 4. Quodque ait, p. 141. l. 8. *majus eſſe, quod longius ab initio ſuo, hoc eſt, a nihilo, diſtat*; Verum quidem eſt, dummodo creſcendo diſtent: at verò quod, decreſcendo, a principio ſuo longius diſtat, id minus eſt. Et ſicuti $4-2$, minus eſt quam $4-1$, quia, a communi principio 4, id longius diſtat decreſcendo; ſic & ob eandem cauſam, $0-2$, minus eſt quam $0-1$, quoniam magis, a principio ſuo 0, decreſcendo diſtat. Quippe, quod magis deficit, id minus eſt.

4° Dicimus pariter, *Rationis* item *Geometricæ*, fundamentum eſſe, terminorum ab invicem *diſtantiam*; non autem, ut prius, *Subductione*, ſed *Diviſione* æſtimandam. Non enim, quia 4 & 2, atque 4 & 6, binario pariter diſtant, ergo & eandem utrobiq; diſtantiam, quæ nempe rationem ſpectet, dicet Meibomius. Quanquam enim tum $4-2=2$, tum $6-4=2$; non tamen rationem 2 ad 4, atq; 4 ad 6 vel 6 ad 4, eandem eſſe, aut æqualem, reputat: Sed 4 ad 2, atque 8 ad 4, eandem eſſe rationem dicet, atque eandem ab invicem terminorum diſtantiam, nempe diviſionalem; quia tum $\frac{4}{2}=2$, tum $\frac{8}{4}=2$. Nec quidem alio ſenſu verum erit, rationis duplæ & ſubduplæ magnitudines æqualiter invicem diſtare. Peto enim, Annon eadem ſit ratio, quadripondii ad bipondium, atque quadripedalis lineæ ad bipedalem? Affirmabit, credo. Ergo, inquam, Diſtantiæ ſunt utrobique æquales. Quod ipſum, credo, fatebitur; certe inficiari non debet. Verum hoc de diſtantia reſiduali (ſubductione quærenda) dici non poteſt. Quippe reſidunm, illic Pondus eſt; hic, Linea: at pondus lineæ nemo ſobrius æquale dixerit, cum ſint heterogenea. De diſtantia itaque Diviſionali intelligendum erit: nempe linea quadripedalis bipedalem lineam toties præciſe continet, quoties quadripondium continet bipondium. quippe ut 2 L) 4 L (2, ita 2 P) 4 P (2. Porro, eſto verbi gratia quantitas A, quadripondium: erit hujus duplum

2 A, octipendium; ſubduplum $\frac{1}{2}$ A, bipondium: Frit quidem diſtantia diviſionalis, utrobique æqualis; nam tum A) 2 A (2, tum $\frac{1}{2}$ A) A (2: at in ſubductione ſecus eſt, quippe 2 A $-$ A $=$ A, at A $- \frac{1}{2}$ A $= \frac{1}{2}$ A. Non igitur, hoc ſenſu, eadem eſſet utrobique terminorum diſtantia. Neque interim dicere poteſt, reductionem faciendam eſſe ad communem vel antecedentem vel conſequentem, priuſquam fiat hæc comparatio: nam neq; ille hoc facit, cum dicit rationes $\frac{3}{4}$ & $\frac{4}{3}$, (aut etiam $\frac{1}{2}$ & $\frac{2}{1}$,) invicem æquales, quod termini æqualiter utrobique ab invicem diſtent. Nam rationes $\frac{3}{4}$ & $\frac{4}{3}$, ad communem conſequentem reductæ, erunt $\frac{9}{12}$ & $\frac{16}{12}$; ad communem vero antecedentem reductæ, erunt $\frac{12}{16}$ & $\frac{12}{9}$; at neutro modo erunt æquales terminorum differentia, ſed in altera $12 - 9 = 3$, in altera $16 - 12 = 4$. Intelligendum igitur erit, vel ad mentem ſuam, de diſtantia diviſionali; ex diviſionis quotiente æſtimanda: quam & nos agnoſcimus rationis Geometricæ fundamentum eſſe.

5° Negamus tamen, hanc diviſionalem *diſtantiam*, eſſe ipſam rationem, ſive (ut loquitur) *naturam & eſſentiam rationis Geometricæ*: Sicut & ante negavimus reſiduale differentiā eſſe rationem Arithmeticā. Eſt quippe ratio, ea quæ ex hac diſtantia oritur Relatio, quę interim, prout hunc illumve terminum reſpicit, eſt alia atq; alia; puta *tantuplo majus*, & *tantuplo minus*. Atque hoc didiciſſe potuerat ab eo quem citat p. 167. l. 2. *Theone Smyrnæo*; cujus hæc verba profert; ἀπὸ τῶν δύο πρὸς τὸ ἕν, καὶ ἀπὸ τοῦ ἑνὸς πρὸς τὰ δύο, διάστημα ἓν καὶ τὸ αὐτὸ, λόγος δὲ ἕτερος· τῶν μὲν δύο πρὸς τὸ ἕν, διπλάσιος· τοῦ δὲ ἑνὸς πρὸς τὰ δύο ἥμισυς. *A binario ad unitatem, & ab unitate ad binarium unum idemq; eſt intervallum,* (de intervallo diviſionali, loquitur; qualia ſunt intervalla muſica;) *Ratio autem diverſa: binarii ad unitatem dupla; unitatis ad binarium, dimidia,* Eodem plane modo, quo Patris a Filio, & Filii a Patre, idem eſt intervallum; at diverſa ratio; nempe hæc illius inverſa; utraque ab eodem fundamento orta.

6 Peſſime itaque infertur, ob idem utrobique intervallum, ſive æqualem diſtantiam (diviſionalem,) æquales eſſe rationes duplam & ſubduplam. Quippe ratio dupla $\frac{2}{1}$, relatum dicit correllato ſuo *eſſe duplo majus*; at ſubdupla $\frac{1}{2}$; *duplo minus eſſe*; Eodem plane modo quo, binarii exceſſus $+ 2$, indicat *binario majus eſſe*; & binarii defectus $- 2$, *binario minus eſſe*. At nemo

ſobrius, *duplo majus eſſe*, & *duplo minus eſſe*; vel etiã *binario majus eſſe*, & *binario minus eſſe*; pro eodem vel æquali habebit: niſi qui & *maius*, ac *minus*, tantundem eſſe velit. Rationem autem, *Relationem* eſſe, non tantùm *Relationis fundamentum*, ex ipſa definitione patet, quæ nec Meibomio diſplicet; dicitur enim σχέσις, quod eſt, ipſo Interprete, *Relatio*.

7 Quod itaque contendit, *rationem 4 ad 7, majorem eſſe quam rationem 4 ad 5*, (atque his ſimilia:) quippe, quia major terminorum ab invicem diſtantia: (quo ſolo nomine falſas eſſe contendit. prop. 8. & 10 *e* 5 Euclidis, ejuſque 7 *d* 5. & demonſtrationes tum propp. 14, 20, 21, *e* 5. tum Archimedis 2 *l* 1 de Sphæra & Cylindro, atque Eutocii in illam commentationes, multas item Pappi propoſitiones in lib 7. Collectaneorum; aliaſque a Theone & aliis traditas; ut liquet p. 126. &c. item Clavii, Gregorii, aliorumque plurimas. Et quidem, tum *totam antiquitatem ignoratæ in quibuſdam Elementis Geometriæ*, tum *juniorum pravas explicationes & monſtroſas hallucinationes*, ſe inde *demonſtraturum* ſperat, p. 127. l. 24.) omnino falſum eſt. Adeoq; quæ hinc dependent omnia, (hoc eſt, tota doctrina ſua nova,) ſponte corruunt. Verum quidem eſt, 4 *a* 7 *magis deficere*, quam 4 *a* 5, adeoque rationem innuere *magis defectivam*: quod ipſe contendit p. 143. l. 12. At vero, quod eſt *magis defectivum*, ſive *magis exiguum*, id, nobis videtur, *minus eſſe*, non *majus*: adeoque & Rationem *magis deficientem*, appellabimus *minorem*; ſicut tum veteres, tum (excepto Meibomio) recentiores omnes. Si autem Meibomius per *majus*, intellectum velit, *magis exiguum*; ſecum loquatur licet, cumque Hermotimo ſuo, atque Euthymio; (ſuumque illis prædicet acumen eſſe *maximum*;) ſiquidem reliqui hoc non intelligent.

8 Nos itaque nec *exploſum* iri patimur, nec *antiquatum*, veterem loquendi morem, (quod vult Meibomius p. 93, & 110.) Nec eam, quam habet p. 134. l. 14. conſequentiam admittimus, *Si ratio* $\frac{7}{4}$ *major eſt ratione* $\frac{5}{4}$ *ſeu, quod idem eſt, ſi ratio* $\frac{5}{4}$ *minor eſt ratione* $\frac{7}{4}$; *etiam revertendo, ratio* $\frac{4}{5}$ *minor eſt ratione* $\frac{4}{7}$. Rationem utique *majorem* dicimus, non quæ utcunque *ab æqualitate magis recedit*, ſed quæ *vel æqualitatem magis ſuperat, vel ab ea minus deficit*; quæ autem *vel minus ſuperat, vel magis deficit*, eam nos *minorem* rationem (antiqua nomenclaturâ) appellamus. Siquidem rationem triplam $\frac{3}{1}$, dupla $\frac{2}{1}$, majorem dicimus; quia

3 A, plus eſt quam 2 A. Item rationem ſubduplam $\frac{1}{2}$, majorem eſſe, quam ſubtriplam $\frac{1}{3}$, (utut hæc ab æqualitate magis recedat,) quia $\frac{1}{2}$ A, plus eſt, quam $\frac{1}{3}$ A. Et quanquam ille multis contendat, aliter de minutiis, aliter de rationibus judicandum, pag. 131. &c. quippe, (ut ait p. 133. l. 10.) *ratio* $\frac{6}{4}$, *æqualis eſt duabus* $\frac{6}{5}$ *&* $\frac{5}{4}$; *at minutia* $\frac{6}{4}$, *æqualis duabus* $\frac{5}{4}$ *&* $\frac{1}{4}$ nos utrobique idem dicendum non dubitamus, nempe tum minutiam, tum rationem, $\frac{6}{4} = \frac{6}{5} \times \frac{5}{4}$; & non minus tum minutiam, tum rationem, $\frac{6}{4} = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}$. Et quidem nil aliud ſunt minutiæ, ſive fractiones, quam rationum indicia. Ecquid enim eſt $\frac{1}{2}$ A, quam quod eſt ad A, ut 1 ad 2? & $\frac{3}{2}$ A, quam quod eſt ad A, ut 3 ad 2 &c. & ſic ubique. Sive enim dicamus $\frac{1}{2}$ A, quantitatis A dimidium eſſe, ſive ſubduplum, perinde eſt. Quod nec Meibomius negare debet, qui p. 166. l. 25. *rationem dimidiam*, atque *ſubduplam*, pro eodem habet.

9. Quod autem dimidium ſive ſubduplum, majus ſit quam Triens ſive ſubtriplum, (& de reliquis ſimiliter,) ſi dubitet, ſic probamus. *Omnes homines totum quavis ſua parte majus eſſe communi notione percipiunt*, (dictante Meibomio, p. 141, l. 16.) At, ſubtriplum ſubdupli pars eſt: ergo, hoc illo majus eſt. Minorem hoc exſemplo probamus. Subtriplum libræ, ſunt 4 unciæ; (ſicuti libra eſt harum triplum:) ejuſdem libræ Subduplum ſunt unciæ 6; (ſicuti libra eſt harum duplum:) Sunt autem 4 unciæ, unciarum 6, pars aliqua; ſubtriplum itaque ſubdupli pars eſt, adeoque minus, quod erat probandum. Vel ſic aliter, ad mentem ſuam. Ratio $\frac{1}{3}$, per ipſius doctrinam: componitur ex duabus additis $\frac{2}{3}$ & $\frac{1}{2}$; adeoque ſua parte $\frac{1}{2}$, major eſt; quod erat probandum. (Sed, ad hominem, hoc ultimum dictum eſto, magis quam ad rem; non enim ego propterea exiſtimo, quicquid ipſe putaverit, rationem $\frac{1}{3}$ aut minorem eſſe quam $\frac{1}{2}$, aut etiam huic æqualem: utut diſtantia terminorum, ſi diviſionem ſpectemus, ſit illic minor; ſi ſubductionem, æqualis. Nam $3 - 2 = 1 = 2 - 1$; item 2) 3 ($1\frac{1}{2}$, ut 1) 2 (2. ſed ad hominem valet argmentũ poſterius; ad rem ſaltem prius.) Vel ſic tertio adverſus eundem argumentamur. *Si æqualibus æqualia addantur, aggregata erunt æqualia.* per 2 ax 1. At, ſi rationibus $\frac{4}{3}$ & $\frac{2}{4}$ addantur æqualia, (puta utrobique ratio, $\frac{4}{1}$,) aggregata non erunt æqualia; (quippe illic $\frac{16}{3} = \frac{4}{3} \times \frac{4}{1}$, hic vero $\frac{8}{4} = \frac{2}{1} = \frac{2}{4} \times \frac{4}{1}$, ne quidem Mei-

 bomio

bomio refragrante :) Non itaque æquales ſunt rationes $\frac{4}{3}$ & $\frac{2}{4}$, quod vult Meibomius. Item quarto. *Si æqualibus inæqualia addantur tota erunt inæqualia* ; (per 4 ax. 1) & quidem *illud majus, ubi majus additur :* (quod, credo, nec Meibomius negabit.) At, ſi rationibus $\frac{4}{3}$ & $\frac{2}{4}$ addantur inæqnalia ; illic $\frac{4}{1}=\frac{16}{3}$, hic $\frac{64}{6}$; aggregata erunt æqualia , nempe utrobique $\frac{16}{3}=\frac{4}{3}\times\frac{4}{1}=\frac{2}{4}\times\frac{64}{6}$. Non itaque æquales ſunt rationes $\frac{4}{3}$ & $\frac{2}{4}$, quod vult Meibomius. Item, ſi rationibus æqualibus $\frac{2}{1}$, $\frac{2}{1}$, addantur (Meibomii ſenſu) rationes $\frac{4}{5}$ & $\frac{4}{7}$; aggregatum illud ubi additur $\frac{4}{5}$, (nempe $\frac{8}{5}=\frac{2}{1}\times\frac{4}{5}$,) majus erit eo ubi additur $\frac{4}{7}$, (nempe $\frac{8}{7}=\frac{2}{1}\times\frac{4}{7}$:) ratio itaque $\frac{4}{5}$ major eſt quam ratio $\frac{4}{7}$; non autem minor, quod vult Meibomius. Item quinto. *Si ab æqualibus æqualia adimantur , reſidua erunt æqualia* ; per 3 ax. 1. At ſi a rationibus $\frac{4}{3}$, $\frac{2}{4}$, auferantur æqualia, (puta utrobique ratio $\frac{2}{1}$,) reſidua non erunt æqualia (ſed illic $\frac{4}{6}$ ſeu $\frac{16}{24}$; hic vero $\frac{2}{8}$; quippe $\frac{2}{1}$) $\frac{4}{3}$ ($\frac{4}{6}=\frac{16}{24}$, & $\frac{2}{1}$) $\frac{2}{4}$ ($\frac{2}{8}$, etiam Meibomii ſenſu.) Non igitur æquales ſunt expoſitæ rationes $\frac{4}{3}$, $\frac{2}{4}$, quod vult Meibomius. Tandem ſexto. *Si ab æqualibus inæqualia auferantur , reſidua erunt inæqualia* ; (per 5. ax 1.) & quidem *illud minus, ubi majus aufertur* ; (quod nec inficiabitur, credo , Meibomius.) At ſi a rationibus $\frac{4}{3}$ & $\frac{2}{4}$, auferantur inæqualia, illic quidem ratio $\frac{10}{9}$, hic autem ratio $\frac{5}{12}$; reſidua erunt æqualia ; nempe utrobique ratio $\frac{6}{5}$, (nam $\frac{10}{9}$) $\frac{4}{3}$ ($\frac{36}{30}=\frac{6}{5}$ atq; etiã $\frac{5}{12}$) $\frac{2}{4}$ ($\frac{24}{20}=\frac{6}{5}$, ut patet.) Non igitur æquales ſunt rationes $\frac{4}{3}$ & $\frac{2}{4}$, quod vult Meibomius. Item, ſi ab æqualibus rationibus $\frac{2}{1}$, $\frac{2}{1}$, auferantur (item Meibomii ſenſu ,) rationes $\frac{4}{5}$ & $\frac{4}{7}$; reſiduum illic minus erit, hic majus (quippe $\frac{4}{5}$) $\frac{2}{1}$ ($\frac{10}{4}=\frac{10}{4}$; at $\frac{4}{7}$) $\frac{2}{1}$ ($\frac{14}{4}=\frac{14}{4}$; ut patet.) Ergo, quæ illic aufertur ratio $\frac{4}{5}$, major eſt quam quæ hic aufertur $\frac{4}{7}$: Non autem minor , quod vult Meibomius. Et quidem, niſi hæc abunde ſufficerent , addi poſſent iſtis alia infinita quibus conſtaret, quam abſurde dictum ſit , rationes $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, item $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{4}$, &c. invicem æquales ; aut etiam rationem $\frac{4}{2}$ majorem eſſe quam $\frac{4}{3}$; & quæ his ſimilia.

10. Cum itaque quæ adverſus prop 8 *e* 5 Euclidis (aliaq; quæ ab hac dependent) adducit Meibomius, a p. 126. ad p. 136. incluſive ; huic nitantur omnia, quod ratio $\frac{4}{2}$ major ſit quam ratio $\frac{4}{3}$ (ſic enim ipſe ait p. 136. l. 3. *Cæterum omnis hæc ratiocinatio , quâ Euclidei Theorematis falſitatem demonſtramus , paucis verbis*

verbis includi poteſt. Quoniam enim ratio $\frac{7}{4}$ major eſt quam ratio $\frac{5}{4}$, quod in iſta 7 ſupra 4 majori ſpacio adſcendat quam 5 ſupra eundem 4; idcirco & ratio $\frac{4}{7}$ major eſt, quam ratio $\frac{4}{5}$, quod 4 infra 7 magis deſcendat quam infra 5.) quod quam abſurde dictum ſit jam oſtendimus: Inconcuſſa manet Euclidei dicti veritas; adeoque & quæ inde rite deducuntur omnia ab Eutocio, Archimede, Pappo, Theone, aut etiam recentioribus. Nec dum neceſſe eſt, (quod contendit ille p. 148. l. 16.) *ut Euclides, cæteriq; in hac cauſa victi, circinum & regulam Meibomio tradant.*

Quæ deinceps de Euclidis Demonſtratione habet, (a p. 136. l. 9. & ſequentibus ad p. 141. incluſive.) partim nihili ſunt, partim ſibi adverſantur. Nam 1°. Dum p. 137. l 8. *falſam eſſe* ait 8 *def* 5. cui illa innititur demonſtratio: hoc tantum vult; *Majoris rationis* eam Euclidis definitionem, ei, quam appellat Meibomius majorem rationem, minime convenire. Quod quidem verum eſt. Siquidem per *rationem majorem* aliud vult Euclides, aliud Meibomius. Definit autem Euclides, non quid Meibomius, ſed quid ipſe per Majoris Rationis appellationem intellexit. Et quidem recte. Quippe eodem ſenſu ubique in ſuis propoſitionibus intelligitur *major ratio*, quo in illa definitione intelligendam eſſe dixerat. Quod neque Meibomius negari poterit: ut nec, Euclidis propoſitiones omnes, eo ſenſu intellectas veras eſſe: Hoc eſt, quo ſenſu ſe intellectum vult Euclides, eo ſenſu quæ dixit vera eſſe. 2° Dum *pag.* 141. perhibet demonſtrationem illam ex 8 *def.* 5. petitam *ineptam* eſſe: videtur haud ſatis intellexiſſe, quid ſit, apud Geometras, ex definitione demonſtrare. Poſito enim, quod ea ſit *majoris rationis* definitio, quæ habetur 8 *d* 5; non aliter demonſtrare debuit, rationem, de qua 8 *e* 5 agitur, majorem eſſe; quam oſtendendo, majoris rationis definitionem huic convenire: quod ibidem ab Euclide factum eſt; nec (ſi demonſtrationem eam ſatis intelligat) Meibomius id inficiabitur. 3° Quod autem habet, *p.* 137. *l.* 10 Nempe, *ut majori certitudine omnia clareſcant, ſe novum adhuc ſuum quoddam de rationibus Geomemetricis inventum nobis non inviſurum, ex quo, ſiquid tamen certi a mortalibus comprehenditur, evidentiſſimam doctrinam de rationum magnitudinibus explorandis hauriemus*: cujus quidem inventi ſumma hæc eſt, *ſi rationis antecedentem terminum multiplicemus*, fit *rationis additio*, adeoque ratio augetur, hoc eſt, fit major; *ſin conſequentem*,

tem, fit *rationis ablatio*, adeoque ratio minuitur, hoc eſt, fit minor. Hoc, inquam, *ſuum* fortaſſe eſſe poterit; at certe *novum* non eſt inventum: quippe nemo hoc non novit, (id ipſum nempe tradit ea quam ille oppugnatum it 8 e 5.) ſed & ſibi adverſatur vel maxime. Nam, juxta hanc regulam, ſi rationis $\frac{4}{5}$, conſequentem 5 multiplicemus in $1\frac{2}{5} = \frac{7}{5}$, ut fiat ratio $\frac{4}{7}$ (nam $5 \times 1\frac{2}{5} = 7$,) minuitur ratio $\frac{4}{5}$, ablatione rationis $\frac{2}{5}$. Non itaque major erit ratio $\frac{4}{7}$ quam $\frac{4}{5}$ (quod vult Meibomius,) ſed minor erit. Item rationis $\frac{4}{7}$ ſive $\frac{20}{35}$, antecedentem 20, multiplicemus in $1\frac{2}{5} = \frac{7}{5}$, ut fiat ratio $\frac{28}{35}$ (nam $20 \times 1\frac{2}{5} = 28$) hoc eſt $\frac{4}{5}$, augebitur ratio $\frac{4}{7}$, adjecta ratione $\frac{7}{5}$; adeoque ratio $\frac{28}{35}$ hoc eſt $\frac{4}{5}$, major erit quam $\frac{20}{35}$ hoc eſt $\frac{4}{7}$; non autem (quod vult Meibomius) minor erit.

Deinde vero a pag. 141. ad p. 148. incluſive, vix quicquam occurrit novi: ſed eadem ſubinde canitur cantilena. Quod enim p. 147. ex Harmonica producitur, parum ad rem ſpectat: quippe de Intervallis tantum agit, non de Rationibus: (aliud autem eſſe Intervallum, διάστημα, aliud Rationem, λόγον· Ex Theone Smyrnæo modo dictum eſt: quod cum non ſatis animadverterit Meibomius, quæ ex Harmonicis ſibi favere putaverit, revera fraudi ſunt.) Ecquis enim dubitat, quin inter 6 & 3, atque inter 3 & 6, idem ſit intervallum? (aut etiam inter Patrem & Filium, atque Filium & Patrem?) at interim eandem aut æqualem eſſe rationem (hoc eſt, Relationem,) 6 ad 3, atque 3 ad 6, ſive Arithmeticam, ſive Geometricam, haud quiſquam dixerit, (niſi qui & relationem Patris ad Filium, & Filii ad Patrem, tantundem eſſe dixerit.) Nam, quod ad rationem ut loquuntur Arithmeticam, 6 eſt ternario major quam 3; at 3 ternario minor quam 6: Quis autem *ternario majus eſſe*, & *ternario minus eſſe*, tantundem eſſe dixerit? Quod autem ad rationem attinet Geometricam, eſt 6 duplum τῶ 3, at 3 eſt ſubduplum τοῦ 6: nempe illud, duplo majus; hoc, duplo minus: Quis autem, *duplo majus*, & *duplo minus*, tantundem eſſe dixerit?

Quod autem p. 146. l. 3. inſinuatur; *Cæterum facile quoque ex his colligitur, diverſi generis rationes, exceſſivam & defectivam, inter ſe, quatenus una alterâ major eſt, aut minor, comparari non poſſe: quod comparatio ejuſdem generis nomina requirat:* Et p. 153. l. 17. *Exceſſivas rationes cum exceſſivis, & defectivas cum defectivis ſolum comparari poſſe:*

Et

Et ſimiliter p. 129. l. 14. p. 148. l. 1. Et alibi. Mirum eſt quî dixiſſe poſſit. Nam & ipſe hujuſmodi comparationes multoties inſtituit. Puta p. 140. l. 21. *Certiſſimum*, inquit, *eſt*, *majorem eſſe rationem* $\frac{7}{4}$ *quam ſit ratio* $\frac{1}{4}$, *quoniam dum utrique eadem addita eſt*, (nempe ratio $\frac{3}{1}$,) *& eadem ab utraque ablata*, (nempe $\frac{4}{1}$,) *majorem reſiduum relinquit ratio* $\frac{7}{4}$ *quam* $\frac{1}{4}$; *illa*, *rationem* $\frac{21}{16}$; *hæc*, *ne quidem nihili* (æqualitatis, intelligit) *rationem*, *ſed defectivam* $\frac{21}{64}$. Ubi manifeſte comparat rationem (ut loquitur) exceſſivam $\frac{21}{16}$, atque defectivam $\frac{21}{16}$, eamque hac majorem appellat. Sic p. 105. l 4. *Quoniam*, inquit, *ratio* $\frac{1}{1}$ *ſuperat rationem* $\frac{1}{2}$, *ratione* $\frac{2}{1}$; *ſed rationem* $\frac{1}{1}$ *ſuperat ratio* $\frac{2}{1}$, *ratione* $\frac{2}{1}$; *Ergo ratio* (exceſſiva) $\frac{2}{1}$ *ſuperat rationem* (defectivam) $\frac{1}{2}$, *ratione bis dupla*, *id eſt*, *quadrupla*. Si autem exceſſiva defectivam ſuperet, hoc eſt, major ſit; cur interim, *quatenus una altera major eſt aut minor*, *comparari non poſſe*, dixerat. Sed &, *ſimiliter*, inquit, *ratio* $\frac{9}{4}$ *major eſt quam ratio* $\frac{4}{9}$, *ratione* $\frac{81}{16}$. p. 107. l. 6. Item p. 106. l. 27. & p. 144. l. 4. *ratio*, inquit, *ſeſquialtera a ratione ſubſeſquialtera*, *diſtat ratione bis ſeſquialtera*; ne autem dubitemus utra major ſit, addit p. 144. l. 9. rationem *ſeſquialteram exceſſivam* ($\frac{3}{2}$) *ſuperare rationem ſeſquialteram defectivam* (hoc eſt, ſubſeſquialteram $\frac{2}{3}$) *ratione bis ſeſquialtera*.

Quod ipſi hac in re videtur fraudi fuiſſe, hoc eſt: Viderat ille, expoſitæ rationis rationes duplicatam, triplicatam, quadruplicatam, &c. quas appellat ille duplam, triplam, quadruplam, &c. ita conſtitutas eſſe, ut ſi earum aliqua ſit ratio exceſſiva, hoc eſt, ratione ſimpla ($\frac{1}{1}$) major, etiam reliquæ erunt exceſſivæ; ſi defectiva, defectivæ: (quod quidem verum eſt: quippe illud univerſaliter obtinet, ſi radix ſit unitate major, ejus item poteſtates omnes erunt unitate majores; ſi minor, minores; ſi æqualis, æquales:) Adeoque rationes exceſſivam & defectivam, ejuſdem expoſitæ rationis ſive radicis poteſtates non eſſe. Cum itaque nullo ille reſpectu rationem ratione majorem aut minorem putandam eſſe velit, niſi quatenus expoſitæ alicujus pluries pauciuſve multiplicata dici poſſit, hoc eſt, radicis alicujus altior inferiorve poteſtas; quæ ejuſdem radicis ſive expoſitæ rationis poteſtates eſſe non poſſunt, eas inter ſe, quatenus una altera major ſit aut minor, comparai non poſſe putavit. Oblitus interim, ſe ipſum (ne alios dicam) longe aliam majoris minoriſve rationis

G æſtimationem

æſtimationem paſſim adhibere, ut modo dictum eſt. Quaſi quidem non alia de cauſa numerum 16 numero 4 majorem cenſeamus, quam quòd ille, numeri 2 ſit poteſtas ſecunda, ſive Quadratum; hic, quarta, ſive Biquadratum: Et, eadem de cauſa, numerum fractum $\frac{1}{16}$ majorem quam $\frac{1}{4}$, quia radicis $\frac{1}{2}$, ille quidem quadratum; hic biquadratum. Duorum vero, fracti nempe $\frac{1}{4}$, & integri 4; aut etiam fracti $\frac{1}{2}$, & integri 16; neutrum majorem eſſe, aut minorem, putandum ſit; quia nullius radicis, ſive integræ ſive fractæ, uterque poſſit poteſtas eſſe. Quæ omnia quam abſurda dicta ſint nemo non videt. Nam (præterquam quod falſum ſit, numerum $\frac{1}{16}$ majorem eſſe quam $\frac{1}{4}$ partem toto; item, numerorum 4 & $\frac{1}{4}$, vel $\frac{1}{2}$ & 16, neutrum majorem minoremve eſſe;) conſiderationis eſt omnino extraneæ ad numerorum inter ſe majoritatem, aut minoritatem, ſive exceſſum & defectum, æſtimandum, quod ſint tertii alicujus, forinſecus aſſumendi, poteſtas aliqua. Et quidem non magis eſt eſſentiale numero 64, ut ſit poteſtas ſecunda, puta radicis 8; quã ut ſit poteſtas tertia puta radicis 4; aut etiam ſexta, radicis 2; ſed & quarta, radicis $\sqrt{8}$ ſive $2\sqrt{2}$; & quinta, radicis $\sqrt[5]{64}$; aut duodecima, radicis $\sqrt{2}$; item prima, radicis 64; & ſubſecunda, radicis 4096; & ſubtertia, radicis 262144; & poteſtas ſubſeſquialtera, ſive ſubſemitertia, radicis 512: & ſeſquitertia, ſive quartæ ſubtertia radicis, $16\sqrt{2}$. Et ſic in infinitum. Quodque de radicis numeroſæ poteſtatibus dictum eſt, id univerſim valet de cujuſcunque generis aliis, & ſpeciatim, de Rationibus, gradatim multiplicatis. Adeoque omnino ineptiſſimum eſt, earum magnitudines, ab eo quem habent poteſtatis gradu æſtimare. Addo inſuper, ſuperiorem poteſtatem ſive gradum nonnunquam minoris eſſe magnitudinis: Nec quidem ſumptis tantum variis radicibus, puta 16, quadratũ numeri 4, majorem eſſe quam eſt 8, cubus numeri 2; ſed & eadem ſumpta radice, quæ putà minor ſit quam 1. Nam radicis $\frac{1}{2}$, poteſtas tertia, ſeu cubus, $\frac{1}{8}$, minor eſt quam ejuſdem quadratum $\frac{1}{4}$: Eodem plane modo quo radicis ſive rationis expoſitæ $\frac{1}{2}$ (ſubduplæ) ratio triplicata ſive poteſtas tertia $\frac{1}{8}$ (ſuboctupla,) minor eſt quam ejuſdem ratio duplicata, ſive poteſtas ſecunda $\frac{1}{4}$ (ſubquadrupla;) utut illa ſuperioris gradus, ſive denominationis, poteſtas ſit; hæc inferioris.

ris. Quæ quia non ſatis perſpexit Meibomius, id ei novæ ſuæ doctrinæ male fundatæ anſam porrexit.

Quod vero ait, p. 148. l. 3. de prop. 10. e 5. *Decima autem propoſitio cum octava, cui ut fundamento ſuperſtructa eſt, corruit;* & ſimilia de aliis ibidem, & deinceps ad paginam 161. cum non alio vertantur cardine, quam quòd putaverit ſe octavam quinti evertiſſe: Non eſt ut de iis admodū ſimus ſoliciti, quippe eadem opera ſtatuminantur & illa. Nec opus ut eadem ſæpius repetamus. Nam nec ipſe, credo, Meibomius negabit, quin, conceſſa veritate prop. 8. e 5, reliqua, ab authoribus ſuis Archimede, Apollonio, Eutocio, Pappo, &c. legitimâ ſatis conſequentiâ inde deducta eſſe.

Quæ deinceps, p. 161. &c. ad p. 174. iterato habentur; de πηλικότητ@ voce; de rationum denominatoribus; de tripli duplo, æquali ſextuplo, &c; de Theone & Eutocio ita loquentibus; Clavio item, aliiſque, ipſos ſecutis; atque his ſimilibus; non eſt ut iis ulterius inſiſtam. Quippe quibus jam ſupra ſatisfactum. Neque ullus gloriationi ſuæ locus relinquitur, quam habet pag. 169. l. 24. *Ex his perſpicuum eſt, non tantum ignoraſſe illos authores* (Nichomachum Geraſenum, Heronam, Theonem, Eutocium, Cardanum, Rodulphum Volumnium, Clavium, &c.) *quid ſit rationum compoſitio; ſed &, quid ſit ratio.* Cum potius dicendum videatur, nec quid ſit eorum, alterutrū intellexiſſe Meibomium, nec quid ſibi velint authores citati.

Quod autem habet p. 171. l. 22. *Quare, ex veterum ſententia, ut ratio quadrupla eſt duplæ rationis dupla* (intelligit, *duplicatam*) *ſic ratio ſubquadrupla eſt ſubduplæ ſubdupla* (non, inquam; ſed *duplicata;*) Similiter *ſubcentupla ratio, ſubdecuplæ rationis eſt ſubdupla,* (nullo modo, ſed, *duplicata:*) Iterumque p. 173. l. 19. *Quippe, uti ante dictum eſt, ratio* $\frac{8}{27}$, *rationis* $\frac{8}{12}$ (vel $\frac{2}{3}$) *non eſt tripla, ſed ſubtripla; ſeu, ratio* $\frac{8}{27}$ *ad rationem* $\frac{8}{12}$ *eſt ex Euclidis ſententia, quam octava quinti tradidit, ut 1 ad 3, non autem, quod Commandinus & Clavius putavit, ut 3 ad 1.* Omnino falſum eſt: totumque illud negotium a Meibomio perperam intellectum, eſt depravatum miſere. Nequaquam enim dicendum &, rationem $\frac{1}{4}$, rationis $\frac{1}{2}$; & rationem $\frac{1}{100}$, rationis $\frac{1}{10}$; ſubduplicatam eſſe, ſed duplicatam; (nam $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, & $\frac{1}{100} = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$;) neque rationem $\frac{8}{27}$, rationis $\frac{2}{3}$, ſubtriplicatam, ſed triplicatam eſſe; (nam $\frac{8}{27} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$.) Id enim expreſſis verbis definit Euclides, 10 d 5.

Cum tres magnitudines (continue) proportionales ſint, (puta 1, 2, 4, vel 1, 10, 100.) *prima ad tertiam* (1 ad 4, vel 1 ad 100) *διπλασίονα, duplicatam rationem habere dicitur ejus, quam habet ad ſecundam* (1 ad 2, vel 1 ad 10;) *At cum quatuor magnitudines (continue) proportionales fuerint,* (puta 8, 12, 18, 27,) *prima ad quartam* (8 ad 27) *triplicatam rationem habere dicitur ejus, quam habet ad ſecundam,* (8 ad 12.) Eſt itaque ratio $\frac{4}{9}$, duplicata rationis $\frac{2}{3}$; & $\frac{1}{100}$, duplicata rationis $\frac{1}{10}$; (non ſubduplicata, ſive, ut Meibomius loquitur, ſubdupla:) & $\frac{8}{27}$, triplicata (non ſubtriplicata) rationis $\frac{8}{12}$ ſive $\frac{2}{3}$. Quod autem ille hic habet de octava quinti, eſt nihil ad rhombum. Quippe ea propoſitio, (quæ nempe rationem $\frac{4}{9}$ minorem eſſe ſtatuit quam $\frac{2}{3}$; atque $\frac{1}{100}$, minorem quam $\frac{1}{10}$; & denique $\frac{8}{27}$, minorem quam $\frac{8}{12}$,) nihil habet commune cum decima definitione quinti, (ubi definitur quæ ratio dicenda erit *διπλασίων*, *τριπλασίων*, duplicata, triplicata, &c.) Non enim quia ratio rationis *duplicata* aut *triplicata* dicitur; ideo & *major* dicenda erit: nec, ſi *minor* ſit; duplicata, aut triplicata, dici non poterit. Sed ad hoc, ut ratio rationis duplicata, aut triplicata ſit, vel etiam ſubduplicata, ſubtriplicata &c. omnino accidentarium eſt ut ſit major, aut minor. Eſt quidem ratio dupla, tripla, &c. λόγος διπλάσιος, τριπλάσιος, &c. major ſemper quam ſimpla: (puta 2 A, 3 A, &c. major quam 1 A :) a vero ratio rationis duplicata, triplicata, *διπλασίων*, *τριπλασίων*, &c. nunc major eſt nunc minor: Hoc eſt a^2, a^3 &c. nunc major quam a; ſi nempe a major quam 1: nunc autem minor; ſi nempe a minor quam 1. Ut & ſuperius oſtenſum eſt. Quum itaque illic ſubjungit, p. 173. *l.* 23. *Quare, ſecundum Euclides doctrinam, prima ad ſecundam,* 8 *ad* 12, *majorem rationem habet, quam ad quartam* 8 *ad* 27. omnino verum eſt, per 8 e 5. Dum autem addit, *& ratio* 8 *ad* 27 *ſubtripla eſt rationis* 8 *ad* 12. hoc falſum eſt. Nam & ratio $\frac{8}{12}$, ſeu $\frac{2}{3}$ major eſt quam $\frac{8}{27}$; per 8 e 5 & hæc interim illius triplicata, adeoque poteſtas ſuperior, per 10 d 5. Cumque ille rationem rationis triplicatam, *τριπλασίονα*, ita *παραφράζει*, (lin. 22.) acſi ſit *ut* 3 *ad* 1; & ſubtriplicatam, *ὑποτριπλασίονα*, *ut* 1 *ad* 3: iterũ hallucinatur. Dixiſſet enim, non *ut* 3 *ad* 1, ſed ut cubus ad radicem, ſeu ut 𝒞 ad ℛ, vel R^3 ad R: item non *ut* 1 *ad* 3; ſed ut radix ad cubum, ſeu ut ℛ ad 𝒞, vel R ad R^3. Adeoque ad Euclidis mentem

pulchre

pulchre conſtarent omnia, quæ Meibomius perperam interpretando luxavit miſere,

Quæ pag. 174. & deinceps ad finem, de *Rationum inter ſe Rationibus* habet; haud cæteris ſaniora exſiſtunt. Vertuntur autem ea partim in evertendis eis quæ a Gregorio a S Vincentio hac de re traduntur; partim in nova ſua doctrina eruenda.

Gregorium ille multoties ſollicitat; Puta, *Præf. pag.* 5. l. 9. *Hujus*, inquit, *errores, quod plane inſignes ſint, totumque orbem irretitum teneant, clarius demonſtrandos duxi, ut omnes viderent in circuli quadratura perficienda, non plus novi quam falſi ab ipſo eſſe repertum. Enimvero ab inventæ matheſeos tempore nullum fuiſſe puto, qui plus centum & triginta falſas propoſitiones ex uno erroneo principio deduxiſſet. Gratiam itaque a Mathematicis me initurum credidi; ſi quadraturam illam ab ipſo fundamento everterem.* Iterumque libri *pag.* 100. *l.* 11. *Hunc vero errorem* (Theonis, Eutocii &c. de rationum Denominatoribus) *ampliavit Gregorius a Sto Vincentio, qui grande illud opus Geometricum, de Quadratura Circuli, ante ſeptem annos edidit, ſi effectum ſpectemus, conatu ſolo laudabile. Hic, ut ſcopum feriret, de rationum proportionibus, ſeu, ut ipſe cum Boethio vocat proportionalitatibus Geometricis, protulit nova inventa; revera autem multa nova errata. Namque in ſolo octavo libro, qui hujus doctrinæ fundamenta continet, centum ſeptemdecim falſas propoſitiones numeravit Euthymius: tot nimirum quot Euclideis fundamentis carent.* Iterumque p. 203. l. 1. *Falſæ igitur ſunt in octavo de Quadratura Circuli libro, propoſitiones* 117. *quibus, ex libro decimo,* 17 *adjungemus; ut falſarum propoſitionum, & quidem elementarium, numerus excreſcat ad* 134. Et lin. 9. *Cæteras in quibus demonſtrandis, has falſas Elementares uſurpavit, operoſe recenſere nolui; quod rerum Geometricarum gnarus ſciat, cum fundamento male jacto ruere quicquid ipſi fuerit ſuperſtructum. Nec ita omnia ipſius nova inventa cenſui, ut adfirmare ſuſtineam, nullum cuiquam ſpicilegium eſſe relictum.* Item pag. 161. l. 27. *Rogo itaq; vos, ut pauca etiam de iſtis me narrantem audiatis; eoque magis, quod novum quoque proportionum genus, ab uno, non infimi ſubſellii Geometra, nuper ſit inventum, cujus adminiculo Circuli quadraturam, toties irrito conatu a vobis tentatam, ſpiſſis voluminibus ſe demonſtraſſe opinatur.* Quinam autem ſint illi tam inſignes errores, demonſtrandum aggreditur. p. 188. l. 26. & deinceps ad finem libri.

Gregorium hunc quod attinet; fateor equidem illum eam, quam ambiebat, circuli Quadraturam minime attigiſſe. Quod

in ἐξετάσει ſua, ante tres annos, oſtendit *Chriſtianus Hugenius*; & nos, ſi opus ſit, parati ſumus itidem oſtendere. Verum interim haud pauca minime contemnenda prodidit, ſuamq; in Geometricis peritiam oſtendit: Nec omnino, eo nomine, culpandus videtur, quo illum ſollicitat Meibomius. Et quidem, ni fallor, vel Meibomius ipſe propoſitiones illas plus centum triginta, quas ille ut falſas incuſat, fatebitur, eo quo illas protulit Gregorius, ſenſu, veras eſſe. Nec alio, quantum ego video, nomine eas culpat Meibomius, quam quòd alio ſenſu nonnullas loquendi formulas uſurpaverit (Theonem, Eutocium, Clavium, alioſque ſecutus) quam quo eas uſurpari vult Meibomius, & quidem ſolus.

Grandi paralogiſmo (inquit p. 188. l. 26) *lapſus eſt Gregorius a* S^to^ *Vincentio, qui Clavii de Denominatoribus doctrinam ſecutus, rationum proportionem in hujuſmodi numeris conſtituit, ut* $\frac{8}{2}$ *ad* $\frac{4}{2}$, *ita* $\frac{6}{2}$ *ad* $\frac{3}{2}$: *aut permutando ut* $\frac{8}{2}$ *ad* $\frac{6}{2}$, *ita* $\frac{4}{2}$ *ad* $\frac{3}{2}$. Hoc eſt, (neque enim aliter hic vult Gregorius) ut $\frac{8}{2}$ Quadruplum, ad $\frac{4}{2}$ Duplum; ſic $\frac{6}{2}$ Triplum, ad $\frac{3}{2}$ Seſquialterum: & permutando, ut Quadruplum, ad Triplum; ſic Duplum, ad Seſquialterum: quippe cum illic utrobique ut 2 ad 1; hic autem, utrobique ut 4 ad 3. Atque hoc quidem quin verum ſit, ego nihil video. Eſto enim expoſitum pondus A. hujus quadruplum eſt 4A, duplum 2A, Triplum 3A, ſeſquialterum $\frac{3}{2}$ A. Annon autem proportionalia ſunt $\frac{8}{2} A = 4A \,.\, \frac{4}{2} A = 2A :: \frac{6}{2} A = 3A \,.\, \frac{3}{2} A :: 8.4 :: 6.3 :: 2.1$? Item permutando $\frac{8}{2} A = 4A \,.\, \frac{6}{2} A = 3A :: \frac{4}{2} A = 2A \,.\, \frac{3}{2} A :: 8.6 :: 4.3$? Si itaque hoc verum ſit (quod ne quidem Meibomium negaturum credo; imo inquam, diſertis verbis fatetur p. 198. l. 4,) neque aliud Gregorius hîc intellectum velit, (quod ne quidem Meibomius ignorat: nam ſe, definitione ſua, ſe explicantem introducit Meibomius p. 192. l. 16. & p. 194. l. 8.) quorſum eum falſitatis incuſat? At interim ni hoc falſum ſit, nequæ falſæ erunt illæ 134 quas ille condemnat propoſitiones: vel fatente Meibomio, p. 198. l 4. Quod quidem Gregorio, hac ex parte, vindicando, abunde ſufficiat.

Sed & ſic loquutum Ptolemæum, --- Harmonicorum lib. 1. cap. 6. fatetur Meibomius p. 190. l. 8. τὸ γὰρ δὶς διὰ πασῶν οὕτως ἔχει πρὸς τὸ διὰ πέντε καὶ διὰ πασῶν· τουτέστιν, ὁ τετραπλάσιος λόγος πρὸς τὸν τριπλάσιον· ὡς μόνον τὸ διὰ πασῶν πρὸς

τὸ.

τὸ διὰ πέντε· τουτέστιν, ὁ διπλάσιος λόγος πρὸς τὸν ἡμιόλιον· ἐὰν γὰρ ἑνὸς ἀριθμοῦ ληφθῶσι τριπλάσιός τε καὶ τετραπλάσιος· καὶ πάλιν ἡμιόλιός τε καὶ διπλάσιος· ἐπίτριτον ποιοῦσι λόγον ὅ,τε τετραπλάσιος πρὸς τὸν τριπλάσιον, καὶ ὁ διπλάσιος πρὸς τὸν ἡμιόλιον· ὥστε ὅσῳ συμφωνότερόν ἐστι τὸ διὰ πασῶν τοῦ διὰ πέντε, τοσούτῳ συμφωνότερον γίνεται καὶ τὸ δὶς διὰ πασῶν τοῦ διὰ πασῶν καὶ διὰ πέντε. Quæ vel Meibomio interprete, ſic ſonant Latine. *Bis dia paſon conſonantia* (nempe, $\frac{2}{1} \times \frac{2}{1} = \frac{4}{1}$) *ita ſe habet ad dia pente & dia paſon,*(nempe $\frac{3}{2} \times \frac{2}{1} = \frac{3}{1}$,) *hoc eſt quadrupla ratio ad triplam: ut ſola dia paſon*;($\frac{2}{1}$) *ad ſolam dia pente* ($\frac{3}{2}$;) *ideſt, dupla ratio, ad ſeſquialteram. Si enim unius & ejuſdem numeri* (puta 4) *ſumantur triplus & quadruplus* (nempe 12 & 16;) *& rurſus ſeſquialter & duplus,* (nempe 6 & 8;) *ſuper tertiam rationem* ($\frac{4}{3}$) *faciunt & quadruplus ad triplum* (16 ad 12;) *& duplus ad ſeſquialterum* (8 ad 6.) *Adeo ut, quanto conſonantior eſt dia paſon conſonantia ipſa dia pente, tanto ſit conſonantior bis dia paſon quã dia paſon & dia pente.* Adeoq; non veteribus tantum, ſed & Harmonicis,(quo toties provocat Meibomius; quaſi hi ſoli ſint rationũ gnari; aliiq; ſaltem *Juniores, quod rerum naturam in Canonicis nunquam conſideraſſent, quid ratio eſſet, ignorarent,* p. 196. l. 1. & alibi paſſim,) ſatis receptum videmus hunc loquendi morem. Siquidem, tum rationes, Ptolemæo, ſunt denominatoribus ſuis proportionales, (quod vult Gregorius;) nempe $\frac{4}{1} . \frac{3}{1} :: \frac{2}{1} . \frac{3}{2} :: 4 . 3$. contra quam vult Meibomius: Tum etiam, ut ex Porphyrii in hunc locum Commentario liquet, p. 191. l. 29. καὶ γὰρ διπλασιασθεὶς ὁ μὲν ἡμιόλιος, τὸν τριπλάσιον ποιεῖ· ὁ δὲ διπλάσιος, τὸν τετραπλάσιον. καὶ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον ἔχει ὁ τετραπλάσιος πρὸς τὸν διπλάσιον, καὶ ὁ τριπλάσιος πρὸς τὸν ἡμιόλιον. *Etenim duplicatus ſeſquialter, facit triplum; & duplus, quadruplum: ideoque eandem rationem habet quadruplus ad duplum, quam triplus ad ſeſquialterum.* Quod, quid aliud ſit, quam quod, in Theone, tanto ſtrepitu, damnat Meibomius, (ἐὰν τὸ τριπλάσιόν τινος διπλασιάζωμεν, γίνεται αὐτοῦ ἑξαπλάσιον,) ego ſane non intelligo. Sed & ejuſmodi paſſim apud alios loquendi formulas exſtare, non admodum videtur dubitandum, ſi modo id operæ precium eſſet inquirere.

Imo, inquam, & ipſe Meibomius nonnunquam, incautus, perinde loquitur. Cum enim ait; p. 112. l. *quippe nihili miſto* $\genfrac{}{}{0pt}{}{4\,v}{4\,a}$ *in ſeſquialtera ratione debilius eſt miſtum* $\genfrac{}{}{0pt}{}{4\,v}{6\,a}$. Hoc eſt,

miſtum

cut eſt $\bar{2} \times \bar{2} = 4$. Atque ejuſdem farraginis ſunt reliqua quæ in hunc finem producit omnia.

Hujuſmodi item ſunt quas profert demonſtrationes. Nempe p. 178. l. 9. *Cæterum* inquit, *rationem* $\frac{9}{4}$ *non eſſe rationis* $\frac{3}{2}$ *ejuſdem duplam; &c. duplici demonſtratione oſtendemus.* Si per rationem duplam, triplam, hic intelligat, λόγον διπλασίονα, τριπλασίονα, (quas definit Euclides 10 d 5,) nos hoc concedimus; nec quiſpiam eſt qui contrarium contendit: Sin λόγον διπλάσιον, τριπλάσιον, intelligat; videamus demonſtrationes. *Prima* inquit, *hoc adſumto lemmate; Duplorum duplos eſſe exceſſus; adeoque triplorum, triplos; ſeſquialterorum ſeſquialteros.* Nos hoc lemma concedimus, ſi, per *exceſſus*, intelligit, *ſubductionum reſidua*; ſin autem *diviſionis quotientes* intelligit, negamus. Quippe $4 - 2 = 2$. $8 - 4 = 4$. $12 - 6 = 6$. $6 - 3 = 3$. (At $\frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{12}{6} = \frac{6}{3} = 2$.) Dum autem addit; *ſic rationes* $\frac{3}{2}$ *&* $\frac{4}{3}$ *inter ſe differunt ratione* $\frac{9}{8}$; jam tranſit εἰς ἄλλο γένος, nempe pro ſubductionis reſiduo, ſubſtituit diviſionis quotientem; non enim eſt $\frac{3}{2} - \frac{4}{3} = \frac{9}{8}$, ſed $\frac{4}{3}$) $\frac{3}{2}$ ($\frac{9}{8}$. Item, dum pergit; *harum duplæ* $\frac{9}{4}$ *&* $\frac{16}{9}$, *ratione* $\frac{81}{64}$, *inter ſe diſtant.* Non enim rationum $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, duplæ, ſed duplicatæ, (non διπλάσιοι, ſed διπλασίονες,) ſunt $\frac{9}{4}$, & $\frac{16}{9}$: quæque emergit ratio $\frac{81}{64}$ (rationis $\frac{9}{8}$, non διπλάσιος ſed διπλασίων) non ſubducendo oritur, ſed dividendo; non enim $\frac{9}{4} - \frac{16}{9} = \frac{81}{64}$, ſed $\frac{16}{9}$) $\frac{9}{4}$ ($\frac{81}{64}$. Sed procedat demonſtratio. *Cum itaque,* inquit, *ſimplorum rationum* $\frac{3}{2}$ *&* $\frac{4}{3}$, *differentialis ratio* (nempe diviſione orta) *ſit* $\frac{9}{8}$ (quia ſcilicet $\frac{4}{3}$) $\frac{3}{2}$ ($\frac{9}{8}$:) *duplarum* $\frac{9}{4}$ *&* $\frac{16}{9}$, *differentialis ratio, erit ſimplæ differentialis rationis dupla, nempe* $\frac{81}{64}$. Nullo modo inquam. Sed eadem ipſa $\frac{9}{8}$. Nam jam de differentia diviſionali agitur, (de qua lemma non procedit,) non de ſubductionali. Sin velit lemmati ſuo exemplum aptare; ſic potius dixiſſet; Quoniam ſimplarum rationum $\frac{3}{2}$ & $\frac{4}{3}$, differentia (ſubductione quærenda) ſit $\frac{1}{6} = \frac{3}{2} - \frac{4}{3} = \frac{9}{6} - \frac{8}{6}$: erit duplarum $\frac{6}{2} = \frac{3}{2} \times 2$, & $\frac{8}{3} = \frac{4}{3} \times 2$, differentia $\frac{6}{2} - \frac{8}{3} = \frac{18}{6} - \frac{16}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{6} \times 2$, nempe dupla differentiæ ſimplarum. Quod quidem verum eſt, uti lemma poſtulat.

Altera, inquit, demonſtratione idem oſtendemus, hoc ſumpto lemmate; *Arithmeticæ progreſſionis numeros, quorum ſecundus primi duplus eſt, eodem exceſſu proximos binos ſe invicem ſuperare* (ſeu potius, eorum unum ſuperare reliquum; non enim ſe mutuo

ſuperant, ſed alter ſuperat, alter ſuperatur) *quo primus ſuperat nihilum.* Eſto. Quid deinde. *Cum itaque*, inquit, *in hac rationum progreſſione* $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{6}{2}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{12}{2}$, (dic potius $\frac{0}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{6}{2}$, &c. ſecus enim non erit progreſſio arithmetica;) *ratio* $\frac{3}{2}$ *ſimpla ſit, & unitatis loco* (hoc eſt primo) *ponatur; cujus dupla eſt* $\frac{6}{2}$; *tripla,* $\frac{9}{2}$; *&c. continebit dua* $\frac{6}{2}$, *bis ſimplam* $\frac{3}{2}$, (recte quidem nam $\frac{6}{2} = \frac{3}{2} \times 2$.) *Atqui* inquit, *duplæ ſimplæ additæ, efficiunt* $\frac{9}{2}$. Nullo modo: ſed potius, multiplicando compoſitæ, non enim $\frac{3}{2}+\frac{3}{2}$, ſed $\frac{3}{2} \times \frac{3}{2}$, ſunt $\frac{9}{4}$. Sunt autem $\frac{3}{2}+\frac{3}{2} = \frac{6}{2}$, quam & progreſſio exhibet, & lemma poſtulat. Neutra itaque demonſtratio procedit. Ea vero quam appellat ille *veram rationis ſeſquialteræ progreſſionem* $\frac{32}{32}$. $\frac{48}{32}$. $\frac{72}{32}$. $\frac{108}{32}$ &c. vel $\frac{1}{1}$. $\frac{3}{2}$. $\frac{9}{4}$. $\frac{27}{8}$. &c. Non eſt progreſſio Arithmetica, quam lemma ſupponit; ſed Geometrica; adeoque nihil ad rhombum. Atque de reliquis inſtantiis, par eſto judicium.

Sed nec felicius ſuam exponit de Rationum Ratione doctrinam: quam ſic definit, p. 174. l. 12. *Ratio rationum eſt duarum rationum ejuſdem ſeriei, a fundana ratione ſecundum naturales numeros progredientis, ſecundum rationem certa quædam inter ipſas relatio.* Cum enim, inquit, *ratio aliqua alterius dupla, tripla, ſeſquialtera,* (duplicata, triplicata &c.) *dicitur; ratio fundana & ſimpla* (hoc eſt, radix.) *ſecundum naturalem numerorum ſeriem excreviſſe, hoc eſt, continua ſui adpoſitione major facta, intelligitur;* (hoc eſt continua multiplicatione fiunt poteſtates reliquæ:) *ita ſi quamcunque rationem ſibi ipſi adponam, fit ratio prioris; nempe ſimplæ & fundanæ, dupla,* (duplicata;) *ſi hanc cum fundana componam, fit fundanæ tripla &c. tripla autem ad duplam* (triplicata ad duplicatam) *eſt ut* 3 *ad* 2 (ut poteſtas tertia ad ſecundam, ſeu ut cubus ad quadratum,) &c. *Porro poſſumus quamcunque rationem, fundanæ & ſimplæ rationis, hoc eſt, unitatis* (radicis ſeu poteſtatis primæ) *loco collocare. Unde innumeræ rationum progreſſiones exſurgunt, quarum aliquot exſemplorum loco expoſui.*

	0	1	2	3	4	5	6
I.	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{8}{1}$	$\frac{16}{1}$	$\frac{32}{1}$	$\frac{64}{1}$
II.	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{9}{1}$	$\frac{27}{1}$	$\frac{81}{1}$	$\frac{243}{1}$	$\frac{729}{1}$
III.	$\frac{1}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{16}{1}$	$\frac{64}{1}$	$\frac{256}{1}$	$\frac{1024}{1}$	$\frac{4096}{1}$
IIII.	$\frac{1}{1}$	$\frac{10}{1}$	$\frac{100}{1}$	$\frac{1000}{1}$	$\frac{10000}{1}$	$\frac{100000}{1}$	$\frac{1000000}{1}$
V.	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{8}$	$\frac{81}{16}$	$\frac{243}{32}$	$\frac{729}{64}$

Prima

Prima inquit, progreſſio eſt rationis duplæ; altera, triplæ; tertia, quadruplæ; quarta decuplæ; quinta ſeſquialteræ. &c. Per *rationem* itaque *fundanam*, λόγον πυθμενικὸν, Radicem intelligit, ſive poteſtatem primam, uti manifeſtum eſt: contra quam ipſe alibi p. 137. l. 15. rationem æqualitatis $\frac{1}{1}$ (non autem, ut nunc, Radicem ſeu poteſtatem primam,) appellat *rationum omnium Fundamentum & principium.* Sed aliter adhuc p. 15. l. 13. eodem *fundanæ rationis* nomine, intelligit rationis in minimis numeris deſignationem; *Sic*, inquit, *ex* $\frac{3}{2}$. $\frac{6}{4}$ $\frac{9}{6}$. $\frac{12}{8}$. *quæ omnes ſunt in ratione ſeſquialtera; fundus eſt*, πυθμὴν, *ſeu* πυθμενικὸς λόγος, *fundata (lege fundana) ratio*, $\frac{3}{2}$. *quæ primis inter ſe numeris comprehenditur. Et ſic de cæteris.* Et ſimiliter p. 165. l. 20. Adeo ſibi inconſtans eſt in ſuorum terminorum acceptatione. At, inquam, quicquid ſit quod hac appellatione alibi velit, manifeſtum eſt eum per *rationem fundanam*, hic intelligere, radicem ſive poteſtatē primam. Hinc autem continua multiplicatione (ſive ut ille loqui malit, continua radicis fundanæ adpoſitione) emergit ſeries Geometrice proportionalium ab 1 ſeu $\frac{1}{1}$ inchoata; hoc eſt, continua poteſtatum ſeries; Quarum Radix, prima eſt; quadratum, ſeu ratio duplicata, ſecunda; (reliquæque juxta numeros naturales deinceps denominandæ;) ratio autem æqualitatis $\frac{1}{1}$, poteſtas nulla. (Et quidem ſi ſatis intellexiſſet Meibomius, hoc nihil aliud eſſe quam quod univerſim tradi ſolet, nempe 1 . ♃ . ʒ . ȼ . ʒʒ. &c. ſeu 1 . *a* . *aa* . *aaa* . *aaaa*. &c. aut 1 . a . a^2 . a^3 . a^4. &c. eſſe Geometrice proportionalia; eorumque indices, ſive exponentes poteſtatum, 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . &c. arithmetice proportionales: Non eſſet cur ille, perplexâ ſuâ rei facillimæ traditione hanc ſibi & aliis moleſtiam crearet.) Per *rationum rationem* itaque nihil aliud hic intelligit Meibomius (utut illud definitione ſua ſatis obſcure tradiderit) quam mutuum ad invicem ſitum ſeu ordinem quem inter ſe habent duo pluréſve termini ejuſdem progreſſionis Geometricæ ab 1 inchoatæ. Adeoque rationem *triplam ad duplam eſſe ut 3 ad 2, hoc eſt, in ratione ſeſquialtera*; nil aliud ſonat, quam ejuſdem rationis rationem triplicatam ad duplicatam, eſſe ut ejuſdem radicis poteſtas tertia ad ſecundam, cujus indices ſive exponentes 3, 2, ſunt in ratione ſeſquialtera $\frac{3}{2}$.

Sed & ultra notandum eſt, ſe in ſeriem ſuam nullos alios terminos admittere, quam qui fiunt continua appoſitione ratio-

nis fundanæ: adeoque, in expoſitarum ſuarum ſerierum qualibet, rationes expoſitis intermediæ nullum in ſuis ſeriebus locum habent: Quamvis enim nonnunquam de ratione ſeſquialtera loquatur, (quæ videri poſſit intermedia inter poteſtatem primam & ſecundam,) non tamen ait rationem ullam eſſe fundanæ ſeu ſimplæ ſeſquialteram, ſed ſaltem triplam ſecundæ ſeſquialteram eſſe.

Quod forſan non tanti eſſet ut notatu dignum videatur, niſi propter ſequentia. Nempe p. 175. l. 27. *Illud autem nove hic obſervandum dicit, cujuſque ex his rationum progreſſionibus rationem cum ſuæ ſeriei & progreſſionis ratione ſolum comparari poſſe, ita ut ſciatur, quam rationem hæc ratio ad illam rationem, & viciſſim, obtineat;* & p. 176. l. 13. *Nullo autem modo diverſæ progreſſionis rationes inter ſe comparari poſſunt ut quam inter ſe rationem habent definiatur. Quare,* inquit, *ratio* $\frac{2}{1}$ *quæ primæ ſeriei prima eſt, ineffabilem rationem habet, non tantum ad* $\frac{3}{2}$, *quæ prima eſt ſeriei ſecundæ, ſed & ad omnes alias ſeriei ſecundæ, tertiæ, quartæ, & cæterarum in infinitum, rationes. Hoc autem inde quoque evidens eſt, quod duas diverſarum progreſſionum rationes per quamcunque aliam minorem menſuraturi, nullam plane invenire queamus, quæ utramque exacte metiatur.* cui ſimile occurrit p. 133. l. 17. *Diverſi fundi rationes nullam communem menſuram admittunt ideoque nec rationem inter ſe habent effabilem.* Quod quidem ne putemus eum de ratione veris numeris effabili hoc intelligere; admittere autem rationem utcunq; lineis explcabilem; qualis eſt diametri ad latus quadrati, aliæque paſſim rationes ἄῤῥητοι: Etiam & has excluſas ſe velle, patet p. 192. l. 25. *Demonſtratum* inquit, *eſt ſuperius, ejuſdem duntaxat progreſſionis rationes inter ſe eſſe* (non inquit, ut numerum ad numerum, ſed) *ut lineam ad lineam.*

At, inquam, hoc plane falſum eſt, non modo aliorum ſenſu, ſed & ſuo. Nam rationes diverſi (ut loquitur) fundi, rationem ad invicem habent, etiam ſuo ſenſu, ſatis explicabilem; nempe (ut nos loqui ſolemus) dici poteſt, quota ſit poteſtas hæc illius. Eaque ratio ſatis eſt effabilis, non modo ut linea ad lineam (quod ipſe negat,) ſed, (quod magis eſt) non raro, ut numerus ad numerum. Et quidem, ne longius abeamus, ſuam ipſius inſtantiam, jam prolatam, examinabimus. *Ratio,* inquit, $\frac{2}{1}$, *quæ primæ ſeriei prima eſt, ineffabilem rationem habet, non tantum ad rationem* $\frac{3}{2}$, *quæ prima eſt ſeriei ſecundæ, ſed & ad omnes*

alias

alias ſeriei ſecundæ, tertiæ, quartæ, &c. De ratione quam habet ratio aſſignata, ad rationem aliquam ſeriei ſecundæ, non admodum ero ſolicitus; quoniam quidem ea, utut lineis explicabilis ſit (quod ſi opus eſſet, utut ille neget, facile ſumus demonſtraturi;) numeris tamen (ſenſu ſuo) explicabilis non eſt: Verum, quam habet rationem ratio expoſita ad rationes ſeriei tertiæ (vel ſuo ſenſu,) eſt & numeris explicabile. Quippe expoſita ratio $\frac{2}{1}$, eſt ad ſeriei tertiæ rationem $\frac{4}{1}$, (ut ille loquitur) ut 1 ad 2; ſive (ut loquuntur alii) ratio ſubduplicata: eadem expoſita ratio $\frac{2}{1}$, ad rationem (ejuſdem ſeriei tertiæ) $\frac{16}{1}$, eſt ut 1 ad 4, ſive ſubquadruplicata: item rationis $\frac{64}{1}$, ratio ſuboctuplicata, ſive (ut ille loquitur) ut 1 ad 8. Et de reliquis pariter. Quod quidem adeo perſpicuum eſt & obvium, ut mirum ſit, quî ille poſſit non videre; cum manifeſtum ſit, nullam non rationem ſeriei tertiæ, etiam & in ſerie prima (ſatis continuata) reperiri; utut non viceverſa. Sed & nulla non ratio ſeriei primæ, ad primam tertiæ $\frac{4}{1}$ (aliamve tertiæ ſeriei quamvis) utut in ſerie tertia nuſpiā ſedē habeat, rationē habebit (vel ſuo ſenſu) numeris explicabilem. Puta, ad rationem $\frac{4}{1}$, ratio $\frac{2}{1}$, eſt (Meibomii ſenſu) ut 1 ad 2; ratio $\frac{8}{1}$, eſt ad eandem, ut 3 ad 2; ratio $\frac{32}{1}$, ut 5 ad 2; & ſic de reliquis; (quamvis interim rationes $\frac{2}{1}$, $\frac{8}{1}$, $\frac{32}{1}$, nec in ſerie tertia reperiantur, nec ex rationis fundanæ $\frac{4}{1}$ continua adpoſitione fiant:) Quæ omnia adeo & vera ſunt & per ſe perſpicua, & nemini non nota, ut ne quidem Meibomius, ubi ſecundas cogitationes adhibuerit, ſit negaturus. Ubi autem ille, ex uno aut altero exſemplo concludit pag. 177. l. 23. *eadem ratiocinatione quaſcunq; alias diverſæ ſeriei rationes, quacunque alia communi menſura menſuratas ineffabilem inter ſe rationem habere cognoſcemus*; iterumque p. 178. l. 3. *planum itaque eſt, omnes diverſæ ſeriei, ſeu non ab eadem fundana ratione adſcendentes, rationes inter ſe eſſe incommenſurabiles.* Dicimus non ſufficientem factam eſſe inductionem. Non enim ſi ratio $\frac{81}{80}$ non ſit rationum $\frac{2}{1}$ & $\frac{3}{2}$ communis menſura; ergo nullarum diverſæ ſeriei rationum, ulla erit communis menſura. Quippe nos in contrarium inſtantias oſtendimus, quas nequidem Meibomius negare ſuſtinebit.

Falſum itaque eſt (etiam ſuo ſenſu) quod hîc affirmat Meibomius, *Diverſi fundi rationes, rationem inter ſe effabilem non habere.*

Falſum

Cum tres magnitudines (continue) proportionales ſint, (puta 1, 2, 4, vel 1, 10, 100.) *prima ad tertiam* (1 ad 4, vel 1 ad 100) *διπλασίονα, duplicatam rationem habere dicitur ejus, quam habet ad ſecundam* (1 ad 2, vel 1 ad 10;) *At cum quatuor magnitudines (continue) proportionales fuerint,* (puta 8, 12, 18, 27,) *prima ad quartam* (8 ad 27) *triplicatam rationem habere dicitur ejus, quam habet ad ſecundam,* (8 ad 12) Eſt itaque ratio $\frac{1}{4}$, duplicata rationis $\frac{1}{2}$; & $\frac{1}{100}$, duplicata rationis $\frac{1}{10}$; (non ſubduplicata, ſive, ut Meibomius loquitur, ſubdupla:) & $\frac{8}{27}$, triplicata (non ſubtriplicata) rationis $\frac{8}{12}$ ſive $\frac{2}{3}$. Quod autem ille hic habet de octava quinti, eſt nihil ad rhombum. Quippe ea propoſitio, (quæ nempe rationem $\frac{1}{4}$ minorem eſſe ſtatuit quam $\frac{1}{2}$; atque $\frac{1}{100}$, minorem quam $\frac{1}{10}$; & denique $\frac{8}{27}$, minorem quam $\frac{8}{12}$,) nihil habet commune cum decima definitione quinti, (ubi definitur quæ ratio dicenda erit *διπλασίων, τριπλασίων,* duplicata, triplicata, &c.) Non enim quia ratio rationis *duplicata* aut *triplicata* dicitur; ideo & *major* dicenda erit: nec, ſi *minor* ſit; duplicata, aut triplicata, dici non poterit. Sed ad hoc, ut ratio rationis duplicata, aut triplicata ſit, vel etiam ſubduplicata, ſubtriplicata &c. omnino accidentarium eſt ut ſit major, aut minor. Eſt quidem ratio dupla, tripla, &c. *λόγος διπλάσιος, τριπλάσιος,* &c. major ſemper quam ſimpla: (puta 2 A, 3 A, &c. major quam 1 A:) a vero ratio rationis duplicata, triplicata, *διπλασίων, τριπλασίων,* &c. nunc major eſt nunc minor: Hoc eſt a^2, a^3 &c. nunc major quam a; ſi nempe a major quam 1: nunc autem minor; ſi nempe a minor quam 1. Ut & ſuperius oſtenſum eſt. Quum itaque illic ſubjungit, p. 173. *l.* 23. *Quare, ſecundum Euclidis doctrinam, prima ad ſecundam,* 8 *ad* 12, *majorem rationem habet, quam ad quartam* 8 *ad* 27. omnino verum eſt, per 8 e 5. Dum autem addit, *& ratio* 8 *ad* 27 *ſubtripla eſt rationis* 8 *ad* 12. hoc falſum eſt. Nam & ratio $\frac{8}{12}$, ſeu $\frac{2}{3}$ major eſt quam $\frac{8}{27}$; per 8 e 5 & hæc interim illius triplicata, adeoque poteſtas ſuperior, per 10 d 5. Cumque ille rationem rationis triplicatam, *τριπλασίονα*, ita *παραφράζει*, (lin. 22.) acſi ſit *ut* 3 *ad* 1; & ſubtriplicatam, *ὑποτριπλασίονα, ut* 1 *ad* 3: iterũ hallucinatur. Dixiſſet enim, non *ut* 3 *ad* 1, ſed ut cubus ad radicem, ſeu ut $\mathcal{C}$ ad $\mathcal{R}$, vel R^3 ad R: item non *ut* 1 *ad* 3; ſed ut radix ad cubum, ſeu ut $\mathcal{R}$ ad $\mathcal{C}$, vel R ad R^3. Adeoque ad Euclidis mentem

pulchre

pulchre conſtarent omnia, quæ Meibomius perperam interpretando luxavit miſere,

Quæ pag. 174. & deinceps ad finem, de *Rationum inter ſe Rationibus* habet; haud cæteris ſaniora exſiſtunt. Verſantur autem ea partim in evertendis eis quæ a Gregorio a S Vincentio hac de re traduntur; partim in nova ſua doctrina eruenda.

Gregorium ille multoties ſollicitat; Puta, *Præf. pag. 5. l. 9. Hujus*, inquit, *errores, quod plane inſignes ſint, totumque orbem irretitum teneant, clarius demonſtrandos duxi, ut omnes viderent in circuli quadratura perficienda, non plus-novi quam falſi ab ipſo eſſe repertum. Enimvero ab inventæ matheſeos tempore nullum fuiſſe puto, qui plus centum & triginta falſas propoſitiones ex uno erroneo principio deduxiſſet. Gratiam itaque a Mathematicis me initurum credidi; ſi quadraturam illam ab ipſo fundamento everterem.* Iterumque libri *pag.* 100. *l.* 11. *Hunc vero errorem* (Theonis, Eutocii &c. de rationum Denominatoribus) *ampliavit Gregorius a* S^to^ *Vincentio, qui grande illud opus Geometricum, de Quadratura Circuli, ante ſeptem annos edidit, ſi effectum ſpectemus, conatu ſolo laudabile. Hic, ut ſcopum feriret, de rationum proportionibus, ſeu, ut ipſe cum Boethio vocat proportionalitatibus Geometricis, protulit nova inventa; revera autem multa nova errata. Namque in ſolo octavo libro, qui hujus doctrinæ fundamenta continet, centum ſeptemdecim falſas propoſitiones numeravit Euthymius: tot nimirum quot Euclideis fundamentis carent.* Iterumque p. 203. l. 1. *Falſæ igitur ſunt in octavo de Quaratura Circuli libro, propoſitiones* 117. *quibus, ex libro decimo,* 17 *adjungemus; ut falſarum propoſitionum, & quidem elementarium, numerus excreſcat ad* 134. Et lin. 9. *Cæteras in quibus demonſtrandis, has falſas Elementares uſurpavit, operoſe recenſere nolui; quod rerum Geometricarum gnarus ſciat, cum fundamento male jacto ruere quicquid ipſi fuerit ſuperſtructum. Nec ita omnia ipſius nova inventa cenſui, ut adfirmare ſuſtineam, nullum cuiquam ſpicilegium eſſe relictum.* Item pag. 161. l. 27. *Rogo itaq; vos, ut pauca etiam de iſtis me narrantem audiatis; eoque magis, quod novum quoque proportionum genus, ab uno, non infimi ſubſellii Geometra, nuper ſit inventum, cujus adminiculo Circuli quadraturam, toties irrito conatu a vobis tentatam, ſpiſſis voluminibus ſe demonſtraſſe opinatur.* Quinam autem ſint illi tam inſignes errores, demonſtrandum aggreditur. p 188. l. 26. & deinceps ad finem libri.

Gregorium hunc quod attinet; fateor equidem illum eam, quam ambiebat, circuli Quadraturam minime attigiſſe. Quod

in ἐξετάσει ſua, ante tres annos, oſtendit *Chriſtianus Hugenius*; & nos, ſi opus ſit, parati ſumus itidem oſtendere. Verum interim haud pauca minime contemnenda prodidit, ſuamq; in Geometricis peritiam oſtendit: Nec omnino, eo nomine, culpandus videtur, quo illum ſollicitat Meibomius. Et quidem, ni fallor, vel Meibomius ipſe propoſitiones illas plus centum triginta, quas ille ut falſas incuſat, fatebitur, eo quo illas protulit Gregorius, ſenſu, veras eſſe. Nec alio, quantum ego video, nomine eas culpat Meibomius, quam quòd alio ſenſu nonnullas loquendi formulas uſurpaverit (Theonem, Eutocium, Clavium, alioſque ſecutus) quam quo eas uſurpari vult Meibomius, & quidem ſolus.

Grandi paralogiſmo (inquit p. 188. l. 26.) *lapſus eſt Gregorius a Sto Vincentio, qui Clavii de Denominatoribus doctrinam ſecutus, rationum proportionem in hujuſmodi numeris conſtituit, ut* $\frac{8}{2}$ *ad* $\frac{4}{2}$, *ita* $\frac{6}{2}$ *ad* $\frac{3}{2}$: *aut permutando ut* $\frac{8}{2}$ *ad* $\frac{6}{2}$, *ita* $\frac{4}{2}$ *ad* $\frac{3}{2}$. Hoc eſt, (neque enim aliter hic vult Gregorius) ut $\frac{8}{2}$ Quadruplum, ad $\frac{4}{2}$ Duplum; ſic $\frac{6}{2}$ Triplum, ad $\frac{3}{2}$ Seſquialterum: & permutando, ut Quadruplum, ad Triplum; ſic Duplum, ad Seſquialterum: quippe cum illic utrobique ut 2 ad 1; hic autem, utrobique ut 4 ad 3. Atque hoc quidem quin verum ſit, ego nihil video. Eſto enim expoſitum pondus A. hujus quadruplum eſt 4A, duplum 2A, Triplum 3A, ſeſquialterum $\frac{3}{2}$ A. Annon autem proportionalia ſunt $\frac{8}{2} A = 4A . \frac{4}{2} A = 2A :: \frac{6}{2} A = 3A . \frac{3}{2} A :: 8.4 :: 6.3 :: 2.1$? Item permutando $\frac{8}{2} A = 4A . \frac{6}{2} A = 3A :: \frac{4}{2} A = 2A . \frac{3}{2} A :: 8.6 :: 4.3$? Si itaque hoc verum ſit (quod ne quidem Meibomium negaturum credo; imo inquam, diſertis verbis fatetur p. 198. l. 4.) neque aliud Gregorius hîc intellectum velit, (quod ne quidem Meibomius ignorat: nam ſe, definitione ſua, ſe explicantem introducit Meibomius p. 192. l. 16. & p. 194. l. 8.) quorſum eum falſitatis incuſat? At interim ni hoc falſum ſit, neque falſæ erunt illæ 134 quas ille condemnat propoſitiones: vel fatente Meibomio, p. 198. l 4. Quod quidem Gregorio, hac ex parte, vindicando, abunde ſufficiat.

Sed & ſic loquutum Ptolemæum, --- Harmonicorum lib. 1. cap. 6. fatetur Meibomius p. 190. l. 8. τὸ γὰρ δὶς διὰ πασῶν οὕτως ἔχει πρὸς τὸ διὰ πέντε καὶ διὰ πασῶν· τουτέστιν, ὁ τετραπλάσιος λόγος πρὸς τὸν τριπλάσιον· ὡς μόνον τὸ διὰ πασῶν πρὸς

τὸ

τῷ διὰ πέντε· τυτέστιν, ὁ διπλάσιος λόγος πρὸς τὸν ἡμιόλιον· ἐὰν γὰρ ἑνὸς ἀριθμοῦ ληφθῶσι τριπλάσιός τε καὶ τετραπλάσιος· καὶ πάλιν ἡμιόλιός τε καὶ διπλάσιος· ἐπίτριτον ποιοῦσι λόγον ὅ, τε τετραπλάσιος πρὸς τὸν τριπλάσιον, καὶ ὁ διπλάσιος πρὸς τὸν ἡμιόλιον· ὥστε ὅσῳ συμφωνότερόν ἐστι τὸ διὰ πασῶν τοῦ διὰ πέντε, τοσούτῳ συμφωνότερον γίνεται καὶ τὸ δὶς διὰ πασῶν τοῦ διὰ πασῶν καὶ διὰ πέντε. Quæ vel Meibomio interprete, ſic ſonant Latine. *Bis dia paſon conſonantia* (nempe, $\frac{2}{1} \times \frac{2}{1} = \frac{4}{1}$) *ita ſe habet ad dia pente & dia paſon*, (nempe $\frac{3}{2} \times \frac{2}{1} = \frac{3}{1}$,) *hoc eſt quadrupla ratio ad triplam: ut ſola dia paſon*; ($\frac{2}{1}$) *ad ſolam dia pente* ($\frac{3}{2}$;) *ideſt, dupla ratio, ad ſeſquialteram. Si enim unius & ejuſdem numeri* (puta 4) *ſumantur triplus & quadruplus* (nempe 12 & 16;) *& rurſus ſeſquialter & duplus*, (nempe 6 & 8;) *ſuper tertiam rationem* ($\frac{4}{3}$) *faciunt & quadruplus ad triplum* (16 ad 12;) *& duplus ad ſeſquialterum* (8 ad 6.) *Adeo ut, quanto conſonantior eſt dia paſon conſonantia ipſa dia pente, tanto ſit conſonantior bis dia paſon quã dia paſon & dia pente.* Adeoq; non veteribus tantum, ſed & Harmonicis, (quo toties provocat Meibomius; quaſi hi ſoli ſint rationũ gnari; aliiq; ſaltem *Juniores, quod rerum naturam in Canonicis nunquam conſideraſſent, quid ratio eſſet, ignorarent*, p. 196. l. 1. & alibi paſſim,) ſatis receptum videmus hunc loquendi morem. Siquidem, tum rationes, Ptolemæo, ſunt denominatoribus ſuis proportionales, (quod vult Gregorius;) nempe $\frac{4}{1} . \frac{3}{1} :: \frac{2}{1} . \frac{3}{2} :: 4 . 3$. contra quam vult Meibomius: Tum etiam, ut ex Porphyrii in hunc locum Commentario liquet, p. 191. l. 29. καὶ γὰρ διπλασιασθεὶς ὁ μὲν ἡμιόλιος, τὸν τριπλάσιον ποιεῖ· ὁ δὲ διπλάσιος, τὸν τετραπλάσιον. καὶ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον ἔχει ὁ τετραπλάσιος πρὸς τὸν διπλάσιον, καὶ ὁ τριπλάσιος πρὸς τὸν ἡμιόλιον. *Etenim duplicatus ſeſquialter, facit triplum; & duplus, quadruplum: ideoque eandem rationem habet quadruplus ad duplum, quam triplus ad ſeſquialterum.* Quod, quid aliud ſit, quam quod, in Theone, tanto ſtrepitu, damnat Meibomius, (ἐὰν τὸ τριπλάσιόν τινος διπλασιάσωμεν, γίνεται αὐτοῦ ἑξαπλάσιον,) ego ſane non intelligo. Sed & ejuſmodi paſſim apud alios loquendi formulas exſtare, non admodum videtur dubitandum, ſi modo id operæ pretium eſſet inquirere.

Imo, inquam, & ipſe Meibomius nonnunquam, incautus, perinde loquitur. Cum enim ait; p. 112. l. *quippe nihili miſto* $\frac{4v}{4a}$ *in ſeſquialtera ratione debilius eſt miſtum* $\frac{4v}{6a}$. Hoc eſt,

miſtum

tut eſt $\bar{2} \times \bar{2} = 4$. Atque ejuſdem farraginis ſunt reliqua quæ in hunc finem producit omnia.

Hujuſmodi item ſunt quas profert demonſtrationes. Nempe p.178. l.9. *Cæterum* inquit, *rationem $\frac{6}{2}$ non eſſe rationis $\frac{3}{2}$ ejuſdem duplam; &c. duplici demonſtratione oſtendemus.* Si per rationem duplam, triplam, hic intelligat, *λόγον διπλασίονα, τριπλασίονα*, (quas definit Euclides 10 d 5,) nos hoc concedimus; nec quiſpiam eſt qui contrarium contendit: Sin *λόγον διπλάσιον, τριπλάσιον*, intelligat; videamus demonſtrationes. *Prima* inquit, *hoc adſumto lemmate; Duplorum duplos eſſe exceſſus; adeoque triplorum, triplos; ſeſquialterorum ſeſquialteros.* Nos hoc lemma concedimus, ſi, per *exceſſus*, intelligit, *ſubductionum reſidua*; ſin autem *diviſionis quotientes* intelligit, negamus Quippe $4 - 2 = 2.\ 8 - 4 = 4.\ 12 - 6 = 6.\ 6 - 3 = 3.$ (At $\frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{12}{6} = \frac{6}{3} = 2$.) Dum autem addit; *ſic rationes $\frac{9}{1}$ & $\frac{4}{1}$ inter ſe differunt ratione $\frac{9}{4}$*; jam tranſit εἰς ἄλλο γένος, nempe pro ſubductionis reſiduo, ſubſtituit diviſionis quotientem; non enim eſt $\frac{9}{1} - \frac{4}{1} = \frac{9}{4}$, ſed $\frac{4}{1})\frac{9}{1}(\frac{9}{4}$. Item, dum pergit; *harum duplæ $\frac{81}{1}$ & $\frac{16}{1}$, ratione $\frac{81}{16}$, inter ſe diſtant.* Non enim rationum $\frac{9}{1}$, $\frac{4}{1}$, duplæ, ſed duplicatæ, (non *διπλάσιοι*, ſed *διπλασίονες*,) ſunt $\frac{81}{1}$, & $\frac{16}{1}$: quæque emergit ratio $\frac{81}{16}$ (rationis $\frac{9}{4}$, non *διπλάσιος* ſed *διπλασίων*) non ſubducendo oritur, ſed dividendo; non enim $\frac{81}{1} - \frac{16}{1} = \frac{81}{16}$, ſed $\frac{16}{1})\frac{81}{1}(\frac{81}{16}$. Sed procedat demonſtratio. *Cum itaque*, inquit, *ſimplorum rationum $\frac{3}{2}$ & $\frac{4}{3}$, differentialis ratio* (nempe diviſione orta) *ſit $\frac{9}{8}$* (quia ſcilicet $\frac{4}{3})\frac{3}{2}(\frac{9}{8}$:) *duplarum $\frac{6}{2}$ & $\frac{8}{3}$, differentialis ratio, erit ſimplæ differentialis rationis dupla, nempe $\frac{81}{64}$* Nullo modo inquam. Sed eadem ipſa $\frac{9}{8}$. Nam jam de differentia diviſionali agitur, (de qua lemma non procedit,) non de ſubductionali. Sin velit lemmati ſuo exſemplum aptare; ſic potius dixiſſet; Quoniam ſimplarum rationum $\frac{3}{2}$ & $\frac{4}{3}$, differentia (ſubductione quærenda) ſit $\frac{1}{6} = \frac{3}{2} - \frac{4}{3} = \frac{9}{6} - \frac{8}{6}$: erit duplarum $\frac{6}{2} = \frac{3}{2} \times 2$, & $\frac{8}{3} = \frac{4}{3} \times 2$, differentia $\frac{6}{2} - \frac{8}{3} = \frac{18}{6} - \frac{16}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{6} \times 2$, nempe dupla differentiæ ſimplarum. Quod quidem verum eſt, uti lemma poſtulat..

Altera, inquit, demonſtratione idem oſtendemus, hoc ſumpto lemmate; *Arithmeticæ progreſſionis numeros, quorum ſecundus primi duplus eſt, eodem exceſſu proximos binos ſe invicem ſuperare* (ſeu potius, eorum unum ſuperare reliquum; non enim ſe mutuo

ſuperant, ſed alter ſuperat, alter ſuperatur) *quo primus ſuperat nihilum.* Eſto. Quid deinde. *Cum itaque*, inquit, *in hac rationum progreſſione* $\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{6}{2}, \frac{9}{2}, \frac{12}{2}$, (dic potius $\frac{0}{2}, \frac{3}{2}, \frac{6}{2}$, &c. ſecus enim non erit progreſſio arithmetica ;) *ratio* $\frac{3}{2}$ *ſimpla ſit, & unitatis loco* (hoc eſt primo) *ponatur ; cujus dupla eſt* $\frac{6}{2}$; *tripla,* $\frac{9}{2}$; *&c. continebit dua* $\frac{6}{2}$, *bis ſimplam* $\frac{3}{2}$, (recte quidem nam $\frac{6}{2} = \frac{3}{2} \times 2$.) *Atqui* inquit, *duplæ ſimplæ additæ, efficiunt* $\frac{9}{4}$. Nullo modo : ſed potius, multiplicando compoſitæ, non enim $\frac{3}{2} + \frac{3}{2}$, ſed $\frac{3}{2} \times \frac{3}{2}$, ſunt $\frac{9}{4}$. Sunt autem $\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \frac{6}{2}$, quam & progreſſio exhibet, & lemma poſtulat. Neutra itaque demonſtratio procedit. Ea vero quam appellat ille *veram rationis ſeſquialteræ progreſſionem* $\frac{32}{32} . \frac{48}{32} . \frac{72}{32} . \frac{108}{32}$ &c. vel $\frac{1}{1} . \frac{3}{2} . \frac{9}{4} . \frac{27}{8}$. &c. Non eſt progreſſio Arithmetica, quam lemma ſupponit ; ſed Geometrica ; adeoque nihil ad rhombum. Atque de reliquis inſtantiis, par eſto judicium.

Sed nec felicius ſuam exponit de Rationum Ratione doctrinam : quam ſic definit, p. 174. l. 12. *Ratio rationum eſt duarum rationum ejuſdem ſeriei, a fundana ratione ſecundum naturales numeros progredientis, ſecundum rationem certa quædam inter ipſas relatio.* Cum *enim*, inquit, *ratio aliqua alterius dupla, tripla, ſeſquialtera,* (duplicata, triplicata &c.) *dicitur ; ratio fundana & ſimpla* (hoc eſt, radix.) *ſecundum naturalem numerorum ſeriem excreviſſe, hoc eſt, continua ſui adpoſitione major facta, intelligitur* ; (hoc eſt continua multiplicatione fiunt poteſtates reliquæ :) *ita ſi quamcunque rationem ſibi ipſi adponam, fit ratio prioris ; nempe ſimplæ & fundanæ, dupla,* (duplicata ;) *ſi hanc cum fundana componam, fit fundanæ tripla &c. tripla autem ad duplam* (triplicata ad duplicatam) *eſt ut 3 ad 2* (ut poteſtas tertia ad ſecundam, ſeu ut cubus ad quadratum,) &c. *Porro poſſumus quamcunque rationem, fundanæ & ſimplæ rationis, hoc eſt, unitatis* (radicis ſeu poteſtatis primæ) *loco collocare. Unde innumeræ rationum progreſſiones exſurgunt, quarum aliquot exſemplorum loco expoſui.*

	0	1	2	3	4	5	6
I.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{2}{1}$:	$\frac{4}{1}$.	$\frac{8}{1}$.	$\frac{16}{1}$.	$\frac{32}{1}$.	$\frac{64}{1}$.
II.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{3}{1}$.	$\frac{9}{1}$.	$\frac{27}{1}$.	$\frac{81}{1}$.	$\frac{243}{1}$.	$\frac{729}{1}$.
III.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{4}{1}$.	$\frac{16}{1}$.	$\frac{64}{1}$.	$\frac{256}{1}$.	$\frac{1024}{1}$:	$\frac{4096}{1}$.
IIII.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{10}{1}$.	$\frac{100}{1}$.	$\frac{1000}{1}$.	$\frac{10000}{1}$.	$\frac{100000}{1}$.	$\frac{1000000}{1}$.
V.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{3}{2}$.	$\frac{9}{4}$.	$\frac{27}{8}$.	$\frac{81}{16}$.	$\frac{243}{32}$.	$\frac{729}{64}$.

Prima

Prima inquit, *progreſſio eſt ration.s duplæ; altera, triplæ; tertia, quadruplæ; quarta decuplæ; quinta ſeſquialteræ. &c.* Per *rationem* itaque *fundanam*, λόγον πυθμενικὸν, Radicem intelligit, ſive poteſtatem primam, uti manifeſtum eſt: contra quam ipſe alibi p. 137. l. 15. rationem æqualitatis $\frac{1}{1}$ (non autem, ut nunc, Radicem ſeu poteſtatem primam,) appellat *rationum omnium Fundamentum & principium.* Sed aliter adhuc p. 15. l. 13. eodem *fundanæ rationis* nomine, intelligit rationis in minimis numeris deſignationem; *Sic*, inquit, *ex* $\frac{3}{2}$. $\frac{6}{4}$ $\frac{9}{6}$. $\frac{12}{8}$. *quæ omnes ſunt in ratione ſeſquialtera; fundus eſt,* πυθμὴν, *ſeu* πυθμενικὸς λόγος, *fundata (lege fundana) ratio,* $\frac{3}{2}$. *quæ primis inter ſe numeris comprehenditur. Et ſic de cæteris.* Et ſimiliter p. 165. l. 20. Adeo ſibi inconſtans eſt in ſuorum terminorum acceptatione. At, inquam, quicquid ſit quod hac appellatione alibi velit, manifeſtum eſt eum per *rationem fundanam*, hic intelligere, radicem ſive poteſtatē primam. Hinc autem continua multiplicatione (ſive ut ille loqui malit, continua radicis fundanæ adpoſitione) emergit ſeries Geometrice proportionalium ab 1 ſeu $\frac{1}{1}$ inchoata; hoc eſt, continua poteſtatum ſeries; Quarum Radix, prima eſt; quadratum, ſeu ratio duplicata, ſecunda; (reliquæque juxta numeros naturales deinceps denominandæ;) ratio autem æqualitatis $\frac{1}{1}$, poteſtas nulla. (Et quidem ſi ſatis intellexiſſet Meibomius, hoc nihil aliud eſſe quam quod univerſim tradi ſolet, nempe 1. 𝓇. ʓ. ȼ. ʓʓ. &c. ſeu 1. *a*. *aa*. *aaa*. *aaaa*. &c. aut 1. a. a^2. a^3. a^4. &c. eſſe Geometrice proportionalia; eorumque indices, ſive exponentes poteſtatum, 0. 1. 2. 3. 4. 5. &c. arithmetice proportionales: Non eſſet cur ille, perplexâ ſuâ rei facillimæ traditione hanc ſibi & aliis moleſtiam crearet.) Per *rationum rationem* itaque nihil aliud hic intelligit Meibomius (utut illud definitione ſua ſatis obſcure tradiderit) quam mutuum ad invicem ſitum ſeu ordinem quem inter ſe habent duo pluresve termini ejuſdem progreſſionis Geometricæ ab 1 inchoatæ. Adeoque rationem *triplam ad duplam eſſe ut 3 ad 2, hoc eſt, in ratione ſeſquialtera;* nil aliud ſonat, quam ejuſdem rationis rationem triplicatam ad duplicatam, eſſe ut ejuſdem radicis poteſtas tertia ad ſecundam, cujus indices ſive exponentes 3, 2, ſunt in ratione ſeſquialtera $\frac{3}{2}$.

Sed & ultra notandum eſt, ſe in ſeriem ſuam nullos alios terminos admittere, quam qui fiunt continua appoſitione ratio-

alias ſeriei ſecundæ, tertiæ, quartæ, &c. De ratione quam habet ratio aſſignata, ad rationem aliquam ſeriei ſecundæ, non admodum ero ſolicitus; quoniam quidem ea, utut lineis explicabilis ſit (quod ſi opus eſſet, utut ille neget, facile ſumus demonſtraturi;) numeris tamen (ſenſu ſuo) explicabilis non eſt: Verum, quam habet rationem ratio expoſita ad rationes ſeriei tertiæ (vel ſuo ſenſu,) eſt & numeris explicabile. Quippe expoſita ratio $\frac{2}{1}$, eſt ad ſeriei tertiæ rationem $\frac{4}{1}$, (ut ille loquitur) ut 1 ad 2; ſive (ut loquuntur alii) ratio ſubduplicata: eadem expoſita ratio $\frac{2}{1}$, ad rationem (ejuſdem ſeriei tertiæ) $\frac{16}{1}$, eſt ut 1 ad 4, ſive ſubquadruplicata: item rationis $\frac{64}{1}$, ratio ſuboctuplicata, ſive (ut ille loquitur) ut 1 ad 8. Et de reliquis pariter. Quod quidem adeo perſpicuum eſt & obvium, ut mirum ſit, quî ille poſſit non videre; cum manifeſtum ſit, nullam non rationem ſeriei tertiæ, etiam & in ſerie prima (ſatis continuata) reperiri; utut non viceverſa. Sed & nulla non ratio ſeriei primæ, ad primam tertiæ $\frac{4}{1}$ (aliamve tertiæ ſeriei quamvis) utut in ſerie tertia nuſpiā ſedē habeat, rationē habebit (vel ſuo ſenſu) numeris explicabilem. Puta, ad rationem $\frac{4}{1}$, ratio $\frac{2}{1}$, eſt (Meibomii ſenſu) ut 1 ad 2; ratio $\frac{8}{1}$, eſt ad eandem, ut 3 ad 2; ratio $\frac{32}{1}$, ut 5 ad 2; & ſic de reliquis; (quamvis interim rationes $\frac{2}{1}$, $\frac{8}{1}$, $\frac{32}{1}$, nec in ſerie tertia reperiantur, nec ex rationis fundanæ $\frac{4}{1}$ continua adpoſitione fiant:) quæ omnia adeo & vera ſunt & per ſe perſpicua, & nemini non nota, ut ne quidem Meibomius, ubi ſecundas cogitationes adhibuerit, ſit negaturus. Ubi autem ille, ex uno aut altero exſemplo concludit pag. 177. l. 23. *eadem ratiocinatione quaſcunq; alias diverſæ ſeriei rationes, quacunque alia communi menſura menſuratas ineffabilem inter ſe rationem habere cognoſcemus*; iterumque p. 178. l. 3. *planum itaque eſt, omnes diverſæ ſeriei, ſeu non ab eadem fundana ratione adſcendentes, rationes inter ſe eſſe incommenſurabiles.* Dicimus non ſufficientem factam eſſe inductionem. Non enim ſi ratio $\frac{21}{20}$ non ſit rationum $\frac{2}{1}$ & $\frac{3}{1}$ communis menſura; ergo nullarum diverſæ ſeriei rationum, ulla erit communis menſura. Quippe nos in contrarium inſtantias oſtendimus, quas nequidem Meibomius negare ſuſtinebit.

Falſum itaque eſt (etiam ſuo ſenſu) quod hîc affirmat Meibomius, *Diverſi fundi rationes, rationem inter ſe effabilem non habere.*

Falſum

Falſum item eſt, (ut ſupra oſtendimus) *Tripli duplum non eſſe* (ſenſu Theonis) *ſextuplum*. Et quæ ſunt hujuſmodi, quæque hinc dependent omnia. Adeoque

Falſum eſt, quod contra Gregorium contendit Meibomius, *Non eſſe ut* $\frac{8}{2}$ *ad* $\frac{4}{2}$ *ita* $\frac{6}{2}$ *ad* $\frac{3}{2}$: aut *Gregorii propoſitiones plus centum triginta falſas eſſe*: aut denique *Eutocii, Theonis, Clavii, aliorumq́; de rationum denominatoribus doctrinam, falſam eſſe.*

Falſum item (ut ſupra oſtenſum eſt) *Rationem duplam & ſubduplam invicem æquales eſſe*. Aut etiam *Rationem* $\frac{1}{4}$ *majorem eſſe quam* $\frac{1}{2}$. Et quæ hiſce ſunt ſimilia. Adeoque

Falſum eſt; *Octavam aut decimam quinti* Euclidis, *aut ejuſdem libri definitionem ſeptimam, falſas eſſe*; aut quæ hinc dependent. Et propterea, Archimedes, Eutocius, Theo, Pappus, aliique, quod ea pro veris habuerint, a Meibomio, falſo inſimulantur criminis.

Falſa denique ſunt ea omnia, quæ, in ſuo de *Proportionibus Dialogo*, nove prôtulit Meibomius.

FINIS.

M. *Merſenni* locus notatur.

CUM præcedentem Tractatum hactenus abſolverant operæ, res ſuas ita diſponentibus Typothetis, ut alioqui vacuæ ſuper fuiſſent hæ pagina: Haud abs re fore judicavi *Marini Merſenni* locum, qui præfatione Generali ad ſua *Cogitata Phyſico-Mathematica*, Titulo *De Rationibus & Proportionibus*, numeris 12, 13, 14, habetur, breviter expendere: ubi in eundem cum *Meibomio* errorem lapſus videtur.

Nempe cum Clavius, ad finem lib. 9. Euclidis, notaverat *Compoſitionem rationis* (de qua 10 *d* 5, & 5 *d* 6, agitur,) *non eſſe tanquam Totius ex Partibus*, *quod Additionis negotium eſt*; (ſed tanquam Facti ex Factoribus, Multiplicando;) *Quia ſecus totum eſſet minus ſua parte*, (nam $\frac{1}{100}$, quæ componitur ex $\frac{1}{10}$ & $\frac{10}{100}$, utravis componente minor eſt; & $\frac{4}{8}$, quæ componitur ex $\frac{4}{1}$ & $\frac{2}{16}$, alterâ quidem componentium minor eſt, utut reliquâ major.) Reſpondet Merſennus, *id etiam evenire, in addendis quantitatibus negativis*; (nam ex partibus -2 & -3, totum -5, eſt utrâvis minus; & ex partibus -2 & $+4$, totum vel aggregatum $+2$, eſt altera quidem majus, utut altera minus.) Ut igitur ſe expendiat, ipſum ſupponit quod & Meibomius (& quidem fieri poteſt, ut Meibomius hinc anſam nactus ſit) *Proportio*, inquit, *æqualitatis Nihili ſimilitudinē refert*; *Proportio Majoris inæqualitatis, attollitur ſupra nihilum*; *Proportio Minoris inæqualitatis, deprimitur infra nihilū.* Atq; hinc colligit; Prout adjectione vel ablatione o nihili, nihil accedit vel demitur quantitati; ita nec acceſſione proportionis æqualitatis, augetur vel minuitur proportio. Quemadmodum autem adjectione Quantitatis poſitivæ (ſive ut loquitur, *Entis*,) augetur; Negativæ autem ſive Ablativæ (ſive ut loquitur, *Antientis*) minuitur quantitas: Ita acceſſio proportionis majoris inæqualitatis, auget; Minoris autem, minuit proportionem.

Verum hoc ſibi perperam aſſumit, Proportionem *Æqualitatis*, nihili inſtar eſſe; *Minoris* autem inæqualitatis, minoris quam nihili, ſive inſtar quantitatis negativæ; cum interim illæ ſint non minus poſitivæ rationes, utut minores, quam quæ majoris inæqualitatis. Quippe qui *ſimplum* dicit, non illæ rem *nullies* apponi intelligit, ſed *ſemel*. Et qui *ſubduplum* poni dicit, non aliquid *auferri* dicit, ſed ſaltem *ſemiſſem poni*. Et quidem *Duplo*,

tan-

tanquam *Enti* ſive quantitati poſitivæ, non opponitur, tanquam *Anti-ens*, vel quantitas ablatitia, *Subduplum*, ſed Dupli *defectus*. Quippe $+ 2 A$ & $- 2 A$, ſunt oppoſitæ quantitates affirmativa & negativa; non autem $+ 2 A$ & $+ \frac{1}{2} A$, ſive $+ A \times 2$ & $+ \frac{A}{2}$ quorum utraque eſt poſitiva.

Et quidem in ſcala poteſtatum juxta quam rationes dici ſolent Dupicata, Triplicata &c. puta $\frac{2}{1}$, $\frac{4}{1}$, $\frac{8}{1}$, $\frac{16}{1}$ &c. quamquam ratio æqualitatis $\frac{1}{1}$, erit *nullius gradus*, ſive ut loqui æliceat, Nullana poteſtas; ſeu poteſtas a 0 denominanda; & proinde $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, &c. gradus deſcendentes, adeoque a $- 1$, $- 2$, $- 3$ denominandi: non tamen propterea quantitates illæ dicendæ ſunt ablatitiæ, magis quam fractiones decimales (quorum loci ſeu gradus infra unitatis locum conſiſtunt, adeoque indices habent negativos) dicendæ negativæ quantitates; aut etiam fractiones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, &c. dicendæ ſunt quantitates negativæ, quia radicis 2, poteſtates continue conſequentes ſunt 4, 8, 16 &c. adeoque 1 ejuſdem poteſtas nullana, & propterea, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ejuſdem radicis 2, poteſtates adhuc inferiores, adeoq; ab indicibus negativis denominandæ.

Sed cum rationum Compoſitio, Multiplicationis ſit, non Additionis, opus; ut ex 5 *d* 6 patet: Dixiſſet potius rationem æqualitatis $\frac{1}{1}$, eſſe inſtar 1 Unitatis; quæ, quantitatem multiplicans reddit quantitatem Factam reliquæ Factrici æqualem: rationes autem Majoris inæqualitatis, $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{3}{2}$, &c, inſtar numerorũ unitate Majorũ, qui quantitatem Factam exhibent reliquâ Factrice, ſeu multiplicatâ, Majorem: Rationes autem Minoris Inæqualitatis, eſſe inſtar numerorum (non negativorum ſeu minorum quam 0 ſed) poſitivorum minorum tamen quam 1; puta fractorum qui inter 1 & 0 intercedunt: quippe qui, multiplicantes, Factam exhibent quantitatem, non quidem negativam, ſed multiplicata tamen minorem. Qua lege pulchre conſtarent omnia.

Et quidem quod mirandum cuipiam forſan videbitur, *Rationem duplicatam, expoſitâ nonnunquam minorem eſſe*; &c. nihil ird ſe habet incommodi: Nil enim aliud ſonat, quam *Quadratum vel Cubum vel Biquadratum &c. Radice ſua minus eſſe poſſe*; nempe quoties Radix eſt numerus unitate minor.

FINIS:

BIBLIOTECA NAZ. ROMA ...TORIO EMANUELE

I-2.